

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ¹

© 2007 К.Е. Казаков²

При изготовлении различных механизмов и деталей машин часто используются разнообразные покрытия. В ряде случаев такие покрытия обладают неоднородными свойствами, причем эта неоднородность зависит от поверхностных координат и во многом определяет напряженно-деформированное состояние в области контакта. Другим важным и часто встречающимся случаем является взаимодействие тел с покрытиями переменной толщины, которая возникает, как правило, вследствие различных способов обработки поверхности покрытия и описывается сложной экспериментально определяемой функцией. В работе рассмотрены два указанных класса задач. Для них получены интегральные уравнения, построены их решения, проведены численные расчеты.

1. Контактные задачи для вязкоупругих оснований с неоднородными покрытиями

1.1. Плоская контактная задача

Исследуем контактное взаимодействие вязкоупругого слоя с упругим покрытием, лежащего на недеформируемом подстилающем основании, и жесткого штампа в случае плоской деформации (рис. 1). Предположим, что в поверхность неоднородного вязкоупругого слоя с покрытием начиная с момента времени τ_0 вдавлируется гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$ с эксцентриситетом ее приложения $e(t)$. Область контакта со временем не изменяется, длина линии контакта равна $2a$, а форма основания

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором А.В. Манжировым. Автор благодарит А.В. Манжирова за постановку задачи, полезные обсуждения и ценные советы. Работа выполнена при поддержке гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-1245.2006.1, Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 05-01-00002 и № 06-01-00521) и Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской академии наук (программа № 14 ОЭ).

²Казаков Кирилл Евгеньевич (kazakov@ipmnet.ru), Институт проблем механики Российской академии наук, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 101, корп. 1.

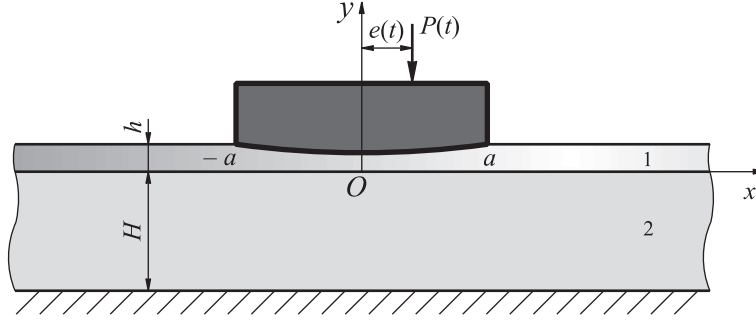


Рис. 1. Плоская контактная задача для слоя с поверхностно неоднородным покрытием

штампа задается функцией $g(x)$. Тонкое упругое покрытие постоянной толщины h ($h \ll 2a$), свойства которого зависят от продольной координаты x [3], лежит на нижнем вязкоупругом слое произвольной толщины H , изготовленном в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$ и стареющем однородно.

Для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(x, t) = -q(x, t)$, действующей на том же участке ($-a \leq x \leq a$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(x, t)$ можно записать в форме [1]:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{q(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (I - \mathcal{V}) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\ \mathcal{F} q(x, t) &= \int_{-a}^a k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) q(\xi, t) d\xi, \\ \mathcal{V} f(x, \xi, t) &= \int_{\tau_0}^t f(x, \xi, \tau) K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) d\tau, \\ K^{(2)}(t, \tau) &= E_2(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_2(\tau)} + C^{(2)}(t, \tau) \right], \end{aligned} \quad (1.1)$$

где ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации вязкоупругого слоя, I — тождественный оператор, $\mathcal{V}$ — интегральный оператор Вольтерры с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, $C^{(2)}(t, \tau)$ — мера ползучести при растяжении, $R(x)$ — функция жесткости покрытия, зависящая от условий его соединения со слоем произвольной толщины, причем в случае гладкого контакта покрытия и слоя

$$R(x) = \frac{E_1(x)}{1 - \nu_1^2(x)}, \quad (1.2)$$

а в случае идеального контакта

$$R(x) = \frac{E_1(x)[1 - \nu_1(x)]}{[1 + \nu_1(x)][1 - 2\nu_1(x)]}, \quad (1.3)$$

где $\nu_1(x)$ и $E_1(x)$ — коэффициент Пуассона и модуль Юнга неоднородного покрытия, $\mathcal{F}$ — интегральный оператор с известным ядром плоской кон-

тактной задачи $k_{\text{pl}}[(x - \xi)/H]$, которое имеет вид [2, 4]

$$k_{\text{pl}}(s) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos(su) du, \quad (1.4)$$

причем в случае гладкого контакта нижнего слоя с недеформируемым основанием

$$L(u) = \frac{\text{ch } 2u - 1}{\text{sh } 2u + 2u}, \quad (1.5)$$

а в случае идеального контакта

$$L(u) = \frac{2\kappa \text{sh } 2u - 4u}{2\kappa \text{ch } 2u + 4u^2 + 1 + \kappa^2}, \quad \kappa = 3 - 4\nu_2. \quad (1.6)$$

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани покрытия перемещению штампа как жесткого целого, с учетом (1.1) получим интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в виде

$$\frac{q(x, t)h}{R(x)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (\mathcal{I} - \mathcal{V}) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (1.7)$$

$$-a \leq x \leq a,$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа, а $\alpha(t)$ — угол его поворота.

Уравнение (1.7) дополним условиями равновесия штампа на слое

$$\int_{-a}^a q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-a}^a \xi q(\xi, t) d\xi = e(t)P(t) = M(t). \quad (1.8)$$

Сделав в (1.7) и (1.8) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \lambda = \frac{H}{a}, \quad \delta^*(t^*) = \frac{\delta(t)}{a}, \\ \alpha^*(t^*) &= \alpha(t), \quad g^*(x^*) = \frac{g(x)}{a}, \quad q^*(x^*, t^*) = \frac{2(1 - \nu_2^2)q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\ m^*(x^*) &= \frac{E_0 h}{2aR(x)(1 - \nu_2^2)}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \\ P^*(t^*) &= \frac{2P(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2M(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a^2}, \\ \mathcal{V}^* f(x^*, \xi^*, t^*) &= \int_1^{t^*} f(x^*, \xi^*, \tau^*) K_2(t^*, \tau^*) d\tau, \\ K(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0, \\ \mathcal{F}^* q^*(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) q^*(\xi^*, t^*) d\xi^*, \\ k_{\text{pl}}^*(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x - \xi}{H}\right) = \frac{1}{\pi} k_{\text{pl}}\left(\frac{x^* - \xi^*}{\lambda}\right), \end{aligned} \quad (1.9)$$

и опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)m(x)q(x, t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}) \mathcal{F} q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.10)$$

с дополнительными условиями

$$\int_{-1}^1 q(\xi, t) d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \xi q(\xi, t) d\xi = M(t). \quad (1.11)$$

В левой части полученного интегрального уравнения первый член содержит зависящее от пространственной координаты x слагаемое $m(x)q(x, t)$, а второй — $\mathcal{F}q(x, t)$, т.е. тождественный оператор действует на функцию $m(x)q(x, t)$, а оператор $\mathcal{F}$ — на функцию $q(x, t)$. Чтобы операторы действовали на одну и ту же функцию, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q(x, t) &= \sqrt{m(x)}q(x, t), & k(x, \rho) &= \frac{k_{\text{pl}}(x, \xi)}{\sqrt{m(x)}\sqrt{m(\xi)}}, \\ \mathcal{A}Q(x, t) &= \int_{-1}^1 k(x, \xi)Q(\xi, t) d\xi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Итак, интегральное уравнение (1.10) и дополнительные условия (1.11) приводятся к следующему удобному для анализа виду:

$$c(t)Q(x, t) + (I - \mathcal{V})\mathcal{A}Q(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} - \frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1.13)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (1.14)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (1.13), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (1.14).

