

УДК 539.374

## ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПОЛОС ИЗ МАТЕРИАЛА С ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВИДА НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СВОЙСТВАМИ

© 2007 Е.В. Ломакин, Б.Н. Федулов<sup>1</sup>

Проведен анализ пластического деформирования среды, пластические свойства которой зависят от вида напряженного состояния. На основе закона пластического течения, ассоциированного с условием пластичности, представленном в соответствующем обобщенном виде, в рамках жесткопластической модели получены аналитические решения задач о растяжении полос с различными формами боковых надрезов. Исследована зависимость распределения напряжений в пластических областях и величины предельной нагрузки от параметра, характеризующего чувствительность пластических свойств среды к виду напряженного состояния. Проведено численное моделирование формирования пластических областей на основе упругопластической модели для тех же задач, для которых получены аналитические решения в рамках жесткопластической модели. Изучено влияние упругой деформации на форму пластических областей. Проанализирована возможность использования жесткопластической схемы решения при определении предельных нагрузок для тел, чувствительных к виду напряженного состояния.

### Введение

В механике деформируемых твердых тел наиболее известны и широко используются такие критерии пластичности как критерий Треска и критерий Мизеса. Существует же достаточно большой класс материалов, для которых данные критерии не согласуются с экспериментами. Данные материалы, как правило, являются микронеоднородными — имеют трещины, поры, включения и другие особенности структуры. Такие материалы, будучи достаточно хрупкими в обычных условиях, при больших гидростатических напряжениях могут проявлять пластические свойства и, наоборот, при всестороннем растяжении материал, в обычных условиях пластичный, может

<sup>1</sup>Ломакин Евгений Викторович (lomakin@mech.math.msu.su), Федулов Борис Никитович (fedulov.b@mail.ru), кафедра теории пластичности Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы.

проявить свойства, достаточно близкие к хрупким. Деформирование таких материалов может сопровождаться необратимыми объемными деформациями. Основные свойства материалов, которые рассматриваются в данной работе, это — отсутствие "единой кривой" для зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций и несправедливость обычно принимаемых гипотез об упругой сжимаемости материала и пластической несжимаемости. Для многих материалов диаграммы зависимости интенсивности деформации от интенсивности напряжений при простом растяжении, сжатии, сдвиге, двухосном сжатии и других видах нагружения различны, причем расхождение диаграмм может быть весьма значительным. Такими свойствами обладают некоторые композиционные материалы, конструкционные графиты, чугун, бетон, некоторые полимерные материалы, конструкционные стали, керамические материалы и другие.

Приведенные свойства материалов, описание которых невозможно с использованием классических подходов, заставляет вводить в критерии и определяющие соотношения параметры, характеризующие вид напряженного состояния в деформируемой среде.

Целью работы является анализ пластического деформирования среды с учетом зависимости свойств от вида напряженного состояния. Проведено сравнение аналитических решений задач для сред с различной степенью чувствительности к виду напряженного состояния, которые построены с помощью жесткопластической схемы. Выявлены качественные и количественные отличия решений по сравнению с решениями, полученными при отсутствии влияния на пластическое деформирование вида напряженного состояния. Вторая основная цель работы состоит в построении численных упругопластических решений для определения целесообразности использования жесткопластической схемы решения при определении предельных нагрузок для рассматриваемого класса материалов.

## 1. Определяющие соотношения пластического деформирования среды

Представим условие пластичности в следующем обобщенном виде:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1.1)$$

Здесь  $\xi = \sigma/\sigma_0$  — параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды,  $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$  — среднее нормальное напряжение,  $\sigma_0 = \sqrt{3/2S_{ij}S_{ij}}$  — интенсивность касательных напряжений,  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ . Не нарушая общности, можно принять, что при чистом сдвиге ( $\xi = 0$ ) значение функции  $f(0) = 1$ . Тогда  $k = \sqrt{3}\tau_s$ , где  $\tau_s$  — предел текучести при сдвиге. При произвольном виде напряженного состояния па-

раметр  $\xi$  принимает значения в диапазоне от  $-\infty$  (равномерное трехосное сжатие) до  $\infty$  (равномерное трехосное растяжение).

Принимая различные аналитические выражения для функции  $f(\xi)$  в критерии (1.1), можно получить некоторые из известных условий пластичности для гранулированных, пористых и поврежденных сред. Если принять функцию  $f(\xi)$  в виде линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi, \quad (1.2)$$

то приходим к обобщению критерия Кулона–Мора. Можно также получить условие пластичности Грина, если принять функцию  $f(\xi)$  в виде

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}. \quad (1.3)$$

При  $f(\xi) \equiv 1$  условие (1.1) совпадает с условием пластичности Губера–Мизеса,  $\sigma_0 = k$  [1].

Принимая ассоциированный с условием (1.1) закон течения  $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$ , в случае жесткопластического тела получим связь между скоростями деформаций и напряжениями

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= h' [1/3\Lambda(\xi)\delta_{ij} + \lambda(\xi)f(\xi)S_{ij}/k], \\ \Lambda(\xi) &= f'(\xi), \quad \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \\ h' &= \sqrt{(\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij})/(1/3\Lambda^2(\xi) + 3/2\lambda^2(\xi))}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Функции  $\lambda(\xi)$  и  $\Lambda(\xi)$  и их производные связаны соотношениями  $\lambda(\xi) + \xi\Lambda(\xi) = f(\xi)$ ,  $\lambda'(\xi) + \xi\Lambda'(\xi) = 0$  [2].

