

УДК 539.3

ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ ВОЛНЫ РЭЛЕЯ ДЛЯ УПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ТОРЦЕВОЙ НАГРУЗКИ

© 2006 В.А. Ковалев¹ О.В. Таранов²

Изучаются особенности распространения нестационарных волн в упругой цилиндрической оболочке при ударных торцевых воздействиях нормального типа. Асимптотическим методом построены уравнения для нахождения решения в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея при нормальном торцевом воздействии.

1. Постановка задачи

Динамические процессы в тонкостенных телах характеризуются показателями динамичности и изменяемости напряженно-деформируемых состояний (НДС). В нестационарных задачах эти показатели неоднородны по координате и времени, что определяет возможность выделения областей применимости различных приближенных теорий. Согласно классификации У.К. Нигула [1] выделяется три типа ударных торцевых воздействий, приводящих к различным типам нестационарного НДС. Применение асимптотических методов позволило в [2–4] расчленить нестационарное НДС в случаях продольных воздействий тангенциального LT и для изгибающего LM типов на составляющие с различными показателями изменяемости и динамичности. Предложенный в этих работах подход к изучению нестационарных волн, основанный на выделении пакетов волн, инициированных торцами и стенками, предполагает анализ поведения решений с ростом времени. Корректность такой схемы расчленения обеспечивается необходимой точностью описания составляющих и наличием областей их согласования.

В работах [5, 6] сформулирована асимптотическая модель, ориентированная на выделение решения в окрестности условного фронта поверхностной волны Релея как в классической задаче Лэмба для упругого полупро-

¹Ковалев Владимир Александрович (kovalev@migm.ru) кафедра математических и информационных основ управления Московского городского университета управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

²Таранов Олег Викторович (mgupi@mail.ru) кафедра теоретической механики Московского государственного университета приборостроения и информатики, 107475, Россия, г. Москва, ул. Стромьнка, 20.

странства, так и в задаче для бесконечной упругой полуполосы. В работах [7, 8] для оболочек вращения предложена принципиально новая схема расчленения нестационарного НДС при торцевом воздействии нормального типа NW на составляющие с различными показателями изменчивости. Указанная схема основанна на качественно новых свойствах поведения нестационарных волн в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея. Здесь появляется квазифронт в окрестности условного фронта поверхностной волны Рэлея, причем гиперболические уравнения теории типа Тимошенко ошибочно воспринимают этот квазифронт как фронт новой особой сдвиговой волны.

В данной работе основное внимание уделено исследованию особенности поведения решения в окрестности условного фронта поверхностных волн Рэлея при ударно приложенных торцевых нагрузках, моделируемых во времени функцией Хевисайда.

Рассмотрим трехмерную осесимметричную задачу теории упругости для полубесконечной цилиндрической оболочки (см. рис. 1) при ударной торцевой нагрузке нормального типа в форме

$$\frac{\partial u_3}{\partial x} = IH(t), \quad u_1 = 0. \quad (1.1)$$

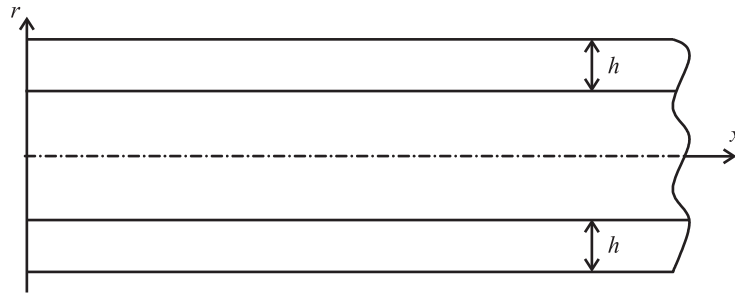


Рис. 1. Полубесконечная упругая цилиндрическая оболочка

Примем, что лицевые поверхности $r = R \pm h$ свободны от напряжений, а начальные условия при $t = 0$ однородны:

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = 0, \quad (1.2)$$

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad (i = 1, 3). \quad (1.3)$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) x , r — осевая и радиальная координаты; t — время; σ_{11} , σ_{33} , σ_{13} — нормальные и касательные напряжения; h — полутолщина оболочки; R — радиус срединной поверхности цилиндра; u_1 , u_3 — перемещения в направлении осей x , r ; I — амплитуда нагрузки; $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Уравнения движения упругого цилиндра имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial r} + \frac{1}{r}(-\sigma_{22} + \sigma_{33}) - \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial r} + \frac{1}{r}\sigma_{13} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_3}{r} \right), \\ \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_3}{r} \right), \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{u_3}{r} \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial r} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{u_3}{r} \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $c_1 = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)\rho}}$, $c_2 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}$ — скорости волн расширения и сдвига; $\kappa = \frac{c_2}{c_1}$; E , ν , ρ — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и плотность материала оболочки.