Применение метода разделения переменных Фурье и других классических методов (например, метода ортогональных многочленов) приводит к необходимости исследования бесконечных систем интегральных уравнений Вольтерра, что вносит теоретические трудности и существенные вычислительные проблемы при решении конкретных задач. Использование обобщенного проекционного метода [8] для построения решения задач позволяет получать вместо бесконечных систем последовательности независимых интегральных уравнений Вольтерра для коэффициентов разложения контактных давлений в ряды по специальным базисам $L_2[-1, 1]$, а также выражения для осадки и угла поворота штампа.

Будем искать решение уравнения (1.13) при условиях (1.14) в классе функций, непрерывных по времени t в гильбертовом пространстве $L_2[-1, 1]$ (см., например [1, 5]). Для этого построим сначала такую ортонормированную в $L_2[-1, 1]$ систему функций, чтобы она содержала $\text{const}/\sqrt{m(x)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от x и весовой функции $1/\sqrt{m(x)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на

основании [6]

$$\int_{-1}^1 p_i(\xi)p_j(\xi) d\xi = \delta_{ij}, \quad p_n(x) = \frac{P_n(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad J_n = \int_{-1}^1 \frac{\xi^n}{m(\xi)} d\xi, \quad P_0(x) = \frac{1}{\sqrt{J_0}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-1} & J_n & \cdots & J_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_n \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_n & J_{n+1} & \cdots & J_{2n} \end{vmatrix}. \quad (1.15)$$

Отметим, что при $m(x) = \text{const}$ многочлены $p_n(x)$ являются ортонормированными полиномами Лежандра.

Заметим, что гильбертово пространство $L_2[-1, 1]$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2[-1, 1] = L_2^{(1)}[-1, 1] \oplus \oplus L_2^{(2)}[-1, 1]$, где $L_2^{(1)}[-1, 1]$ — евклидово пространство с базисом $p_0(x)$, $p_1(x)$, а $L_2^{(2)}[-1, 1]$ — гильбертово пространство с базисом $p_k(x)$ ($k = 2, \dots, \infty$). Можно также заметить, что подынтегральную функцию и правую часть можно представить в виде суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(1)}[-1, 1]$ и $L_2^{(2)}[-1, 1]$, соответственно, т.е.

$$Q(x, t) = Q_1(x, t) + Q_2(x, t), \quad f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t),$$

где

$$Q_1(x, t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x), \quad f(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} - \frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}},$$

$$f_1(x, t) = \left[\sqrt{J_0}\delta(t) + \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) - g_0 \right] p_0(x) + \left[\frac{\sqrt{J_0J_2 - J_1^2}}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) - g_1 \right] p_1(x),$$

$$f_2(x, t) = -g_2(x), \quad g(x) = \sqrt{m(x)}[g_0p_0(x) + g_1p_1(x) + g_2(x)].$$

На основании [7] можно ввести оператор ортогонального проектирования, который отображает пространство $L_2[-1, 1]$ в $L_2^{(1)}[-1, 1]$:

$$\mathcal{P}_1 f(x, t) = \int_{-1}^1 f(\xi, t) [p_0(x)p_0(\xi) + p_1(x)p_1(\xi)] d\xi.$$

Очевидно, что ортопроектор $\mathcal{P}_2 = I - \mathcal{P}_1$ переводит пространство $L_2[-1, 1]$ в $L_2^{(2)}[-1, 1]$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = I, \quad \mathcal{P}_i f(x, t) = f_i(x, t), \quad \mathcal{P}_i Q(x, t) = Q_i(x, t), \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что в представлении для $Q(x, t)$ нам известно $Q_1(x, t)$, функции разложения которого определяются дополнительными условиями (1.14):

$$z_0(t) = \frac{P(t)}{\sqrt{J_0}}, \quad z_1(t) = \frac{J_0 M(t) - J_1 P(t)}{\sqrt{J_0(J_0J_2 - J_1^2)}}, \quad (1.16)$$

а слагаемое $Q_2(x, t)$ требуется найти. Для правой части, наоборот, требуется определить $f_1(x, t)$, а $f_2(x, t)$ задано известной функцией $g(x)$, описывающей

форму основания штампа. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи, поставленной и решенной в [8].

Следуя [8], подействуем на уравнение (1.13) оператором ортогонального проектирования $\mathcal{P}_2$. В результате получим уравнение для определения $Q_2(x, t)$ с известной правой частью

$$c(t)Q_2(x, t) + (I - \mathcal{V})\mathcal{P}_2\mathcal{A}Q_2(x, t) = -g_2(x) - (I - \mathcal{V})\mathcal{P}_2\mathcal{A}Q_1(x, t). \quad (1.17)$$

Его решение можно построить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathcal{P}_2\mathcal{A}$, который, как можно показать на основании [8], является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2^{(2)}[-1, 1]$ в $L_2^{(2)}[-1, 1]$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(2)}[-1, 1]$ [7]. Спектральная задача для оператора $\mathcal{P}_2\mathcal{A}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_2\mathcal{A}\varphi_k(x) &= \gamma_k\varphi_k(x), \\ \varphi_k(x) &= \sum_{i=2}^{\infty} \varphi_i^{(k)} p_i(x), \quad k = 2, \dots, \infty, \\ k(x, \xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{mn} p_m(x) p_n(\xi), \\ \sum_{n=2}^{\infty} R_{mn} \varphi_n^{(k)} &= \gamma_k \varphi_m^{(k)}, \quad m = 2, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Представляя искомую функцию $Q_2(x, t)$ и известную функцию $f_2(x, t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\varphi_k(x)$ ($k = 2, \dots, \infty$) в $L_2^{(2)}[-1, 1]$, т.е.

$$Q_2(x, t) = \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t) \varphi_k(x), \quad f_2(x, t) = - \sum_{k=2}^{\infty} g_k \varphi_k(x),$$

и подставив эти представления в (1.17), получим, что неизвестные функции разложения $z_k(t)$ ($k = 2, \dots, \infty$) можно найти по формуле

$$\begin{aligned} z_k(t) &= -(I + \mathcal{W}_k) \frac{g_k + (I - \mathcal{V}) [z_0(t) K_k^{(0)} + z_1(t) K_k^{(1)}]}{c(t) + \gamma_k}, \\ K_k^{(0)} &= \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n} \varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n} \varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, \dots, \infty, \\ \mathcal{W}_k f(r, t) &= \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(r, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, \dots, \infty$) — резольвента ядра

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{\gamma_k K(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

Следует отметить, что полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0(t) P_0(x) + z_1(t) P_1(x) + \dots \right],$$

т.е. удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$, а значит, и связанную с ней заменой (1.9) функцию жесткости покрытия $R(x)$. Решение такого вида позволяет производить аналитические вычисления для оснований с покрытиями, имеющих неоднородности, которые описываются быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Этого невозможно добиться другими известными методами.