### 1.1. Основные соотношения для условий плоской деформации

В случае плоской деформации  $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$  и, воспользовавшись соотношениями (1.4), можно выразить напряжение  $\sigma_{33}$  через  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{12}$  и исключить его из условия пластичности (1.1). В результате получим

$$\sigma_{33} = \sigma - \frac{2}{9}\sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \quad \sigma_0 = S_0 [1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda^2(\xi)}]^{1/2}, \quad \sigma = S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}, \quad (1.5)$$

$$S_0 = \sqrt{3/2}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{1/2}, \quad S = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22}).$$

Вводя параметр  $\zeta = S/S_0$ , с помощью (1.5) можно выразить  $\zeta$  через  $\xi$ :

$$\zeta = [\xi + 1/9\Lambda(\xi)/\lambda(\xi)][1 - 1/9\Lambda^2(\xi)/\lambda^2(\xi)]^{1/2}. \quad (1.6)$$

Равенство (1.6) определяет взаимно однозначное соответствие между  $\xi$  и  $\zeta$  при выполнении условий

$$3\lambda(\xi) > |\Lambda(\xi)|, \quad \Lambda'(\xi) \geq 0.$$

Параметр  $\zeta$  и напряжение  $S_0$  можно выразить через  $S$ . Тогда известные формулы для напряжений в случае плоской деформации могут быть представлены в виде:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta, \quad (1.7)$$

где  $S = 1/2(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ ,  $\theta$  — угол между осью  $x_1$  и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение [3].

При нахождении аналитических решений краевых задач с использованием представлений (1.2)–(1.3) в случае условий плоской деформации задача сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для функции  $f(\xi)$ , определяемой выражениями (1.2), (1.3), функция  $F(S)$  представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} F(S) &= m(C^{-1} - S/k), \quad m = \sqrt{3}C/\sqrt{9-C^2} \quad \text{в случае} \quad f(\xi) = 1 + C\xi, \\ F(S) &= \sqrt{1 - \beta S^2/k^2}, \quad \beta = \alpha/(1 + \alpha/9) \quad \text{в случае} \quad f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Параметры  $C$  и  $\alpha$  для данных видов зависимостей  $f(\xi)$  определяются степенью поврежденности среды, пористости или степенью чувствительности пластических свойств материала к виду напряженного состояния.

Для приведенных видов зависимостей  $f(\xi)$  при некоторых ограничениях на параметры  $C$  и  $\alpha$  система (1.8) является гиперболической и возможно построение решений методом характеристик [3]. Также для данных видов зависимостей  $f(\xi)$  можно проинтегрировать соотношения вдоль характеристик и построить аналитические решения. В общем случае уравнения характеристик и соотношения вдоль них имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - k^2 F'^2}}{-kF' + \sin 2\theta}, \\ dS \mp \frac{2kF d\theta}{\sqrt{1 - k^2 F'^2}} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для зависимости  $f(\xi) = 1 + C\xi$  уравнения характеристик и соотношения вдоль них имеют следующий вид:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta}, \quad \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2m} \ln\left(1 - C\frac{S}{k}\right) \pm \theta = \text{const}. \quad (1.11)$$

Если функция  $f(\xi)$  представлена в виде (1.3), то уравнения (1.10) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{(1 - \beta S/k)^2/[3(1 - \beta S^2/k^2)]}}{\beta S/k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)} + \sin 2\theta}, \\ \sqrt{\frac{3 + \beta}{\beta}} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{\beta(3 + \beta)S}{3k}} \right] - \\ &\quad - \arcsin \left[ \frac{\beta S}{k \sqrt{3(1 - \beta S^2/k^2)}} \right] \mp 2\theta = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Используя соотношения (1.5) и (1.7), можно получить систему уравнений для скоростей

$$\begin{aligned}(v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\theta + v_{1,1} - v_{2,2} &= 0, \\ (v_{1,1} + v_{2,2}) \cos 2\theta + (v_{1,2} - v_{2,1})kF' &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

При этом характеристики системы уравнений (1.13) для скоростей совпадают с характеристиками уравнений для напряжений (1.8), и вдоль них выполняются соотношения Гейрингер [5]:

$$dv_\alpha - v_3 d\varphi_\alpha = 0, \quad dv_\beta - v_4 d\varphi_\beta = 0.\tag{1.14}$$

Здесь  $v_\alpha$  и  $v_\beta$  — компоненты скорости вдоль разных семейств характеристик,  $v_3$  и  $v_4$  компоненты скорости вдоль направлений, нормальных к линиям характеристик,

$$v_3 = (v_\beta - v_\alpha \cos \varphi) / \sin \varphi, \quad v_4 = (v_\beta \cos \varphi - v_\alpha) / \sin \varphi, \quad \varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha.\tag{1.15}$$

Здесь  $\varphi_\alpha$  и  $\varphi_\beta$  — углы наклона характеристик, отсчитываемые от направления оси  $x_1$ , выражения для которых в общем случае можно получить из уравнений (1.10).