Уравнения движения в перемещениях можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \kappa^{-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x \partial r} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial u_3}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial r} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \kappa^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} - \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\kappa^{-2}}{r} \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{\kappa^{-2}}{r^2} \frac{\partial u_3}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Перейдем к безразмерным координатам с помощью соотношений

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \zeta = \frac{r-R}{h}, \quad \tau = \frac{tc_2}{h}. \quad (1.7)$$

Тогда уравнения движения и уравнения закона Гука примут вид

$$\begin{aligned} \kappa^{-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \\ + \frac{\eta}{1+\eta\zeta} \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\eta}{1+\eta\zeta} \frac{\partial u_3}{\partial \xi} &= 0, \\ \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} + \kappa^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \\ + \kappa^{-2} \frac{\eta}{1+\eta\zeta} \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} - \kappa^{-2} \frac{\eta^2}{(1+\eta\zeta)^2} \frac{\partial u_3}{\partial \xi} &= 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\eta}{1+\eta\zeta} u_3 \right), \\
\sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\eta}{1+\eta\zeta} u_3 \right), \\
\sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi} \right).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь $\eta = \frac{h}{R}$ — малый параметр тонкостенности оболочки.

Из уравнений (1.8)–(1.9), пренебрегая величинами порядка $O(\eta^2)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\kappa^{-2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi \partial \zeta} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} + \eta \frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{\eta}{1-2\eta} \frac{\partial u_3}{\partial \xi} = 0, \\
&\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi \partial \zeta} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial \xi^2} + \kappa^{-2} \frac{\partial^2 u_3}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial^2 u_3}{\partial \tau^2} + \kappa^{-2} \eta \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} = 0, \\
&\sigma_{11} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \eta u_3 \right), \\
&\sigma_{33} = \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \eta u_3 \right), \\
&\sigma_{13} = \frac{E}{2(1+\nu)h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi} \right).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

2. Погранслои в окрестности условного фронта поверхностных волн Релея

Анализ уравнений (1.10) показывает, что искомое НДС в окрестности условного фронта волн Релея, строящееся с показателями изменчивости и динамичности, равными единице, относится к классу коротковолновых [3, 4] и является симметричным или антисимметричным относительно срединной поверхности с асимптотической погрешностью $O(\eta)$. Можно записать в общем случае

$$\sigma_{kl} = E \left(\sigma_{kl}^0 + \eta \sigma_{kl}^1 \right), \quad u_m = R \eta \left(u_m^0 + \eta u_m^1 \right), \quad k, l, m = 1, 2, 3, \tag{2.1}$$

где индексом "0" обозначена основная составляющая НДС (симметричная или антисимметричная относительно срединной поверхности), а индексом "1" обозначена второстепенная составляющая (соответственно, антисимметричная или симметричная). Тогда уравнения (1.10) для основной составляющей будут переписаны в виде, совпадающем с уравнениями для плоского слоя:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u_1}{d\zeta^2} + (\kappa^{-2} \partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) u_1 + \frac{\partial_\xi}{1-2\nu} \frac{d u_3}{d\zeta} &= 0, \\
 \frac{\partial_\xi}{1-2\nu} \frac{d u_1}{d\zeta} + \kappa^{-2} \frac{d^2 u_3}{d\zeta^2} + (\partial_\xi^2 - \partial_\tau^2) u_3 &= 0, \\
 \sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} \right), \\
 \sigma_{22} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial u_3}{\partial \zeta} \right), \\
 \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_3}{\partial \xi} \right).
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

Как и в случае полуполосы [6], выделим частное решение уравнений (2.2), удовлетворяющее только торцевым граничным условиям (1.1). Обозначим это решение верхним индексом "0":

$$\begin{aligned}
 u_1^{(0)} &= 0, & u_3^{(0)} &= -I(\tau - \xi)H(\tau - \xi), \\
 \sigma_{11}^{(0)} = \sigma_{33}^{(0)} &= 0, & \sigma_{13}^{(0)} &= \frac{EI}{2(1+\nu)h} H(\tau - \xi).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Решение (2.3), построенное с малой асимптотической погрешностью $O(\eta)$, представляет собой поперечную волну, распространяющуюся вдоль оси цилиндрической оболочки в плоскостях, проходящих через эту ось. Построенное таким образом решение, совпадающее с аналогичным решением для полуполосы [6], не удовлетворяет граничным условиям (1.2) на лицевых поверхностях.