Полностью определив напряжения под штампом, можно найти и неизвестные осадку и угол поворота штампа. Для этого подействуем оператором $\mathcal{P}_1$ на уравнение (1.13):

$$\begin{aligned} c(t)\mathcal{P}_1 Q_1(x, t) + (I - \mathcal{V})\mathcal{P}_1 \mathcal{A}Q(x, t) = \\ = \left[\sqrt{J_0}\delta(t) + \frac{J_1}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) - g_0 \right] p_0(x) + \left[\frac{\sqrt{J_0 J_2 - J_1^2}}{\sqrt{J_0}}\alpha(t) - g_1 \right] p_1(x). \end{aligned}$$

Полученное равенство непосредственно дает формулы для угла поворота $\alpha(t)$ и осадки $\delta(t)$:

$$\begin{aligned} \alpha(t) = \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ g_1 + c(t)z_1(t) + \right. \\ \left. + (I - \mathcal{V}) \left[R_{10}z_0(t) + R_{11}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)} z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + g_0 + c(t)z_0(t) + \right. \\ \left. + (I - \mathcal{V}) \left[R_{00}z_0(t) + R_{01}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)} z_k(t) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Следует отметить, что в вид зависимости угла поворота штампа от времени вносит значительный вклад наличие неоднородности покрытия. Даже если основание штампа симметрично и нагрузка приложена центрально, неоднородное покрытие способно вызвать перекося штампа, причем, если основание вязкоупругое, этот перекося будет меняться с течением времени.

Таким образом, построено аналитическое решение (в рядах с любой наперед заданной точностью) плоской контактной задачи для вязкоупругого слоя с тонким неоднородным покрытием.

1.2. Осесимметричная контактная задача

Исследуем контактное взаимодействие вязкоупругого слоя с упругим покрытием, лежащего на недеформируемом подстилающем основании, и жесткого кольцевого штампа в осесимметричном случае (рис. 2). Предположим, что в поверхность неоднородного вязкоупругого слоя с покрытием начиная с момента времени t_0 вдавливается кольцевой гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$, приложенной по его оси. Область контакта со временем не изменяется и ограничена окружностями радиусов a и b ($a < b$), а форма основания штампа задается функцией $g(r)$. Упругое покрытие толщины h ($h \ll (b - a)$),

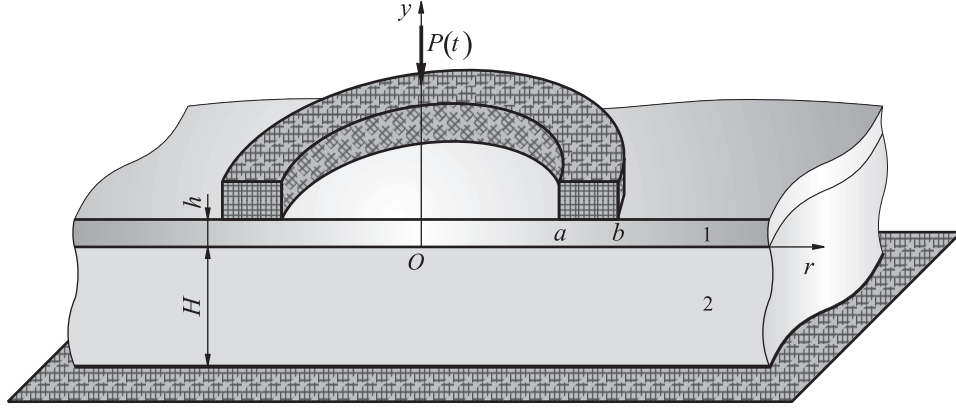


Рис. 2. Осесимметричная контактная задача для слоя с поверхностно неоднородным покрытием

свойства которого зависят от радиальной координаты r [3], лежит на нижнем вязкоупругом стареющем слое произвольной толщины H , изготовленном в момент времени τ_2 и стареющем однородно.

Как и прежде, для вывода интегрального уравнения задачи заменим штамп некоторой распределенной нагрузкой $p(r, t) = -q(r, t)$, действующей на том же участке ($a \leq r \leq b$) и равной нулю вне его. Вертикальное перемещение верхней грани описанного выше слоя под действием нормальной нагрузки $q(r, t)$ можно записать в форме

$$\begin{aligned} u_z(r, t) &= \frac{q(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(I - \mathcal{V})\mathcal{D}\frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\ \mathcal{D}q(r, t) &= \int_a^b k_{as}\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right)q(\rho, t)\rho d\rho, \\ \mathcal{V}f(r, \rho, t) &= \int_{\tau_0}^t f(r, \rho, \tau)K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) d\tau, \\ K^{(2)}(t, \tau) &= E_2(\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\frac{1}{E_2(\tau)} + C^{(2)}(t, \tau)\right], \end{aligned} \quad (1.19)$$

где, как и в плоском случае, ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации вязкоупругого слоя, I — тождественный оператор, $\mathcal{V}$ — интегральный оператор Вольтерры с ядром ползучести при растяжении $K^{(2)}(t, \tau)$, $C^{(2)}(t, \tau)$ — мера ползучести при растяжении, $R(r)$ — функция жесткости покрытия, которая в зависимости от условий на его нижней грани вычисляется либо по формуле (1.2), либо по формуле (1.3), $\mathcal{D}$ — интегральный оператор с известным ядром осесимметричной контактной задачи $k_{as}(r/H, \rho/H)$, которое имеет вид [2, 4]

$$k_{as}(r, \rho) = \int_0^{+\infty} L(u)J_0(ru)J_0(\rho u) du, \quad (1.20)$$

где $J_0(s)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Аналогично

плоскому случаю, в зависимости от условий на нижней грани основания, функция $L(u)$ определяется либо по формуле (1.5), либо по (1.6).

Приравнивая вертикальные перемещения верхней грани слоя перемещению штампа как жесткого целого с учетом (1.19) получим разрешающее интегральное уравнение исследуемой контактной задачи в виде

$$\frac{q(r, t)h}{R(r)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(I - \mathcal{V})\mathcal{D}\frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)} = \delta(t) - g(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (1.21)$$

где $\delta(t)$ — осадка штампа.