## 2. Аналитическое решение конкретных задач

Далее в работе ограничимся рассмотрением только линейной зависимости от параметра вида напряженного состояния, т.е.  $f(\xi) = 1 + C\xi$ . Рассмотрим конкретные примеры решения задач предельного состояния. При этом построим решения при помощи жесткопластической схемы решения и далее проанализируем и сравним полученные результаты с численными расчетами, которые учитывают как упругие деформации, так и небольшое упрочнение материала. Примеры, на которых будет демонстрироваться предложенный подход, это известные задачи предельного состояния при плоской деформации. Постановка таких задач и решения с использованием жесткопластической схемы и критерия пластичности Губера–Мизеса достаточно полно изложены в литературе ([1, 4]).

### 2.1. Растяжении полосы с угловыми вырезами

Рассмотрим задачу о растяжении полосы, ослабленной угловыми вырезами (рис. 1). Полоса растягивается при помощи силы  $P$ . Величина скорости растяжения полосы вдали от вырезов предполагается равной  $V$ , берега вырезов свободны от нагрузки. Глубина вырезов предполагается хотя и произвольной, но достаточно глубокой. В противном случае предлагаемый вид пластических областей, представленный на рис. 1, может не реализоваться.

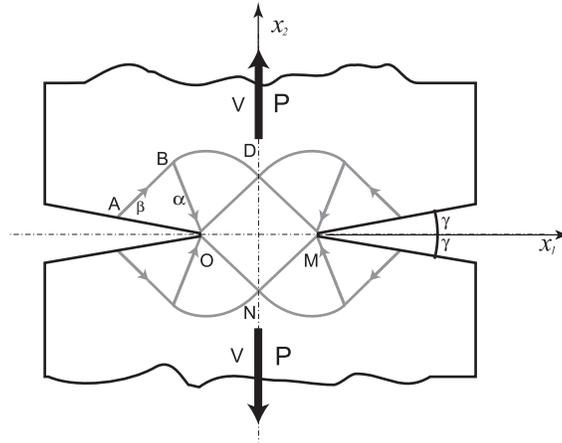


Рис. 1. Растяжение полосы, ослабленной угловыми вырезами

В данной задаче для предложенных форм пластических областей возможно следующие представление граничных условий на берегах разрезов:

$$\sigma_n = S - kF(S) \sin 2(\theta - \varphi_n), \tau_n = kF(S) \cos 2(\theta - \varphi_n).$$

Здесь  $\sigma_n$  и  $\tau_n$  — нормальное и касательное напряжения на границе,  $\varphi_n$  — угол между нормалью к границе и осью  $x_1$ . В случае отсутствия нагрузок на границе вырезов,  $\sigma_n = 0$  и  $\tau_n = 0$ , следует:

$$S = kF(S) \sin 2(\theta - \varphi_n), \quad \theta = \varphi_n + \pi/4. \quad (2.1)$$

Выражения (2.1) для  $S$  и  $\theta$  верны во всем треугольнике  $ABO$  в силу прямолинейности линий характеристик. Зная значения для  $S$  и  $\theta$ , можно с помощью соотношений (1.7) и (1.9), выписать выражения для напряжений в области  $ABO$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{k}{C} \frac{m}{m+1} (1 - \cos 2\varphi_n), \\ \sigma_{22} &= \frac{k}{C} \frac{m}{m+1} (1 + \cos 2\varphi_n), \\ \sigma_{12} &= -\frac{k}{C} \frac{m}{m+1} (\sin 2\varphi_n). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Рассмотрим теперь область  $ODMN$ , в которой линии характеристик также являются прямолинейными, что, как следствие, приводит к постоянству в этой области параметров  $S$  и  $\theta$ . Угол  $\theta$  можно определить из следующих соображений: из симметрии решения следует, что на срединной линии  $OM$  напряжение  $\sigma_{12} = 0$ , из чего непосредственно следует, что можно положить угол  $\theta = -3/4\pi$ . Теперь, зная  $S$  и  $\theta$  в области  $ABO$  и значение  $\theta$  в области  $ODMN$ , можно вычислить значение неизвестной константы в соотношении (1.11) и определить напряжение  $S$  в  $ODMN$ :

$$S_{ODMN} = \left(\frac{k}{C}\right) \left[1 - \frac{\exp(-(2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n])}{1+m}\right]. \quad (2.3)$$

С помощью соотношений (1.7) и (1.9), зная значения  $S$  и  $\theta$ , можно найти напряжения в  $ODMN$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{k}{C} \left[ 1 - \exp(-2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n] \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp(-2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n] \right], \\ \sigma_{12} &= 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

поскольку  $\sigma_{22}$  постоянно в  $ODMN$ , то предельная нагрузка  $P$  равна:

$$P = 2h\sigma_{22} = 2h\frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp(-2m/\sqrt{1-m^2})[\pi + \varphi_n] \right]. \quad (2.5)$$

На рис. 2 изображены зависимости предельной нагрузки, деленной на  $k$  и на  $2h$ , от  $C$  для разных углов надрезов  $\gamma$ .