2.1. Построение эквивалентной задачи

Представим решение рассматриваемой задачи в виде следующей суммы:

$$\text{НДС} = \text{НДС}^{(0)} + \text{НДС}^{(1)},$$

где для решения с верхним индексом "1" на торце и лицевых поверхностях ставятся следующие граничные условия при $\xi = 0$ и $\zeta = \pm 1$:

$$\frac{\partial u_3^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad u_1^{(1)} = 0, \tag{2.4}$$

$$\sigma_{33}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{13}^{(0)} = -\frac{EI}{2(1+\nu)h} H(\tau - \xi). \tag{2.5}$$

На рис. 2 показаны нагружения на лицевые поверхности и схема деформирования оболочки в этой задаче.

Его анализ показывает, что деформированное торцевое сечение остается прямолинейным и перпендикулярным к оси цилиндра. Следовательно,

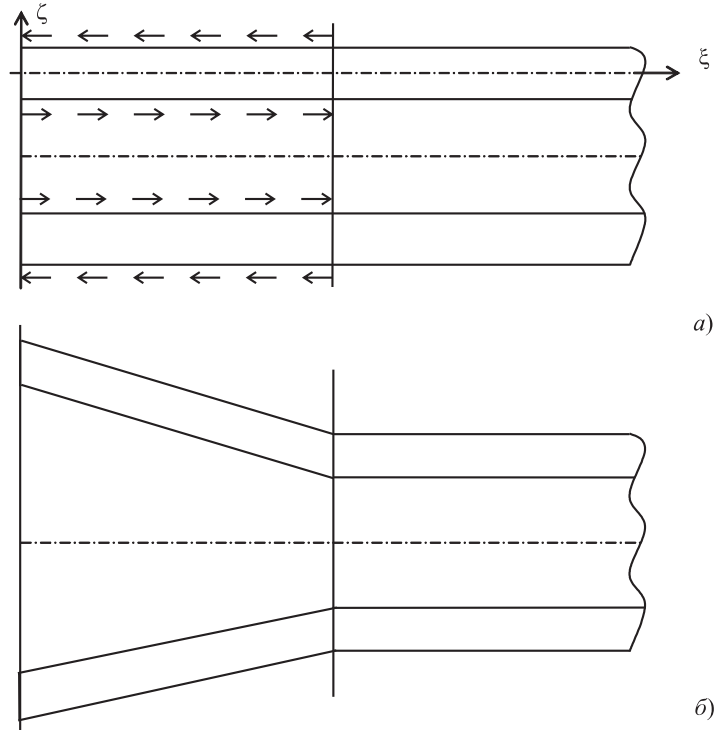


Рис. 2. Схема нагружения и деформирования полубесконечной цилиндрической оболочки: схема нагружения на лицевые поверхности (а); схема деформирования (б)

если взять бесконечную цилиндрическую оболочку с симметричным нагружением, показанным на рис. 3, а, то деформирование каждой из ее симметричных частей эквивалентно деформированию рассматриваемой полубесконечной оболочки. Поэтому можно перейти к исследованию эквивалентной задачи для бесконечной оболочки, представленной на рис. 3.

2.2. Решение краевой задачи с помощью символьного метода А.И. Лурье

Перепишем уравнения (2.2) для составляющей с индексом "1", предварительно введя операторные обозначения

$$\partial_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \partial_{\tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1}{d \zeta^2} + (\kappa^{-2} \partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2) u_1 + \frac{\partial_{\xi}}{1 - 2\nu} \frac{d u_3}{d \zeta} &= 0, \\ \frac{\partial_{\xi}}{1 - 2\nu} \frac{d u_1}{d \zeta} + \kappa^{-2} \frac{d^2 u_3}{d \zeta^2} + (\partial_{\xi}^2 - \partial_{\tau}^2) u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