Уравнение (1.21) дополним условием равновесия штампа на слое

$$2\pi \int_a^b q(\rho, t)\rho d\rho = P(t). \quad (1.22)$$

Сделаем в (1.21), (1.22) замену переменных по формулам

$$\begin{aligned} (r^*)^2 &= \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad (\rho^*)^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \\ \lambda &= \frac{H}{b - a}, \quad \eta = \frac{a}{b - a}, \quad \xi^2 = \frac{b + a}{b - a}, \quad \delta^*(t^*) = \frac{\delta(t)}{b - a}, \quad g^*(r^*) = \frac{g(r)}{b - a}, \\ q^*(r^*, t^*) &= \frac{2(1 - \nu_2^2)q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad m^*(r^*) = \frac{E_0 h}{2(b - a)R(r)(1 - \nu_2^2)}, \\ c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{E_0}, \quad P^*(t^*) = \frac{2P(t)(1 - \nu_2^2)}{\pi E_2(t - \tau_2)(b^2 - a^2)}, \\ \mathcal{V}^* f(r^*, \rho^*, t^*) &= \int_1^{r^*} f(r^*, \rho^*, \tau^*) K_2(t^*, \tau^*) d\tau, \\ K(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2)\tau_0, \\ \mathcal{D}^* q^*(r^*, t^*) &= \int_0^1 k_{as}^*(r^*, \rho^*) q^*(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*, \\ k_{as}^*(r^*, \rho^*) &= \frac{\xi^2}{\lambda} k_{as} \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} \right] = \frac{b + a}{H} k_{as} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right), \end{aligned} \quad (1.23)$$

и опустив в полученных соотношениях звездочки, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)m(r)q(r, t) + (I - \mathcal{V})\mathcal{D}q(r, t) = \delta(t) - g(r), \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (1.24)$$

с дополнительным условием

$$\int_0^1 q(\rho, t)\rho d\rho = P(t). \quad (1.25)$$

С теми же целями, что и в плоском случае, введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} Q(r, t) &= \sqrt{m(r)}q(r, t), \quad k(r, \rho) = \frac{k_{as}(r, \rho)}{\sqrt{m(r)}\sqrt{m(\rho)}}, \\ \mathcal{B}f(r, t) &= \int_0^1 k(r, \rho)f(\rho, t)\rho d\rho. \end{aligned} \quad (1.26)$$

В результате интегральное уравнение (1.24) и дополнительное условие (1.25) приводятся к следующему удобному для анализа виду:

$$c(t)Q(r, t) + (I - \mathcal{V})\mathcal{B}Q(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad (1.27)$$

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = P(t). \quad (1.28)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (1.27), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительное условие (1.28).

Как и для случая плоской деформации применим обобщенный проекционный метод (отличие состоит в том, что в данной постановке на одну степень свободы меньше).

Решение уравнения (1.27) при условии (1.28) будем искать в классе, функций непрерывных по времени t в $L_2(0, 1)$ (см., например [1, 5]). Для этого построим сначала такую ортонормированную в $L_2(0, 1)$ систему функций, чтобы она содержала $\text{const}/\sqrt{m(r)}$, а остальные функции базиса можно было представить в виде произведения функций, зависящих от r и весовой функции $1/\sqrt{m(r)}$. Система функций, удовлетворяющая оговоренным выше условиям, может быть построена на основании [6]

$$\int_0^1 p_i^\circ(\rho) p_j^\circ(\rho) \rho d\rho = \delta_{ij}, \quad p_n^\circ(r) = \frac{P_n^\circ(r)}{\sqrt{m(r)}}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{\rho^{2n+1}}{m(\rho)} d\rho, \quad P_0^\circ(x) = \frac{1}{\sqrt{I_0}},$$

$$P_n^\circ(r) = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \begin{vmatrix} I_0 & I_1 & \cdots & I_n \\ I_1 & I_2 & \cdots & I_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_{n-1} & I_n & \cdots & I_{2n-1} \\ 1 & r^2 & \cdots & r^{2n} \end{vmatrix}, \quad D_n = \begin{vmatrix} I_0 & I_1 & \cdots & I_n \\ I_1 & I_2 & \cdots & I_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_n & I_{n+1} & \cdots & I_{2n} \end{vmatrix}. \quad (1.29)$$

Заметим, что гильбертово пространство $L_2(0, 1)$ можно представить в виде прямой суммы ортогональных подпространств $L_2(0, 1) = L_2^{(0)}(0, 1) \oplus L_2^{(1)}(0, 1)$, где $L_2^{(0)}(0, 1)$ — евклидово пространство с единственной базисной функцией $p_0^\circ(r)$, а $L_2^{(1)}(0, 1)$ — гильбертово пространство с базисом $p_k^\circ(r)$ ($k = 1, \dots, \infty$). Можно также заметить, что подынтегральную функцию и правую часть можно представить в виде суммы функций, непрерывных по времени t в $L_2^{(0)}(0, 1)$ и $L_2^{(1)}(0, 1)$, соответственно, т.е.

$$Q(r, t) = Q_0(r, t) + Q_1(r, t), \quad f(r, t) = f_0(r, t) + f_1(r, t),$$

где

$$Q_0(r, t) = v_0(t) p_0^\circ(r), \quad f(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}},$$

$$f_0(r, t) = [\sqrt{I_0} \delta(t) - g_0] p_0^\circ(r),$$

$$f_1(r, t) = -g_1(r), \quad g(r) = \sqrt{m(r)} [g_0 p_0^\circ(r) + g_1(r)].$$

Аналогично проделанному для плоских задач введем оператор ортогонального проектирования $L_2(0, 1)$ в $L_2^{(0)}(0, 1)$

$$\mathcal{P}_0 f(r, t) = \int_0^1 f(\rho, t) p_0^\circ(r) p_0^\circ(\rho) \rho d\rho,$$

Очевидно, что оператор $\mathcal{P}_1 = I - \mathcal{P}_0$ проектирует пространство $L_2(0, 1)$ в $L_2^{(1)}(0, 1)$. Кроме того, имеют место следующие соотношения:

$$\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 = I, \quad \mathcal{P}_i f(r, t) = f_i(r, t), \quad \mathcal{P}_i Q(r, t) = Q_i(r, t), \quad i = 0, 1.$$

Заметим, что в представлении для $Q(r, t)$ нам известно $Q_0(r, t)$, которое определяется дополнительным условием (1.28) ($v_0(t) = P(t)/\sqrt{I_0}$), а $Q_1(r, t)$ требуется найти. Для правой части необходимо определить $f_0(r, t)$, а $f_1(r, t)$ задано функцией основания штампа. Отмеченные особенности позволяют классифицировать полученную в итоге задачу как частный случай обобщенной проекционной задачи [8].