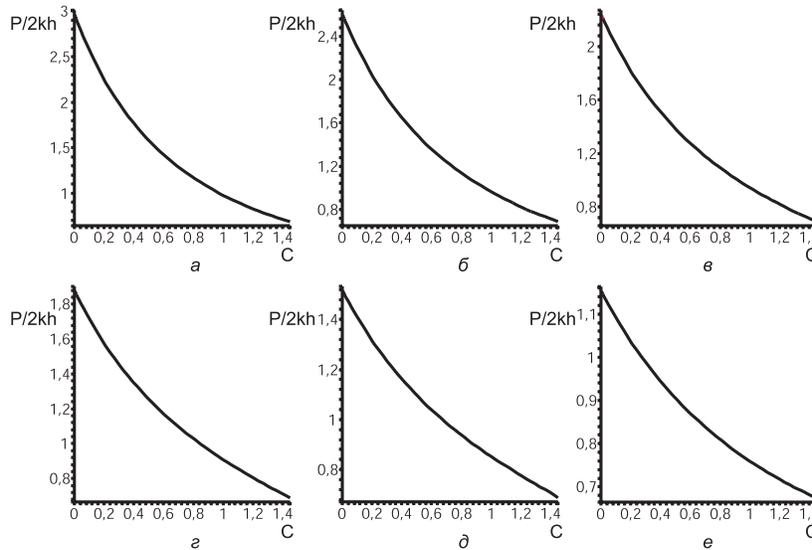


Рис. 2. Предельная нагрузка деленная на  $k$  и  $2h$  в случае (1.2):  $a - \gamma = 0$ ,  $b - \gamma = \pi/10$ ,  $в - \gamma = 2\pi/10$ ,  $г - \gamma = 3\pi/10$ ,  $д - \gamma = 4\pi/10$ ,  $е - \gamma = \pi/2$

Таким образом, видно, что предельная нагрузка падает с ростом значений  $C$  для всех углов вырезов, и неучет введенных здесь свойств в критерий может в значительной мере изменить результат.

Также возможно, используя соотношения (1.13)–(1.15), восстановить распределение поля скоростей в момент достижения предельного состояния, причем для данной задачи это удастся сделать аналитически, и полученное поле скоростей непрерывно во всем сечении [3].

## 2.2. Растяжение полосы с вырезами с круглым основанием

Рассмотрим задачу о растяжении полосы с вырезами с круглым основанием. Геометрия части полосы приведена на рис. 3. Вырезы, как и ранее,

предполагаются произвольными, но достаточно глубокими. Границы вырезов свободны от нагрузок.

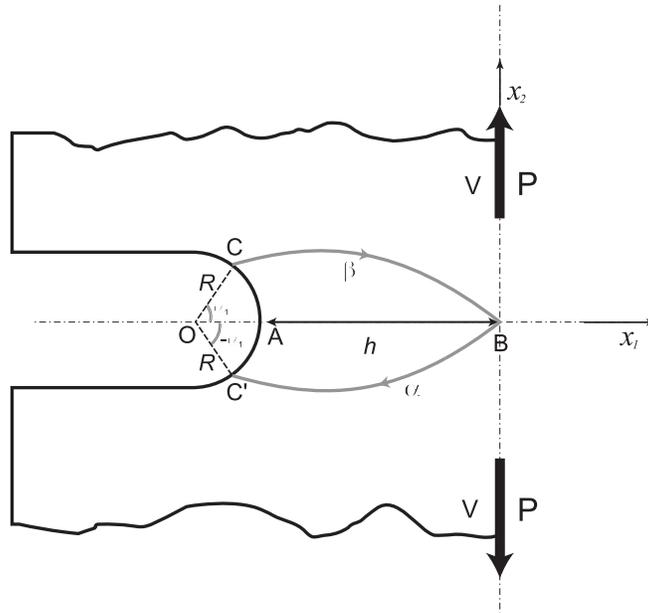


Рис. 3. Вариант решения только с логарифмическими областями

Построение поля характеристик в данной задаче возможно двумя способами, и выбор одного из них зависит от ширины ослабленного сечения или от значения параметра  $h$  и значения материальной константы  $C$ , входящей в критерий пластичности. Первый вариант решения состоит только из области, ограниченной двумя логарифмическими спиралями (рис. 3).

Можно установить условия реализации данного поля характеристик. Уравнения характеристик в полярной системе координат можно записать в виде

$$\frac{\alpha \pm \alpha_1}{\operatorname{tg} \varphi/2} = \ln \frac{\rho}{R}, \quad (2.6)$$

где  $\varphi$  — угол между характеристиками, а  $\pm \alpha_1$  — углы на контуре кругового основания надреза, определяющие симметричные точки, из которых исходят характеристики разных семейств. Максимальное значение  $\rho$  достигается на срединной линии  $\alpha = 0$ , при этом  $\rho = R + h$ . В этом случае пластическая область занимает все срединное сечение и реализуется предельное состояние. Угол  $\alpha_1$  ограничен значением  $\pi/2$ , поэтому условие, когда такое решение возможно, выглядит следующим образом:

$$\frac{h}{R} \leq \exp\left(\frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}\right) - 1. \quad (2.7)$$

Стоит отметить, что в условии (2.7) включено значение  $\varphi$ , которое является функцией параметра  $C$ , согласно соотношениям (1.9), (1.11) и (1.15).

Таким образом, в отличие от решения на основе критерия пластичности Губера–Мизеса, в данном решении условие выбора типа решения зависит не только от геометрических параметров, но и степени чувствительности пластических свойств материала к виду напряженного состояния. На рис. 4 показаны области параметров  $C$  и  $h/R$ , для которых необходимо построение решений различного типа.