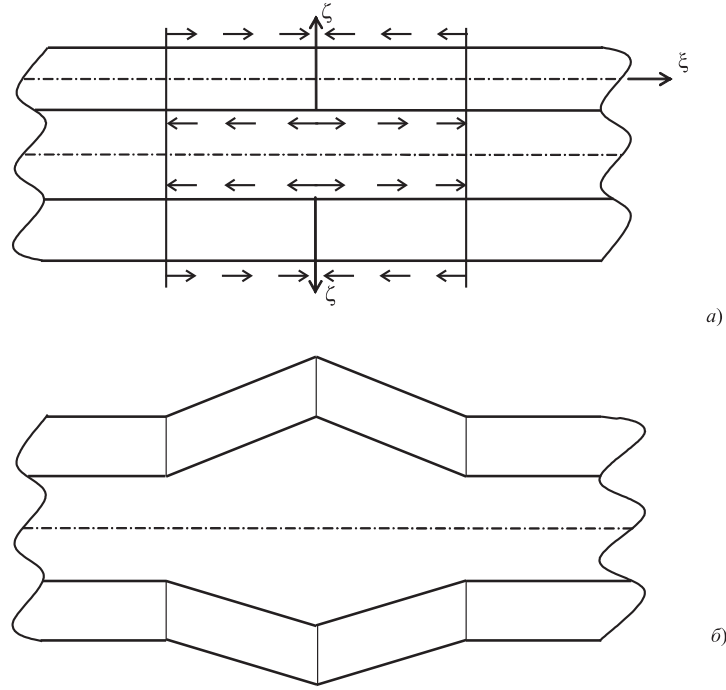


Рис. 3. Эквивалентная схема нагружения и деформирования бесконечной цилиндрической оболочки: схема нагружения на лицевые поверхности (а); схема деформирования (б)

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{\nu}{1-\nu} \frac{du_3}{d\zeta} + \partial_\xi u_1 \right), \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2 h} \left(\frac{du_3}{d\zeta} + \frac{\nu}{1-\nu} \partial_\xi u_1 \right), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{2(1+\nu)h} \left(\partial_\xi u_3 + \frac{du_1}{d\zeta} \right).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Применим символический метод А.И. Лурье [8, 5, 6]. Тогда точные выражения для перемещений u_1 , u_3 и напряжений σ_{33} , σ_{13} удовлетворяющих уравнениям (2.7), (2.8), записываются в виде:

$$\begin{aligned}u_1 &= \partial_\xi e^{-(1-\zeta)\alpha} D_1 + \partial_\xi e^{-(1+\zeta)\alpha} D_2 + \beta e^{-(1-\zeta)\beta} D_3 - \beta e^{-(1+\zeta)\beta} D_4, \\ u_3 &= \alpha e^{-(1-\zeta)\alpha} D_1 - \alpha e^{-(1+\zeta)\alpha} D_2 - \partial_\xi e^{-(1-\zeta)\beta} D_3 - \partial_\xi e^{-(1+\zeta)\beta} D_4,\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{33} &= \frac{E}{(1+\nu)h} (\gamma^2 e^{-(1-\zeta)\alpha} D_1 + \gamma^2 e^{-(1+\zeta)\alpha} D_2 - \\ &\quad - \partial_{\xi}\beta e^{-(1-\zeta)\beta} D_3 + \partial_{\xi}\beta e^{-(1+\zeta)\beta} D_4), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{(1+\nu)h} (\partial_{\xi}\alpha e^{-(1-\zeta)\alpha} D_1 - \partial_{\xi}\alpha e^{-(1+\zeta)\alpha} D_2 + \\ &\quad + \gamma^2 e^{-(1-\zeta)\beta} D_3 + \gamma^2 e^{-(1+\zeta)\beta} D_4),\end{aligned}$$

где $\alpha^2 = \kappa^2 \partial_{\tau}^2 - \partial_{\xi}^2$, $\beta^2 = \partial_{\tau}^2 - \partial_{\xi}^2$, $\gamma^2 = \frac{1}{2} \partial_{\tau}^2 - \partial_{\xi}^2$, D_i ($i = 1, 2, 3, 4$) — постоянные интегрирования, определяемые из условий на лицевых поверхностях (2.5).