Поддействуем на уравнение (1.27) оператором ортогонального проектирования $\mathcal{P}_1$, тогда получим уравнение для определения $Q_1(r, t)$ с известной правой частью

$$c(t)Q_1(r, t) + (I - \mathcal{V})\mathcal{P}_1\mathcal{B}Q_1(r, t) = -g_1(r) - (I - \mathcal{V})\mathcal{P}_1\mathcal{B}Q_0(r, t). \quad (1.30)$$

Его решение можно построить в виде ряда по собственным функциям оператора $\mathcal{P}_1\mathcal{B}$, который, как можно показать на основании [8], является вполне непрерывным, самосопряженным и сильно положительным оператором из $L_2^{(1)}(0, 1)$ в $L_2^{(1)}(0, 1)$. Система собственных функций такого оператора составляет базис пространства $L_2^{(1)}(0, 1)$ [7]. Спектральная задача для оператора $\mathcal{P}_1\mathcal{B}$ может быть записана в форме

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1\mathcal{B}\psi_k(r) &= \beta_k\psi_k(r), \\ \psi_k(r) &= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i^{(k)} p_i^\circ(r), \quad k = 1, \dots, \infty, \\ k(r, \rho) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} T_{mn} p_m^\circ(r) p_n^\circ(\rho), \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} \psi_n^{(k)} &= \beta_k \psi_m^{(k)}, \quad m = 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Представляя искомую функцию $Q_2(r, t)$ и известную функцию $f_1(r, t)$ в виде разложения по новым базисным функциям $\psi_k(r)$ ($k = 1, \dots, \infty$) в $L_2^{(1)}(0, 1)$, т.е.

$$Q_1(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \psi_k(r), \quad f_1(r, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} g_k \psi_k(r),$$

и подставив эти представления в (1.30), получим, что неизвестные функции

разложения $v_k(t)$ ($k = 1, \dots, \infty$) можно найти по формуле

$$\begin{aligned} v_k(t) &= -(I + \mathcal{Y}_k) \frac{g_k + (I - \mathcal{V})v_0(t)K_k}{c(t) + \beta_k}, \\ K_k &= \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n} \psi_n^{(k)}, \quad k = 1, \dots, \infty, \\ \mathcal{Y}_k f(r, t) &= \int_1^t R_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где $R_k^\circ(t, \tau)$ ($k = 1, \dots, \infty$) — резольвента ядра

$$K_k^\circ(t, \tau) = \frac{\beta_k K(t, \tau)}{c(t) + \beta_k}.$$

Как и в плоском случае, полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(r, t) = \frac{1}{m(r)} \left[v_0(t) P_0^\circ(r) + \dots \right],$$

т.е. удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(r)$, а значит и связанную с ней заменой (1.23) функцию жесткости покрытия $R(r)$.

Теперь, отыскав $Q_1(r, t)$, подействуем оператором $\mathcal{P}_0$ на уравнение (1.27):

$$c(t) \mathcal{P}_0 Q_0(r, t) + (I - \mathcal{V}) \mathcal{P}_0 \mathcal{B} Q(r, t) = \left[\sqrt{I_0} \delta(t) - g_0 \right] p_0^\circ(r).$$

Откуда получим формулу для осадки штампа

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ g_0 + c(t) v_0(t) + (I - \mathcal{V}) \left[T_{00} v_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k v_k(t) \right] \right\}.$$

Таким образом, получено аналитическое решение осесимметричной контактной задачи о взаимодействии жесткого кольцевого штампа с вязкоупругим стареющим слоем при наличии поверхностно неоднородного упругого покрытия.

1.3. Численный пример

В качестве примера рассмотрим осесимметричную задачу для основания, изготовленного из одного материала — бетона. Гладкий плоский ($g(r) \equiv 0$) штамп вдавливается с постоянной единичной силой ($P(t) \equiv 1$) в вязкоупругий слой с неоднородным упругим покрытием, функция $m(r)$ которого имеет вид

$$m(r) = 0,5 + \frac{r}{20} \cos(100r).$$

Между слоем и подстилающим недеформируемым основанием осуществляется гладкий контакт. Об условиях соединения слоев в данном случае можно не оговариваться, т.к. функция $m(r)$, а следовательно и жесткость покрытия, заданы принудительно. Безразмерные параметры $\lambda = 2$, $\eta = 3$,

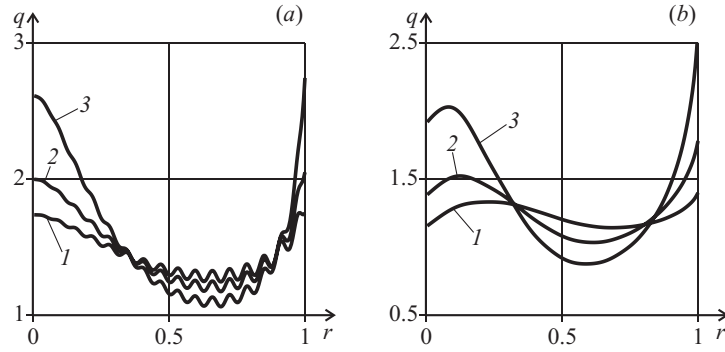


Рис. 3. Влияние неоднородности на распределение нормальной нагрузки под штампом в начальный момент времени (кривая 1), при $t = 10$ (кривая 2) и при $t \rightarrow \infty$ (кривая 3)

$\xi^2 = 7$. Поскольку изменение модуля упругомгновенной деформации бетона в процессе старения несущественно, то будем полагать его постоянным, т.е. $E_2(t - \tau_2) = E_2 = \text{const}$. Без ограничения общности положим, что вязкоупругий слой изготовлен в нулевой момент времени ($\tau_2^* = 0$). Зададимся следующей функцией меры ползучести и параметрами, входящих в ее состав

$$C^{(2)}(t, \tau) = (C_0 + A_0 e^{-\chi \tau})[1 - e^{-\psi(t-\tau)}],$$

$$A_0 E_2 = 4, \quad C_0 E_2 = 0,5522, \quad \chi \tau_0 = 0,1, \quad \psi \tau_0 = 0,6.$$

Отметим, что при таких параметрах старение является искусственным. На рис. 3, а показаны графики зависимостей нормальной нагрузки от радиальной координаты в различные моменты времени. Видно, что уже в начальный момент $t = 1$ (кривая 1) решение улавливает все особенности функции $m(r)$. Со временем, т.к. старение искусственное, концы кривой начинают задираться, однако влияние неоднородности покрытия прослеживается на всех кривых при любых моментах времени (кривая 2 — $t = 10$, кривая 3 — установившееся распределение).

Однако не следует считать, что неоднородность всего лишь "накладывается" на график распределения нормальной нагрузки. На рис. 3, б показано влияние неоднородности, определяемой функцией

$$m(r) = 0,25 + 1,8(r - 0,5)^2,$$

при прочих одинаковых, по сравнению с предыдущим примером, условиях. Видно, что зависимость распределения нормальной нагрузки от времени отнюдь не такая простая, как могло показаться в первом примере. Отметим, что такая неоднородность качественно изменила график распределения нормальной нагрузки.

Аналогичная ситуация будет возникать и в плоском случае. Но тогда появляется угол поворота штампа, для которого принципиально наличие или отсутствие неоднородности.