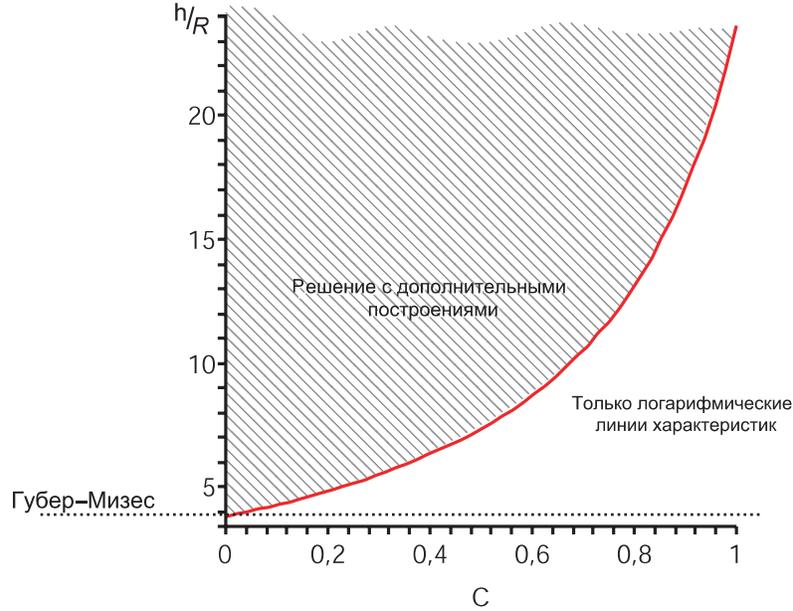


Рис. 4. Условие выбора вида решения

Для определения предельной нагрузки необходимо найти напряжение  $\sigma_{22}$  на срединной линии. Контур надреза свободен от напряжений. Отсутствие касательного и нормального напряжений на круговом контуре позволяет воспользоваться выражением (2.1) и определить значение  $S$  на контуре

$$S = \frac{km}{C(1+m)}. \quad (2.8)$$

Поскольку на круговом основании надреза  $\varphi_n = \pi + \alpha$ , где  $\alpha$  — угловая координата точки контура, то находим значение угла  $\theta$  на дуге окружности

$$\theta = \pi + \alpha + \pi/4. \quad (2.9)$$

Используя соотношения (1.11) вдоль характеристик и выражения (2.8) и (2.9), можно найти значения  $\theta$  и  $S$  на центральной линии в области логарифмических спиралей

$$\theta = \frac{5}{4}\pi, \quad S = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1}{1+m} \exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}}\alpha_0\right) \right]. \quad (2.10)$$

Используя соотношения (1.7) и (2.10), можно получить зависимость напряжения  $\sigma_{22}$  на срединной линии от угловой координаты кругового кон-

тура  $\alpha_0$

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp\left(-\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \alpha_0\right) \right]. \quad (2.11)$$

С помощью уравнений характеристик (2.6) можно выразить угол  $\alpha$  через соответствующий ему радиус  $\rho$ . Приравняв  $\alpha$  нулю, что выражает условие того, что точка лежит на срединной линии, получим зависимость напряжения  $\sigma_{22}$  от  $\rho$  в области логарифмических спиралей

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-2m/\sqrt{1-m^2}} \right]. \quad (2.12)$$

Предельная нагрузка

$$P = 2 \int_R^{R+h} \sigma_{22} d\rho.$$

В результате получаем следующее значение предельной нагрузки для решения, основанного только на логарифмических областях:

$$P = 2R \frac{k}{C} \left[ h/R - \left( (1+h/R)^{-(3m-1)/(1-m)} - 1 \right) \frac{(1-m)^2}{(1+m)(3m-1)} \right].$$

На рис. 5 представлены графики зависимости  $P/kR$  от  $C$  для различных  $h$ . Данное выражение верно только в случае выполнения условия (2.7) для параметров  $C$  и  $h/R$ .

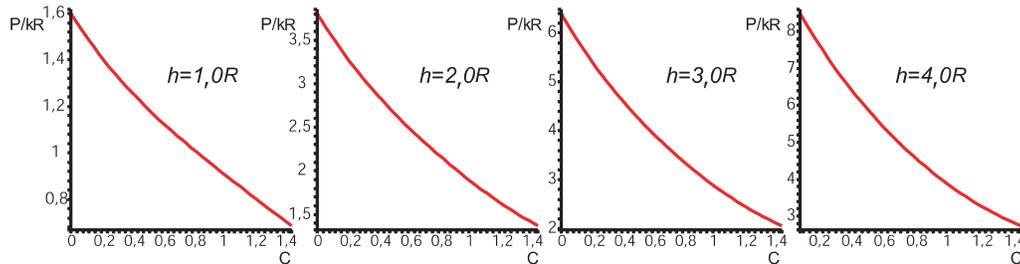


Рис. 5. Предельная нагрузка, деленная на  $k$  и на  $R$ , в случае только логарифмических областей для конкретных  $h$

Рассмотрим также решение, когда условие (2.7) не выполнено, и множество параметров  $C$  и  $h/R$  лежит в заштрихованной области слева от линии, приведенной на рис. 4. В данном случае возможный вид характеристик представлен на рис. 6. Область  $BEFC$  состоит из линий, параллельных логарифмической спирали  $BC$ , и прямых линий, исходящих из  $BC$  под углом  $\varphi$ , как продолжение семейства  $\alpha$  характеристик области  $CC'B$ . Здесь так же, как и в предыдущем случае, можно получить выражения для напряжений в различных областях.