Подставляя найденное решение (2.9) в граничные условия (2.5) при $\zeta = \pm 1$, получаем следующую систему алгебраических уравнений для D_i :

$$\begin{aligned}\gamma^2 D_1 + \gamma^2 e^{-2\alpha} D_2 - \partial_{\xi}\beta D_3 + \partial_{\xi}\beta e^{-2\beta} D_4 &= 0, \\ \partial_{\xi}\alpha D_1 - \partial_{\xi}\alpha e^{-2\alpha} D_2 + \gamma^2 D_3 + \gamma^2 e^{-2\beta} D_4 &= -S, \\ \gamma^2 e^{-2\alpha} D_1 + \gamma^2 D_2 - \partial_{\xi}\beta e^{-2\beta} D_3 + \partial_{\xi}\beta D_4 &= 0, \\ \partial_{\xi}\alpha e^{-2\alpha} D_1 - \partial_{\xi}\alpha D_2 + \gamma^2 e^{-2\beta} D_3 + \gamma^2 D_4 &= -S, \\ S &= \begin{cases} \frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi > 0, \\ -\frac{1}{2} IH(\tau - \xi), & \xi < 0. \end{cases}\end{aligned}\tag{2.10}$$

Для упрощения вычислений пренебрежем в граничных условиях (2.10) членами с множителем $e^{-2\alpha}$. Это соответствует, в конечном итоге, пренебрежению в асимптотике для первого корня уравнения Рэлея–Лэмба при $\chi \rightarrow \infty$

$$\omega_1(\chi) = k_R \chi - B \chi \exp\left(-2\sqrt{1 - k_R^2} \chi\right) + B \chi \exp\left(-2\sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} \chi\right)$$

членом с множителем $\exp\left(-2\sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} \chi\right)$ по сравнению с членом с множителем $\exp\left(-2\sqrt{1 - k_R^2} \chi\right)$. Здесь $B = 2 \left[\frac{k_R}{1 - k_R^2} + \frac{\kappa^2 k_R^2}{1 - \kappa^2 k_R^2} - \frac{4k_R}{2 - k_R^2} \right]^{-1}$, $k_R = \frac{c_R}{c_2} < 1$, c_R — скорость поверхностных волн Рэлея. Коэффициент k_R является корнем известного трансцендентного уравнения

$$(2 - k_R^2)^2 - 4\sqrt{1 - k_R^2} \sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} = 0.$$

Тогда граничные условия (2.10) могут быть преобразованы к виду:

$$\begin{aligned}(\gamma^4 + \partial_{\xi}\alpha\beta) D_3 + (\gamma^4 - \partial_{\xi}\alpha\beta) e^{-2\beta} D_4 &= -\gamma^2 S, \\ (\gamma^4 - \partial_{\xi}\alpha\beta) e^{-2\beta} D_3 + (\gamma^4 + \partial_{\xi}\alpha\beta) D_4 &= -\gamma^2 S, \\ \gamma^2 D_1 = \partial_{\xi}\beta D_3 - \partial_{\xi}\beta e^{-2\beta} D_4, \quad \gamma^2 D_2 &= \partial_{\xi}\beta e^{-2\beta} D_3 - \partial_{\xi}\beta D_4.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Рассмотрим большие значения времени, когда $\tau \gg 1$ (т.е. когда фронты волн проходят расстояние, много большее толщины цилиндра): $\tau = O(T)$,

$T \gg 1$. Введем малый параметр $\varepsilon = \frac{1}{T}$, масштабированные переменные y , τ_0 и соответственно новые операторы ∂_y , ∂_{τ_0} :

$$y = \frac{\xi_0 - k_R \tau_0}{\varepsilon}, \quad \zeta_0 = \varepsilon \zeta, \quad \tau_0 = \varepsilon \tau, \quad \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_{\tau_0} = \frac{\partial}{\partial \tau_0}. \quad (2.12)$$

Отбрасывая асимптотически второстепенные члены, приходим к следующим двум уравнениям для D_3 , D_4 и двум выражениям, определяющим D_1 , D_2 через D_3 , D_4 :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon \partial_y \partial_{\tau_0} D_3 - 2B \partial_y^2 \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y\right) D_4 &= -\frac{B}{1 - k_R^2/2} S, \\ -2B \partial_y^2 \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y\right) D_3 + 2\varepsilon \partial_y \partial_{\tau_0} D_4 &= -\frac{B}{1 - k_R^2/2} S, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$(1 - k_R^2/2) \partial_y D_1 = -i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y D_3 + i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y\right) D_4,$$

$$(1 - k_R^2/2) \partial_y D_2 = -i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y\right) D_3 + i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_y D_4.$$

Запишем асимптотическое представление выражений для перемещений и напряжений:

$$\begin{aligned} u_1 &= \partial_y \exp\left(-(1 - \zeta)ia \partial_y\right) D_1 + \partial_y \exp\left(-(1 + \zeta)ia \partial_y\right) D_2 + \\ &\quad + ib \partial_y \exp\left(-(1 - \zeta)ib \partial_y\right) D_3 - ib \partial_y \exp\left(-(1 + \zeta)ib \partial_y\right) D_4 \\ u_2 &= ia \partial_y \exp\left(-(1 - \zeta)ia \partial_y\right) D_1 - ia \partial_y \exp\left(-(1 + \zeta)ia \partial_y\right) D_2 - \\ &\quad - \partial_y \exp\left(-(1 - \zeta)ib \partial_y\right) D_3 - \partial_y \exp\left(-(1 + \zeta)ib \partial_y\right) D_4, \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{(1 + \nu)h} \left[-\left(1 - k_R^2/2\right) \partial_y^2 \exp\left(-(1 - \zeta)ia \partial_y\right) D_1 - \right. \\ &\quad - \left(1 - k_R^2/2\right) \partial_y^2 \exp\left(-(1 + \zeta)ia \partial_y\right) D_2 - \\ &\quad \left. - ib \partial_y^2 \exp\left(-(1 - \zeta)ib \partial_y\right) D_3 + ib \partial_y^2 \exp\left(-(1 + \zeta)ib \partial_y\right) D_4 \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} &= \frac{E}{(1 + \nu)h} \left[ia \partial_y^2 \exp\left(-(1 - \zeta)ia \partial_y\right) D_1 - ia \partial_y^2 \exp\left(-(1 + \zeta)ia \partial_y\right) D_2 - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - k_R^2/2\right) \partial_y^2 \exp\left(-(1 - \zeta)ib \partial_y\right) D_3 + \left(1 - k_R^2/2\right) \partial_y^2 \exp\left(-(1 + \zeta)ib \partial_y\right) D_4 \right], \end{aligned}$$

где $a = \sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2}$, $b = \sqrt{1 - k_R^2}$.

Вернемся в соотношениях (2.13) к исходным операторам

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_R} \left(\partial_\tau^2 - k_R^2 \partial_\xi^2 \right) D_3 + 2B \partial_\xi^2 \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_\xi\right) D_4 &= \frac{B}{1 - k_R^2/2} S, \\ 2B \partial_\xi^2 \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_\xi\right) D_3 + \frac{1}{k_R} \left(\partial_\tau^2 - k_R^2 \partial_\xi^2 \right) D_4 &= \frac{B}{1 - k_R^2/2} S, \\ -i \sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} \partial_\xi D_1 &= \frac{1}{1 - k_R^2/2} \left(-\partial_\xi D_3 + \partial_\xi \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_\xi\right) D_4 \right), \\ -i \sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} \partial_\xi D_2 &= \frac{1}{1 - k_R^2/2} \left(-\partial_\xi \exp\left(-2i \sqrt{1 - k_R^2} \partial_\xi\right) D_3 + \partial_\xi D_4 \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Введем объемный и сдвиговой потенциалы Ламе φ и ψ , разделяя их на части, где индексом "1" будем обозначать отрицательное по ζ направление распространения возмущений, индексом "2" — положительное:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2.$$

Здесь под φ_i, ψ_i ($i = 1, 2$) будем понимать следующие выражения:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \exp\left(-(1 - \zeta)i\sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} \partial_{\xi}\right) D_1, & \varphi_2 &= \exp\left(-(1 + \zeta)i\sqrt{1 - \kappa^2 k_R^2} \partial_y\right) D_2, \\ \psi_1 &= \exp\left(-(1 - \zeta)i\sqrt{1 - k_R^2} \partial_{\xi}\right) D_3, & \psi_2 &= \exp\left(-(1 + \zeta)i\sqrt{1 - k_R^2} \partial_{\xi}\right) D_4. \end{aligned}$$

Эти потенциальные функции определяются эллиптическими уравнениями

$$\left(1 - \frac{c_R^2}{c_1^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0, \quad \left(1 - \frac{c_R^2}{c_2^2}\right) \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial z^2} = 0, \quad (2.16)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} - c_R^2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + 2k_R B \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} &= \frac{k_R B}{1 - k_R^2/2} S \quad \text{при } z = h, \\ 2k_R B \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} - k_R^2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} &= \frac{k_R B}{1 - k_R^2/2} S \quad \text{при } z = -h, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} &= \frac{1}{1 - k_R^2/2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \quad \text{при } z = h, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} &= \frac{1}{1 - k_R^2/2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right) \quad \text{при } z = -h. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Перемещения и напряжения выражаются через потенциальные функции по формулам:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2}{\partial z}, & u_2 &= \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2}{\partial x}, \\ \sigma_{33} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[-\left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x \partial z} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial z} - \left(1 - \frac{k_R^2}{2}\right) \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Заключение

Приведем основные выводы изложенного выше подхода для цилиндрической оболочки:

- 1) Исследование НДС в окрестности условного фронта волн Рэлея для полубесконечной упругой оболочки с малой асимптотической погрешностью $O(\eta)$ сводится к изучению приближенных уравнений, форма которых совпадает с соответствующими уравнениям, полученными в работе [6] для полубесконечной упругой полосы.

- 2) Возмущения в дальнем поле волны Рэлея распространяются с конечной скоростью c_R и описываются одномерными волновыми уравнениями (2.18).
- 3) Затухание возмущений по глубине от каждой из лицевых поверхностей, описывается двумерными эллиптическими уравнениями (2.17).
- 4) Влияние торцевых условий на решение определяется эквивалентной поверхностной нагрузкой S , имеющей волновой характер и распространяющейся со скоростью сдвиговой волны.

Литература

- [1] Nigul, U.K. Regions of effective application of the methods of three-dimensional and two-dimensional analysis of transient stress waves in shells and plates / U.K.Nigul // Int. J. Solid and Structures. – 1969. – V. 5. – P. 607–627.
- [2] Коссович, Л.Ю. Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек / Л.Ю.Коссович. – Саратов: Из-во СГУ, 1986. – 176 с.
- [3] Dynamics of thin walled elastic bodies / J.D.Kaplunov [et al.]. – Academic Press, 1998. – 226 p.
- [4] Коссович, Л.Ю. Асимптотический анализ нестационарных упругих волн в тонких оболочках вращения при ударных торцевых воздействиях / Л.Ю.Коссович, Ю.Д.Каплунов // Изв. Саратовского университета. – 2001. – Т. 1. – Вып. 2. – С. 111–131.
- [5] Каплунов, Ю.Д. Асимптотическая модель для вычисления дальнего поля волны Рэлея в случае упругой полуплоскости / Ю.Д.Каплунов, Л.Ю.Коссович // ДАН РАН. – 2004. – Т. 395. – №4. – С. 482–484.
- [6] Ковалев, В.А. Дальнее поле волны Рэлея в случае упругой полуплоскости при действии торцевой нагрузки / В.А.Ковалев, Л.Ю.Коссович, О.В.Таранов // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. – 2002. – №5. – С. 89–96.
- [7] Ковалев, В.А. Расчленение нестационарного НДС цилиндрических оболочек при ударных торцевых воздействиях нормального типа / В.А.Ковалев, О.В.Таранов // V Российская конф. с международным участием "Смешанные задачи механики деформ. тела". Материалы конференции. – Саратов: Изд. СГУ, 2005. – С. 191–193.
- [8] Лурье, А.И. Пространственные задачи теории упругости / А.И.Лурье. – М.: Гостехиздат, 1955. – 491 с.

Поступила в редакцию 28/IV/2007;
в окончательном варианте — 28/IV/2007.

FAR FIELD OF THE RAYLEIGH WAVE FOR ELASTIC CYLINDRICAL SHELL UNDER END LOADING

© 2007 V.A. Kovalev³ O.V. Taranov⁴

In the paper specific features of propagation of non-stationary waves in an elastic cylindrical shell generated by shock end load of a normal type are studied. The equations for finding the solution in a vicinity of conditional front of the surface Rayleigh waves generated by the normal shock load are constructed by the aid of asymptotic method.

Paper received 28/IV/2007.

Paper accepted 28/IV/2007.

³Kovalev Vladimir Alexandrovitch (kovalev@migm.ru), Dept. of Mathematical and Informational Grounds of Management, Moscow Municipal University of Management of Moscow Government, Moscow, 107045, Russia.

⁴Taranov Oleg Victorovitch, Dept. of Theoretical Mechanics, Moscow State Industry and Informatics University, Moscow, 107475, Russia