2. Контактные задачи для вязкоупругих оснований с покрытиями переменной толщины

2.1. Плоская контактная задача

Рассмотрим теперь контактное взаимодействие вязкоупругого слоя с вязкоупругим покрытием, лежащего на недеформируемом подстилающем основании, и жесткого штампа в случае плоской деформации (рис. 4). Предположим, что в поверхность неоднородного вязкоупругого слоя с покрытием начиная с момента времени τ_0 вдавлируется гладкий жесткий штамп с силой $P(t)$ с эксцентриситетом ее приложения $e(t)$. Область контакта со временем не изменяется, длина линии контакта равна $2a$, а форма основания штампа задается функцией $g(x)$. Тонкое вязкоупругое покрытие переменной толщины $h(x)$ ($h(x) \ll 2a$), изготовленное в момент времени $\tau_1 \leq \tau_0$ и стареющее однородно, лежит на нижнем вязкоупругом слое произвольной толщины H , изготовленном в момент времени $\tau_2 \leq \tau_0$ и стареющем однородно.

Выводя интегральное уравнение задачи аналогично тому, как это было проделано в пункте 1.1, можно получить ($-a \leq x \leq a$)

$$\begin{aligned} k_v(I - \mathcal{V}_1) \frac{q(x, t)h(x)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{\pi} (I - \mathcal{V}_2) \mathcal{F} \frac{q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)} &= \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad (2.1) \\ \mathcal{F} q(x, t) &= \int_{-a}^a k_{pl} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) q(\xi, t) d\xi, \\ \mathcal{V}_k f(x, \xi, t) &= \int_{\tau_0}^t f(x, \xi, \tau) K^{(k)}(t - \tau_k, \tau - \tau_k) d\tau, \quad k = 1, 2, \\ K^{(k)}(t, \tau) &= E_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_k(\tau)} + C^{(k)}(t, \tau) \right], \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

где ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя, $E_1(t - \tau_1)$ — модуль упругомгновенной деформации покрытия, I — тождественный оператор, $\mathcal{V}_k$ — интегральные операторы Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$), $C^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$) — меры ползучести при растяжении, k_v — коэффициент, зависящий от условий соединения покрытия со слоем произвольной толщины, причем в случае гладкого контакта покрытия и слоя

$$k_v = 1 - \nu_1^2, \quad (2.2)$$

а в случае идеального контакта

$$k_v = \frac{(1 + \nu_1)(1 - 2\nu_1)}{1 - \nu_1}, \quad (2.3)$$

где ν_1 — коэффициент Пуассона покрытия, $\mathcal{F}$ — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{pl}[(x - \xi)/H]$, которое имеет вид [2, 4] (1.4), $\delta(t)$ и $\alpha(t)$ — осадка и угол поворота штампа. Уравнения равновесия штампа на слое совпадают с уравнениями (1.8).

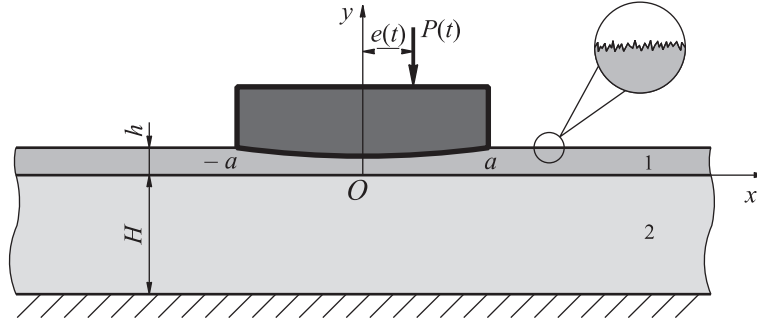


Рис. 4. Плоская контактная задача для слоя с покрытием переменной толщины

Произведя в интегральном уравнении (2.1) и дополнительных условиях (1.8) замену переменных по формулам (k_m и k_P в них — безразмерные масштабные коэффициенты, которые вводятся исключительно для улучшения вида функций $c^*(t^*)$, $m^*(x^*)$ и $P^*(t^*)$)

$$\begin{aligned}
 x^* &= \frac{x}{a}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{a}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \\
 \lambda &= \frac{H}{a}, \quad \delta^*(t^*) = k_P \frac{\delta(t)}{a}, \quad \alpha^*(t^*) = k_P \alpha(t), \quad g^*(x^*) = k_P \frac{g(x)}{a}, \\
 q^*(x^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - \nu_2^2)q(x, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \\
 m^*(x^*) &= \frac{k_m k_\nu}{1 - \nu_2^2} \frac{h(x)}{2a}, \quad c^*(t^*) = \frac{E_2(t - \tau_2)}{k_m E_1(t - \tau_1)}, \\
 P^*(t^*) &= \frac{2k_P P(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a}, \quad M^*(t^*) = \frac{2k_P M(t)(1 - \nu_2^2)}{E_2(t - \tau_2)a^2}, \\
 \mathcal{V}_k^* f(x^*, \xi^*, t^*) &= \int_1^{t^*} f(x^*, \xi^*, \tau^*) K_k(t^*, \tau^*) d\tau, \quad k = 1, 2, \\
 K_1(t^*, \tau^*) &= \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_2)}{E_2(t - \tau_2)} K^{(1)}(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \tau_0, \\
 K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0, \\
 \mathcal{F}^* q^*(x^*, t^*) &= \int_{-1}^1 k_{pl}^*(x^*, \xi^*) q^*(\xi^*, t^*) d\xi^*, \\
 k_{pl}^*(x^*, \xi^*) &= \frac{1}{\pi} k_{pl} \left(\frac{x - \xi}{H} \right) = \frac{1}{\pi} k_{pl} \left(\frac{x^* - \xi^*}{\lambda} \right)
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

и опустив звездочки в полученных соотношениях, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)m(x)(I - \mathcal{V}_1)q(x, t) + (I - \mathcal{V}_2)\mathcal{F}q(x, t) = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \tag{2.5}$$

$$-1 \leq x \leq 1,$$

с дополнительными условиями (1.11). Введя обозначения (1.12), интегральное уравнение (2.5) и дополнительные условия (1.11) преобразуются к сле-

дующему удобному для анализа виду

$$c(t)(I - \mathcal{V}_1)Q(x, t) + (I - \mathcal{V}_2)\mathcal{A}Q(x, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(x)}} + \frac{\alpha(t)x}{\sqrt{m(x)}} - \frac{g(x)}{\sqrt{m(x)}}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2.6)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} d\xi = P(t), \quad \int_{-1}^1 \frac{Q(\xi, t)}{\sqrt{m(\xi)}} \xi d\xi = M(t). \quad (2.7)$$

Таким образом мы получили разрешающее двумерное интегральное уравнение (2.6), содержащее интегральные операторы как с постоянными, так и с переменными пределами интегрирования, а также дополнительные условия (2.7).