Напряжение  $\sigma_{22}$  в области логарифмических спиралей определяется выражениями (2.11), (2.12). Координату точки  $B$  можно определить из условия (2.7) и установить пределы интегрирования для логарифмических областей при нахождении предельной нагрузки. Значения  $S$  и  $\theta$  в области

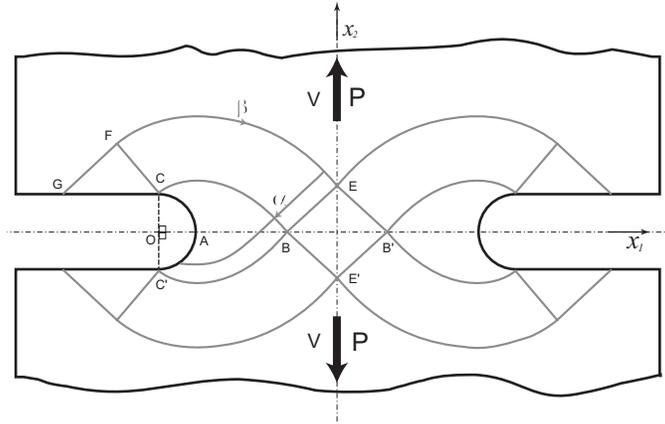


Рис. 6. Вариант решения с дополнительными построениями

$GFC$  находим из условий (2.1). Из симметрии решения и прямолинейности характеристик в центральной области  $EBE'B'$  находим значение угла  $\theta = 5/4\pi$ . Данное значение выбрано так, чтобы оно совпало со значением  $\theta$  на срединной линии области логарифмических спиралей. С помощью соотношений (1.11) вдоль характеристик находим напряжение  $S$  в области  $EBE'B'$

$$S = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1}{1+m} \exp\left(-2m/\sqrt{1-m^2} \left[\frac{\pi}{2}\right]\right) \right].$$

В результате, воспользовавшись выражениями (1.7) и (1.9), находим напряжение  $\sigma_{22}$  на отрезке  $BB'$

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp\left(-2m/\sqrt{1-m^2} \left[\frac{\pi}{2}\right]\right) \right].$$

Для значения предельной нагрузки в данном случае получаем следующее выражение:

$$P = \frac{2kR}{C} \left[ a - 1 + \left( a^{(3m-1)/(m-1)} - 1 \right) \frac{(m-1)^2}{(m+1)(3m-1)} \right] + \frac{2kR}{C} \left[ 1 - \frac{1-m}{1+m} \exp\left(-2m/\sqrt{1-m^2} \left[\frac{\pi}{2}\right]\right) \right] [h/R + 1 - a],$$

где

$$a = \exp\left(\frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}\right).$$

На рис. 7 приведены зависимости предельной нагрузки, деленной на  $k$  и на  $R$ , от параметра  $C$  для различных значений параметра  $h$ .

Таким образом, получено решение задачи о растяжении полосы с вырезами с круглым основанием. Отличие данного решения от классического состоит в более сложном условии выбора вида решения (2.7) и соответствующем построении полей характеристик. Здесь переход от построения

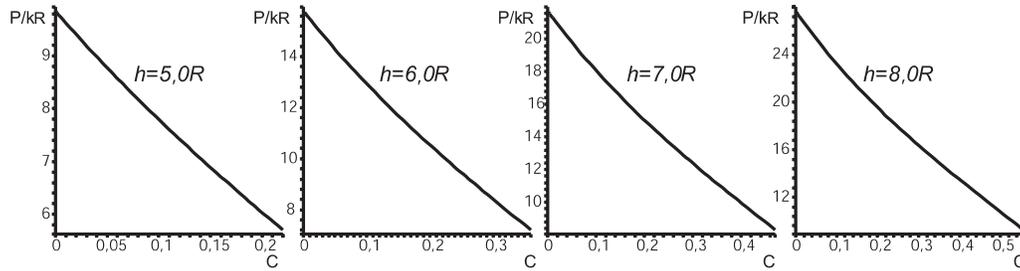


Рис. 7. Предельная нагрузка, деленная на  $k$ , в случае решения с дополнительными построениями для конкретных  $h$

решения в виде только логарифмических спиралей к решению с более сложным полем характеристик зависит не только от одного геометрического параметра  $h$ , но и от параметра  $C$ , определяющего свойства материала. По сравнению с решением в случае критерия Губера–Мизеса при  $h > 3,81$  для достижения предельного состояния необходимо вовлекать в пластическое состояние значительно большие области тела.

Таким образом, продемонстрированы примеры аналитического построения решений задач предельного состояния с учетом влияния вида напряженного состояния на пластические свойства среды. В качестве основного вывода можно отметить существенное влияние параметра вида напряженного состояния на значения предельных нагрузок.

### 3. Построение численных решений

В предыдущем разделе получены аналитические решения некоторых задач плоской деформации на основе жесткопластической модели материала. Погрешность такого приближения достаточно трудно оценить. Для этого нужно получить упругопластическое решение, что сопряжено с известными трудностями. По сути, нет оснований утверждать, что при стремлении модуля Юнга к бесконечности упругопластическое решение будет стремиться к решению, построенному при помощи использованного выше подхода. Очевидно, что разница между полной упругопластической и использованной жесткопластической схемой решения может существенно зависеть от типа рассматриваемой задачи, геометрии и степени развития пластических процессов в областях тела. Так или иначе, чтобы рассуждать о справедливости полученных решений, необходимо получить экспериментальные данные на реальных телах или строить упругопластические решения. В связи с этим следующая часть работы посвящена численному построению разобранных ранее аналитических решений, но с использованием упругопластической модели материала.