Процедура решения этой задачи аналогично процедуре, проделанной в разделе 1.1. Выпишем лишь окончательные результаты:

$$Q(x, t) = z_0(t)p_0(x) + z_1(t)p_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(t)\varphi_k(x),$$

где многочлены $p_0(x)$, $p_1(x)$ находятся из соотношений (1.15), собственные функции $\varphi_k(x)$, необходимые параметры γ_k , $\varphi_n^{(k)}$ ($k = 2, \dots, \infty$) и коэффициенты R_{mn} — из (1.18), функции разложения $z_0(t)$ и $z_1(t)$ — из (1.16), а оставшиеся функции $z_k(t)$ ($k = 2, \dots, \infty$) можно найти по формулам

$$z_k(t) = -(I + \mathcal{W}_k) \frac{g_k + (I - \mathcal{V}_2)[z_0(t)K_k^{(0)} + z_1(t)K_k^{(1)}]}{c(t) + \gamma_k},$$

$$K_k^{(0)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{0n}\varphi_n^{(k)}, \quad K_k^{(1)} = \sum_{n=2}^{\infty} R_{1n}\varphi_n^{(k)}, \quad k = 2, \dots, \infty,$$

$$\mathcal{W}_k f(r, t) = \int_1^t R_k^*(t, \tau) f(r, \tau) d\tau.$$

Здесь $R_k^*(t, \tau)$ ($k = 2, \dots, \infty$) — резольвента ядра

$$K_k^*(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \gamma_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \gamma_k}.$$

Как и ранее, полученное решение имеет следующую структуру:

$$q(x, t) = \frac{1}{m(x)} \left[z_0(t)P_0(x) + z_1(t)P_1(x) + \dots \right],$$

т.е. удастся выделить в решении в явном виде весовую функцию $m(x)$, а значит, и связанную с ней заменой (2.4) толщину покрытия $h(x)$. Это дает возможность вести расчеты для покрытий, имеющих реальный профиль поверхности, который описывается зачастую сильноосциллирующими функциями.

Определив напряжения под штампом, можно найти и неизвестные осад-

ку и угол поворота штампа

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \sqrt{\frac{J_0}{J_0 J_2 - J_1^2}} \left\{ g_1 + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_1(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{10}z_0(t) + R_{11}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(1)} z_k(t) \right] \right\}, \\ \delta(t) &= \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ -\alpha(t) \frac{J_1}{\sqrt{J_0}} + g_0 + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)z_0(t) + \right. \\ &\quad \left. + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00}z_0(t) + R_{01}z_1(t) + \sum_{k=2}^{\infty} K_k^{(0)} z_k(t) \right] \right\}.\end{aligned}$$

2.2. Осесимметричная контактная задача

Постановка осесимметричной контактной задачи для вязкоупругого слоя с покрытием переменной толщины аналогична постановке плоской задачи. Запишем сразу интегральное уравнение ($a \leq r \leq b$):

$$\begin{aligned}k_v(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1) \frac{q(r, t)h(r)}{E_1(t - \tau_1)} + \frac{2(1 - \nu_2^2)}{H}(\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \mathcal{D} \frac{q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)} &= \delta(t) - g(r), \\ \mathcal{D} q(r, t) &= \int_{-a}^a k_{as}\left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H}\right) q(\rho, t) \rho d\rho, \\ \mathcal{V}_k f(x, \xi, t) &= \int_{\tau_0}^t f(x, \xi, \tau) K^{(k)}(t - \tau_k, \tau - \tau_k) d\tau, \quad k = 1, 2, \\ K^{(k)}(t, \tau) &= E_k(\tau) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_k(\tau)} + C^{(k)}(t, \tau) \right], \quad k = 1, 2,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где ν_2 и $E_2(t - \tau_2)$ — коэффициент Пуассона и модуль упругомгновенной деформации нижнего слоя, $E_1(t - \tau_1)$ — модуль упругомгновенной деформации покрытия, $\mathcal{I}$ — тождественный оператор, $\mathcal{V}_k$ — интегральные операторы Вольтерра с ядром ползучести при растяжении $K^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$), $C^{(k)}(t, \tau)$ ($k = 1, 2$) — меры ползучести при растяжении, k_v — коэффициент, который в зависимости от условий соединения покрытия и нижнего слоя вычисляется либо по формуле (2.2), либо по формуле (2.3), $\mathcal{D}$ — интегральный оператор с известным ядром плоской контактной задачи $k_{as}(r/H, \rho/H)$, которое имеет вид [2, 4] (1.20), $\delta(t)$ — осадка и угол поворота штампа. Уравнения равновесия штампа на слое совпадают с уравнениями (1.22).

Сделав в интегральном уравнении (2.8) и дополнительном условии (1.22) замену переменных по формулам (как и в плоском случае, k_m и k_p в них — безразмерные масштабные коэффициенты, которые вводятся ис-

ключительно для улучшения вида функций $c^*(t^*)$, $m^*(x^*)$ и $P^*(t^*)$)

$$\begin{aligned}
 (r^*)^2 &= \frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad (\rho^*)^2 = \frac{\rho^2 - a^2}{b^2 - a^2}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_0}, \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_1^* = \frac{\tau_1}{\tau_0}, \quad \tau_2^* = \frac{\tau_2}{\tau_0}, \\
 \lambda &= \frac{H}{b-a}, \quad \eta = \frac{a}{b-a}, \quad \xi^2 = \frac{b+a}{b-a}, \quad \delta^*(t^*) = k_P \frac{\delta(t)}{b-a}, \quad g^*(r^*) = k_P \frac{g(r)}{b-a}, \\
 q^*(r^*, t^*) &= \frac{2k_P(1 - v_2^2)q(r, t)}{E_2(t - \tau_2)}, \quad m^*(r^*) = \frac{k_m k_v}{1 - v_2^2} \frac{h(r)}{2(b-a)}, \\
 c^*(t^*) &= \frac{E_2(t - \tau_2)}{k_m E_1(t - \tau_1)}, \quad P^*(t^*) = \frac{2k_P P(t)(1 - v_2^2)}{\pi E_2(t - \tau_2)(b^2 - a^2)}, \\
 \mathcal{V}_k^* f(x^*, \xi^*, t^*) &= \int_1^{t^*} f(x^*, \xi^*, \tau^*) K_k(t^*, \tau^*) d\tau, \quad k = 1, 2, \\
 K_1(t^*, \tau^*) &= \frac{E_1(t - \tau_1)}{E_1(\tau - \tau_1)} \frac{E_2(\tau - \tau_2)}{E_2(t - \tau_2)} K^{(1)}(t - \tau_1, \tau - \tau_1) \tau_0, \\
 K_2(t^*, \tau^*) &= K^{(2)}(t - \tau_2, \tau - \tau_2) \tau_0, \\
 \mathcal{D}^* q^*(r^*, t^*) &= \int_0^1 k_{as}^*(r^*, \rho^*) q^*(\rho^*, t^*) \rho^* d\rho^*, \\
 k_{as}^*(r^*, \rho^*) &= \frac{\xi^2}{\lambda} k_{as} \left[\frac{\sqrt{(r^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda}, \frac{\sqrt{(\rho^*)^2 \xi^2 + \eta^2}}{\lambda} \right] = \frac{b+a}{H} k_{as} \left(\frac{r}{H}, \frac{\rho}{H} \right)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

и опустив звездочки в полученных соотношениях, получим смешанное интегральное уравнение в виде

$$c(t)m(r)(I - \mathcal{V}_1)q(x, t) + (I - \mathcal{V}_2)\mathcal{D}q(r, t) = \delta(t) - g(r), \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{2.10}$$