Численный расчет производился в конечноэлементной программе ABAQUS на основе специально написанной подпрограммы, подключа-

емой во время расчета и отвечающей за связь между напряжениями и деформациями. В подпрограмме была реализована изотропная упругопластическая модель материала с критерием пластичности (1.1) для функции  $f(\xi)$  представленной выражением (1.2). Кроме того, было учтено незначительное упрочнение материала, то есть использован следующий критерий пластичности:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k(\varepsilon^{pl}). \quad (3.1)$$

Как видно из (3.1), параметр  $k$  теперь не константа, как было принято в аналитических решениях, а функция параметра упрочнения  $\varepsilon^{pl}$ . В качестве параметра упрочнения использовалась величина эквивалентной деформации:

$$\varepsilon^{pl} = \int \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^{pl} \dot{\varepsilon}_{ij}^{pl}} dt.$$

При этом для установления связи между напряжениями и деформациями использовался ассоциированный закон пластичности. Подробное описание интегрирования уравнений пластичности в общем случае зависимости критерия текучести от первого инварианта тензора напряжений можно найти в работе [6].

В качестве свойств материала для решения задач использовались следующие значения модуля упругости и коэффициента Пуассона:

$$E = 200000, \quad \nu = 0,3.$$

Конечноэлементная программа ABAQUS всегда работает в безразмерных величинах, выбор единиц измерения для модуля Юнга автоматически определяет единицы измерения для результатов и моделируемой геометрии. Можно считать, что модуль упругости и предел текучести задаются в единичных напряжениях. Функция упрочнения представлялась в виде кусочнолинейной, проходящей через точки

$$k(0.0) = 200, \quad k(9.0/10^4) = 220, \quad k(2.2/10^3) = 225.$$

Во всех рассматриваемых задачах расчет происходил с помощью объемных восьмиузловых полностью интегрируемых элементов; для получения правильной постановки задачи плоской деформации использовалось условие симметрии относительно плоскости моделируемого сечения. Перемещения прикладывались только по нормали к границе, так что перемещения вдоль границы возможны, и расчет производился в геометрически линейной постановке.

В качестве первого примера рассмотрим численное решение задачи о растяжении полосы, ослабленной угловыми вырезами (рис. 1). Постановка задачи аналогична постановке в рассмотренном ранее аналитическом решении. В расчетах задавались нормальные перемещения верхней и нижней границ тела. Предельная нагрузка определялась как суммарная сила реакции в направлении оси  $x_2$ . В расчетах принята ширина наименьшего

сечения полосы  $2h = 2$ , рассмотрены два значения углов выреза  $2\gamma = 0$  и  $2\gamma = \pi/2$ .

В результате расчетов установлено, что процесс формирования пластических областей и геометрия областей пластичности в предельном состоянии существенно отличаются от областей, рассмотренных в аналитическом решении. Данный факт свидетельствует о том, что упрощение граничных условий для пластических областей приводит к существенному изменению реализуемой кинематики.

На рис. 8 показан характерный вид пластических областей в предельном состоянии, из которого видно, что срединная область полосы остается упругой. Проведем сравнительный анализ значений нагрузок, соответствующий

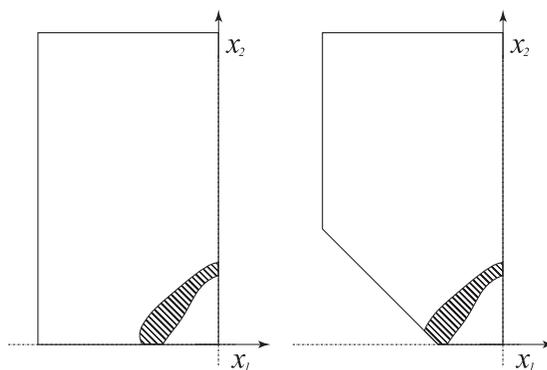


Рис. 8. Область пластичности

щих предельному состоянию, полученных путем численного решения упруго-пластической задачи и на основе аналитического решения. На рис. 9 изображена зависимость предельной нагрузки от значения константы  $C$ . Видно, что различие полученных значений предельной нагрузки велико при малых значениях параметра  $C$ , при этом, начиная со значений  $C > 0,5$  расхождение существенно меньше. Данный факт можно объяснить с точки зрения экстремальных теорем о значении предельной нагрузки. В аналитическом решении для полосы, ослабленной угловыми вырезами, построено кинематически возможное решение, которое дает оценку значению предельной нагрузки сверху. Если построить статически допустимое решение, то оно даст оценку снизу. В аналитическом решении на линии ослабленного сечения можно задаться постоянным полем напряжений  $\sigma_{22} = P/2h$ , где  $P$  определяется формулой (2.5), и продолжить это поле в область всего тела. Таким образом, получим простое статически допустимое решение. На рис. 9 штриховая линия соответствует статически допустимому значению предельной нагрузки. Видно, что полученные на основе численных расчетов значения предельной нагрузки, лежат между значениями, полученными аналитически.

Рассмотрим также численное решение задачи о растяжении полосы,

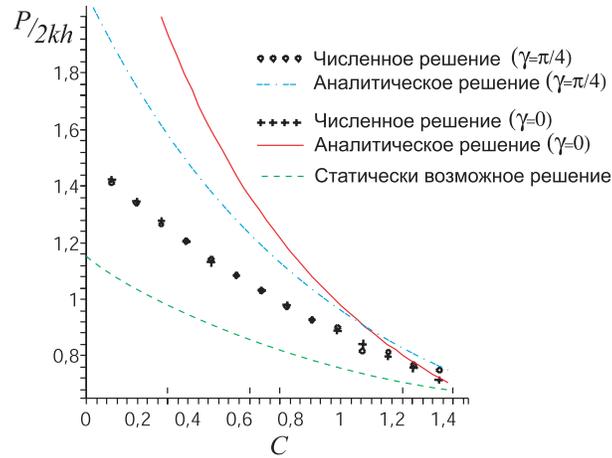


Рис. 9. Предельная нагрузка

ослабленной вырезами с круговым основанием. Ограничимся рассмотрением случая, когда в аналитическом решении пластическая область представляется в виде только логарифмических спиралей, то есть выберем ширину ослабленного сечения достаточно малой, чтобы удовлетворить условию (2.7). В качестве параметров геометрии выбраны следующие: радиус основания  $R = 1$  и ширина сечения  $2h = 2$ .

На рис. 10 штрихами показана пластическая область в момент достижения предельного состояния для значения параметра  $C = 0,5$ . На рис. 11 представлены зависимости предельной нагрузки от параметра  $C$ , полученные численно и аналитически. Представленные на рис. 11 результаты свидетельствуют о том, что предложенное аналитическое решение, являясь кинематически возможным, достаточно хорошо приближает значения предельной нагрузки для всего рассмотренного диапазона значений параметра  $C$ .

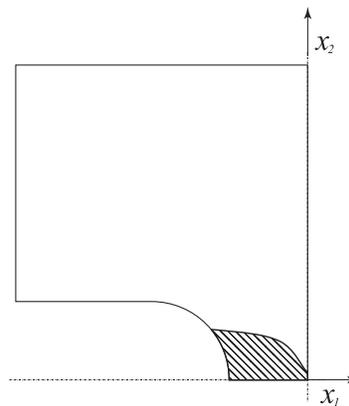


Рис. 10. Область пластичности

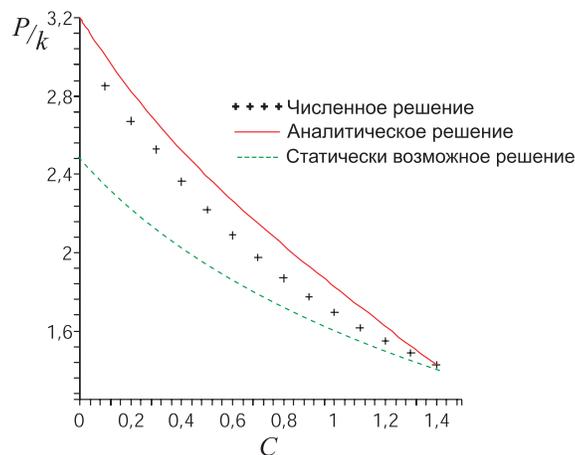


Рис. 11. Предельная нагрузка

#### 4. Основные результаты и выводы

В работе для класса материалов, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния, проведен анализ соответствия значений предельных нагрузок, полученных аналитически при помощи жесткопластической схемы решения и численно с использованием упругопластической модели материала. Установлено, что учет упругих деформаций в уравнениях связи между напряжениями и деформациями приводит к изменению кинематической картины пластического деформирования в процессе растяжения полос с надрезами и существенному изменению формы пластических областей по сравнению с аналитическими решениями для жесткопластического тела. При этом значения предельных нагрузок, определенных на основе упругопластической модели, укладываются в оценки, получаемые из экстремальных теорем для аналитических решений. Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-01-00416).

#### Литература

- [1] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969.
- [2] Ломакин, Е.В. Зависимость предельного состояния композитных и полимерных материалов от вида напряженного состояния / Е.В. Ломакин // Механика композитных материалов. – 1988. – №1. – С. 3–9.
- [3] Ломакин, Е.В. Пластическое течение дилатирующей среды в условиях плоской деформации / Е.В. Ломакин // Механика твердого тела. – 2000. – №6.
- [4] Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

- [5] Фрейденталь, А. Математические теории неупругой сплошной среды. – А. Фрейденталь, Х. Гейрингер. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 432 с.
- [6] Aravas, N. On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models / N. Aravas // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1987. – V. 24. – P. 1395–1416.

Поступила в редакцию 15/V/2007;  
в окончательном варианте — 15/V/2007.

## PLASTIC DEFORMATION OF STRIPES OF STRESS-STATE-DEPENDENT MATERIAL PROPERTIES

© 2007 E.V. Lomakin, B.N. Fedulov<sup>2</sup>

The plastic deformation of medium of stress-state-dependent plastic properties are analyzed. On the base of the afterflow law associated with plasticity condition represented in generalized form and rigid-plastic model, the analytical solutions of the problems of notched stripes tension are obtained. The dependence of stress fields in plastic domains and the values of limit loads on the stress state sensitivity parameter is studied. The numerical simulation of plastic domains formation on the base of elastic-plastic model is performed for the same problems considered in analytical studies. The effect of elastic deformation on the shape of plastic domains is studied. The possibility of rigid-plastic scheme usage for the determination of the limit loads is analyzed for the solids sensitive to the stress state type.

Paper received 15/V/2007.

Paper accepted 15/V/2007.

---

<sup>2</sup>Lomakin Evgenij Viktorovich (lomakin@mech.math.msu.su), Fedulov Boris Nikitovich (fedulov.b@mail.ru), Dept. of Theory of Plasticity, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991, Russia.