с дополнительным условием (1.25). Введя обозначения (1.26), интегральное уравнение (2.10) и дополнительное условие (1.25) преобразуются к следующему удобному для анализа виду:

$$c(t)(I - \mathcal{V}_1)Q(r, t) + (I - \mathcal{V}_2)\mathcal{B}Q(r, t) = \frac{\delta(t)}{\sqrt{m(r)}} - \frac{g(r)}{\sqrt{m(r)}}, \quad 0 \leq r \leq 1, \tag{2.11}$$

$$\int_0^1 \frac{Q(\rho, t)}{\sqrt{m(\rho)}} \rho d\rho = P(t). \tag{2.12}$$

Не останавливаясь на выкладках, аналогичных тем, что были уже проделаны, выпишем решение интегрального уравнения (2.11) при дополнительном условии (2.12):

$$Q(r, t) = v_0(t)p_0^\circ(r) + \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\psi_k(x),$$

где многочлен $p_0^\circ(x)$ находится из соотношений (1.29), собственные функции $\psi_k(x)$, необходимые параметры β_k , $\psi_n^{(k)}$ ($k = 1, \dots, \infty$) и коэффициенты T_{mn} — из (1.31), функция $v_0(t)$ — из дополнительного условия (2.12) ($v_0(t) = P(t)/\sqrt{I_0}$), а оставшиеся функции разложения $v_k(t)$ ($k = 1, \dots, \infty$) можно

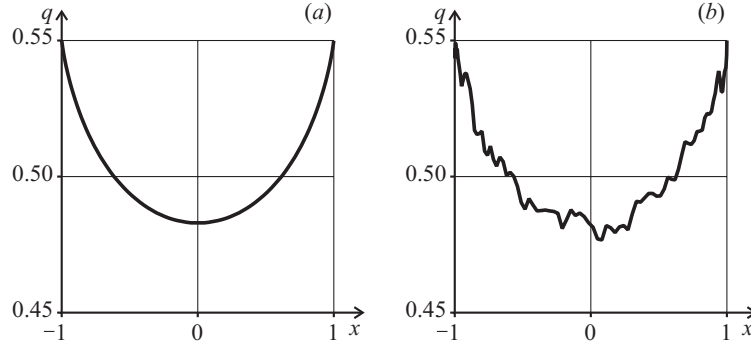


Рис. 5. Влияние реальной формы поверхности на контактные напряжения

найти по формулам

$$v_k(t) = -(\mathcal{I} + \mathcal{Y}_k) \frac{g_k + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2)v_0(t)K_k}{c(t) + \beta_k},$$

$$K_k = \sum_{n=1}^{\infty} T_{0n} \Psi_n^{(k)}, \quad k = 1, \dots, \infty,$$

$$\mathcal{W}_k f(r, t) = \int_1^r R_k^\circ(t, \tau) f(r, \tau) d\tau.$$

Здесь $R_k^\circ(t, \tau)$ ($k = 1, \dots, \infty$) — резольвента ядра

$$K_k^\circ(t, \tau) = \frac{c(t)K_1(t, \tau) + \beta_k K_2(t, \tau)}{c(t) + \beta_k}.$$

Определив напряжения под штампом, можно найти и осадку

$$\delta(t) = \frac{1}{\sqrt{J_0}} \left\{ g_0 + c(t)(\mathcal{I} - \mathcal{V}_1)v_0(t) + (\mathcal{I} - \mathcal{V}_2) \left[R_{00}v_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} K_k v_k(t) \right] \right\}.$$

На рис. 5, *a* изображено распределение контактных напряжений (плоская деформация) в начальный момент времени в случае, когда в основание с покрытием постоянной толщины h_0 вдавливается плоский жесткий штамп, на который действует центрально приложенная сила. Если же покрытие имеет реальную форму поверхности, т.е. $h(x) = h_0 + \Delta h(x)$, то это значительно скажется на решении (рис. 5, *b*).

Следует отметить, что на вид графика осадки штампа переменная высота практически не влияет. Несимметричность функции $h(x)$ может вызвать перекос штампа, даже если нагрузка приложена центрально, а штамп симметричен ($g(x) = g(-x)$).

Выводы

Для тел с поверхностно неоднородными покрытиями сформулированы плоская и осесимметричная задачи. На основании обобщенного проекционного метода получены их аналитические решения (в рядах). В решении

удается выявить тонкую структуру, так как функция жесткости покрытия представлена в нем в явном виде. Это позволяет производить аналитические вычисления для оснований, чьи функции жесткости описываются быстро осциллирующими и даже разрывными функциями. Показано, что наличие неоднородности может качественно изменить распределение нормальной нагрузки под штампом. Также получены аналитические выражения для осадки и угла поворота штампа. Отмечено, что в плоском случае даже при симметричности штампа и центральности нагрузки неоднородное покрытие способно вызвать перекося штампа, который, в случае вязкоупругого основания, будет меняться с течением времени.

В работе также были найдены аналитические решения контактных задач для тел с покрытиями, имеющими реальную форму поверхности. Как и в случае с неоднородными покрытиями, переменная высота штампа способна сильно отразиться на решении, в частности, повлиять на вид распределения нормальной нагрузки под штампом, а также, в плоском случае вызвать поворот штампа при остальных симметричных параметрах задачи.

Литература

- [1] Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории ползучести / Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
- [2] Александров, В.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками / В.М. Александров, С.М. Мхитарян. – М.: Наука, 1983. – 488 с.
- [3] Манжиров, А.В. Износ поверхностно неоднородного шероховатого упругого слоя кольцевым штампом / А.В. Манжиров // Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием, 13–16 октября 2003 г., г. Ростов-на-Дону, г. Азов, Россия. – Ростов-н/Д: Новая книга, 2004. – С. 260–264.
- [4] Ворович, И.И. Неклассические смешанные задачи теории упругости / И.И. Ворович, В.М. Александров, В.А. Бабешко. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
- [5] Владимиров, В.С. Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
- [6] Сегё, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. – М.: Физматлит, 1962. – 500 с.
- [7] Колмагоров, А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмагоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 496 с.

- [8] Манжиров, А.В. Смешанные интегральные уравнения контактной механики и трибологии / А.В. Манжиров // Смешанные задачи механики деформируемого тела. Труды V Российской конференции и международным участием, 22–24 августа 2005 г., г. Саратов, Россия. – Саратов, Изд-во Саратовск. гос. ун-та, 2005.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.

CONTACT PROBLEMS FOR COVERED SOLIDS³

© 2007 K.E. Kazakov⁴

When fabricating different elements of machines various coatings are often used. In some cases characteristics of such coatings are inhomogeneous and depend on surface coordinates that greatly effects the strain-stress state in contact region. Another significant and abundant case is interaction of solids with variable-thickness coatings. The thickness variability is possible to take place due to different modes of surface treatment and described by complicated experimentally identified function. In the paper either types of problems is considered, the corresponding integral equations are obtained, their solutions are constructed, some results of numerical computations are presented.

Paper received 15/V/2007.

Paper accepted 15/V/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.V. Manzhirrov.

⁴Kazakov Kirill Evgenjevich (kazakov@ipmnet.ru), Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia.