

## ЧАСТИЧНО ОТСЛОИВШЕЕСЯ ТОНКОЕ ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ МЕЖДУ РАЗНЫМИ УПРУГИМИ МАТЕРИАЛАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ТРЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТА

© 2007 И.И. Ильина,<sup>1</sup> В.В. Сильвестров<sup>2</sup>

Изучается напряженное состояние кусочно-однородной упругой плоскости, склеенной из двух разных полуплоскостей и содержащей на их линии соединения тонкое жесткое остроугольное включение. Одна сторона включения жестко соединена с окружающей его упругой средой, а другая сторона отслоилась от среды и контактирует с ней с трением. К плоскости вне включения приложено конечное число сосредоточенных сил и пар сил.

Методом матричной краевой задачи Римана находятся явно комплексные потенциалы, описывающие напряженное состояние составной плоскости, исследуется поведение напряжений вблизи вершин включения.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим кусочно-однородную упругую изотропную плоскость, составленную из верхней и нижней полуплоскостей с модулями сдвигов  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  и коэффициентами Пуассона  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ , на линии соединения которых расположено тонкое жесткое остроугольное включение  $[a, b]$ , отслоившееся вдоль верхней стороны от окружающей его упругой среды. На верхней стороне включения считаем известными значения выражения  $\tau_{xy} + \rho\sigma_y$  и производной  $\partial v/\partial x$  нормальной компоненты вектора смещения:

$$\tau_{xy}^+(t) + \rho\sigma_y^+(t) = q(t), \quad (\partial v/\partial x)^+(t) = h_3(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.1)$$

а на нижней стороне включения — значения производных  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial v/\partial x$  горизонтальной и вертикальной компонент вектора смещения:

$$(\partial u/\partial x)^-(t) = h_1(t), \quad (\partial v/\partial x)^-(t) = h_2(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Ильина Ирина Игоревна (ir\_rus@mail.ru), кафедра высшей математики Чувашского государственного университета, 428015, Россия, г. Чебоксары, Московский пр., 15.

<sup>2</sup>Сильвестров Василий Васильевич (v\_silvestrov@mail.ru), кафедра высшей математики Российского государственного университета нефти и газа, 119991, Россия, г. Москва, Ленинский пр., 65.

где  $\rho$  — коэффициент трения между включением и упругой средой,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_y$  — касательная и нормальная компоненты вектора напряжений. Вне включения полуплоскости жестко соединены друг с другом, что выражается в непрерывности вектора напряжений и вектора смещений.

На  $\infty$  составной плоскости заданы значения напряжений и вращения:

$$\begin{aligned} \sigma_{x1}^{\infty} &= \sigma_1, & \sigma_{x2}^{\infty} &= \sigma_2, & \sigma_{y1}^{\infty} &= \sigma_{y2}^{\infty} = \sigma, \\ \tau_{xy1}^{\infty} &= \tau_{xy2}^{\infty} = \tau, & \omega_1^{\infty} &= \omega_1, & \omega_2^{\infty} &= \omega_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

связанные между собой условиями неразрывности смещений на бесконечности [1]:

$$\begin{aligned} \mu_2(1 + \kappa_1)\sigma_1 - \mu_1(1 + \kappa_2)\sigma_2 &= (\mu_1\kappa_2 - \mu_2\kappa_1 + 3(\mu_2 - \mu_1))\sigma, \\ 2\mu_1\mu_2(\omega_1 - \omega_2) &= (\mu_1 - \mu_2)\tau. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь и далее индекс "1" соответствуют верхней полуплоскости, индекс "2" — нижней,  $\kappa_j = 3 - 4\nu_j$ ,  $j = 1, 2$ .

В плоскости, вне включения, в точках  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  действуют сосредоточенные силы  $X_j + iY_j$  и пары сил с моментами  $M_j$  относительно точек  $z_j$ . Для определенности будем считать, что  $n_1$  точек относятся к внутренним точкам составной плоскости, а  $n - n_1$  точек расположены на оси включения. Кроме того, считаем заданным значение главного вектора  $X_0 + iY_0$  внешних сил, приложенных к включению.

*Требуется определить плоское напряженное состояние кусочно-однородной упругой плоскости, при котором напряжения и вращения в вершинах включения могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы, в точках приложения сил и пар сил — в бесконечность порядка не больше двух, а вне любой фиксированной достаточно малой окрестности множества сингулярностей они ограничены.*

## 2. Краевая задача для комплексных потенциалов и их поведение в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил и пар сил

Для нахождения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , вращения  $\omega$  и частной производной по  $x$  от вектора смещения  $u + iv$  в точке  $z = x + iy$  составной плоскости воспользуемся предложенными Г.П. Черепановым видоизменениями известных формул Колосова–Мусхелишвили [2]:

в верхней полуплоскости  $\text{Im } z > 0$

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re}\Phi(z), & 2\mu_1\omega &= (1 + \kappa_1)\text{Im}\Phi(z), \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \\ 2\mu_1(u + iv)'_x &= \kappa_1\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

в нижней полуплоскости  $\text{Im } z < 0$

$$\begin{aligned}
\sigma_x + \sigma_y &= 4\text{Re}\Phi_*(z), & 2\mu_2\omega &= (1 + \kappa_2)\text{Im}\Phi_*(z), \\
\sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}, \\
2\mu_2(u + iv)'_x &= \kappa_2\Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}, \\
\Phi_*(z) &= \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), & \Omega_*(z) &= \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z), \\
\alpha_1 &= \frac{1 + \mu_*\kappa_1}{1 + \kappa_2}, & \alpha_2 &= \frac{1 - \mu_*}{1 + \kappa_2}, & \alpha_3 &= \frac{\mu_* + \kappa_2}{1 + \kappa_2}, \\
\alpha_4 &= \frac{\kappa_2 - \mu_*\kappa_1}{1 + \kappa_2}, & \mu_* &= \frac{\mu_2}{\mu_1},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  — кусочно-голоморфные функции с линией разрыва  $L = [a, b]$ , на концах которой они могут иметь особенности интегрируемого характера [3], а в окрестности  $\infty$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{z} + O(z^{-2}), & \Omega(z) &= \gamma_2 + \frac{\gamma_4}{z} + O(z^{-2}), \\
\gamma_1 &= \frac{\sigma_1 + \sigma}{4} + i\frac{2\mu_1\omega_1}{1 + \kappa_1}, & \gamma_2 &= \sigma - i\tau - \gamma_1, \\
\gamma_3 &= -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \mu_*\kappa_1)}, & \gamma_4 &= \frac{\kappa_2(X + iY)}{2\pi(\mu_* + \kappa_2)}, & X + iY &= \sum_{j=0}^n (X_j + iY_j).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Функции  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  будем считать такими, что для всех точек  $t$  линии  $L$ , кроме концов,

$$\lim_{z \rightarrow t^\pm} (\bar{z} - z)\Phi'(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow t^\pm} (\bar{z} - z)\Omega'(z) = 0. \tag{2.4}$$

Из условий (1.1), (1.2), (2.1), (2.2), (2.4) следует, что на берегах включения функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  должны удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned}
\kappa_2\alpha_1\Phi^-(t) + \kappa_2\alpha_2\Omega^-(t) - \alpha_3\Omega^+(t) - \alpha_4\Phi^+(t) &= 2\mu_2(h_1(t) + ih_2(t)), \\
\kappa_1\Phi^+(t) - \Omega^-(t) - \kappa_1\overline{\Phi^+(t)} + \overline{\Omega^-(t)} &= 4i\mu_1h_3(t), \\
\Phi^+(t) + \Omega^-(t) - c(\overline{\Phi^+(t)} + \overline{\Omega^-(t)}) &= -\frac{2iq(t)}{1 - ip}, \quad t \in L,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $c = (1 + ip)/(1 - ip)$ . Добавим к ним условие, получаемое из первого равенства (2.5) путем сопряжения обеих частей:

$$\kappa_2\alpha_1\overline{\Phi^-(t)} + \kappa_2\alpha_2\overline{\Omega^-(t)} - \alpha_3\overline{\Omega^+(t)} - \alpha_4\overline{\Phi^+(t)} = 2\mu_2(h_1(t) - ih_2(t)). \tag{2.6}$$

Учитывая выражения функций  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$  через соответствующие верхней и нижней полуплоскостям комплексные потенциалы Мухелишвили, а также их представления в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил и пар сил [4], получаем следующие представления этих функций

вблизи точек  $z_j$  и  $\bar{z}_j$ :  
если  $\text{Im } z_j > 0$ , то

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - z_j)} + O(1), \quad \Omega(z) \sim -\frac{\alpha_4}{\alpha_3}\Phi(z) \quad \text{при } z \rightarrow z_j, \\ \Omega(z) &= \frac{\kappa_1(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - \bar{z}_j)} + \frac{(\bar{z}_j - z_j)(X_j - iY_j) + i(1 + \kappa_1)M_j}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - \bar{z}_j)^2} + O(1), \\ \Phi(z) &\sim -(\alpha_2/\alpha_1)\Omega(z) \quad \text{при } z \rightarrow \bar{z}_j;\end{aligned}\tag{2.7}$$

если  $\text{Im } z_j < 0$ , то

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)(z - z_j)} + O(1), \quad \Omega(z) \text{ ограничена при } z \rightarrow z_j, \\ \Omega(z) &= \frac{\kappa_2(X_j + iY_j)}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - \bar{z}_j)} + \frac{(\bar{z}_j - z_j)(X_j - iY_j) + i(1 + \kappa_2)M_j}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - \bar{z}_j)^2} + O(1), \\ \Phi(z) &\text{ ограничена при } z \rightarrow \bar{z}_j;\end{aligned}\tag{2.8}$$

если  $\text{Im } z_j = 0$ , то

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)(z - z_j)} + O(1), \\ \Omega(z) &= \frac{\kappa_2(X_j + iY_j)}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - z_j)} + \frac{i(M_j - z_j Y_j)}{2\pi\alpha_3(z - z_j)^2} + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow z_j.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Представления (2.7) и (2.8) получены при условии, что точка  $\bar{z}_j$  не совпадает ни с одной из остальных точек  $z_k$  ( $k \neq j$ ). Если какие-то точки  $\bar{z}_j$  и  $z_k$  совпадают, то в точках  $z_j = \bar{z}_k$  и  $z_k = \bar{z}_j$  происходит наложение особенностей функций  $\Phi(z)$ ,  $\Omega(z)$ , что выражается в суммировании соответствующих представлений этих функций при  $z \rightarrow z_j$  и  $z \rightarrow \bar{z}_j$ .

### 3. Сведение краевой задачи к матричной краевой задаче Римана

Введем в рассмотрение вектор-функцию  $\mathbf{F}(z)$  с компонентами  $F_1(z)$ ,  $F_2(z)$ ,  $F_3(z)$ ,  $F_4(z)$  так, что

$$F_1(z) = \Phi(z), \quad F_2(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}, \quad F_3(z) = \Omega(z), \quad F_4(z) = \overline{\Omega(\bar{z})},\tag{3.1}$$

и вектор-функцию  $\Psi(z) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}(z)$  с компонентами  $\Psi_1(z)$ ,  $\Psi_2(z)$ ,  $\Psi_3(z)$ ,  $\Psi_4(z)$ , где  $\mathbf{P}$  — неизвестная пока невырожденная матрица.

В силу представлений (2.3) функции  $\Psi_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$  в окрестности бесконечно удаленной точки имеют представления:

$$\begin{aligned}\Psi_k(z) &= q_{k1}\gamma_1 + q_{k2}\bar{\gamma}_1 + q_{k3}\gamma_2 + q_{k4}\bar{\gamma}_2 + \\ &+ (q_{k1}\gamma_3 + q_{k2}\bar{\gamma}_3 + q_{k3}\gamma_4 + q_{k4}\bar{\gamma}_4)z^{-1} + O(z^{-2}), \quad k = 1, 2, 3, 4,\end{aligned}\tag{3.2}$$

где  $q_{kj}$  — элементы матрицы  $\mathbf{P}^{-1}$ . Кроме того, на основании (3.1) и равенства  $\mathbf{F}(z) = \mathbf{P}\Psi(z)$  функции  $\Psi_j(z)$  должны удовлетворять двум условиям "симметрии":

$$\sum_{j=1}^4 \bar{p}_{1j} \overline{\Psi_j(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 p_{2j} \Psi_j(z), \quad \sum_{j=1}^4 \bar{p}_{3j} \overline{\Psi_j(\bar{z})} = \sum_{j=1}^4 p_{4j} \Psi_j(z). \quad (3.3)$$

В окрестностях особых точек  $z_j$  и  $\bar{z}_j$  функции  $\Psi_k(z)$  на основании (2.7)–(2.9) имеют вид:

если  $\text{Im } z_j > 0$ , то

$$\begin{aligned} \Psi_k(z) &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - z_j)} \left( q_{k1} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} q_{k3} \right) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow z_j, \\ \Psi_k(z) &= \left( \frac{\kappa_1(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - \bar{z}_j)} + \frac{(\bar{z}_j - z_j)(X_j - iY_j) + i(1 + \kappa_1)M_j}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - \bar{z}_j)^2} \right) \times \\ &\quad \times \left( q_{k3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} q_{k1} \right) + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow \bar{z}_j; \end{aligned} \quad (3.4)$$

если  $\text{Im } z_j < 0$ , то

$$\begin{aligned} \Psi_k(z) &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)(z - z_j)} q_{k1} + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow z_j, \\ \Psi_k(z) &= \left( \frac{\kappa_2(X_j + iY_j)}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - \bar{z}_j)} + \frac{(\bar{z}_j - z_j)(X_j - iY_j) + i(1 + \kappa_2)M_j}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - \bar{z}_j)^2} \right) q_{k3} + \\ &\quad + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow \bar{z}_j; \end{aligned} \quad (3.5)$$

если  $\text{Im } z_j = 0$ , то

$$\begin{aligned} \Psi_k(z) &= \frac{(X_j + iY_j)(\kappa_2\alpha_1 q_{k3} - \alpha_3 q_{k1}) + (X_j - iY_j)(\kappa_2\alpha_1 q_{k4} - \alpha_3 q_{k2})}{2\pi\alpha_1\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - z_j)} + \\ &\quad + i \frac{(M_j - z_j Y_j)(q_{k3} - q_{k4})}{2\pi\alpha_3(z - z_j)^2} + O(1) \quad \text{при } z \rightarrow z_j. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Тем самым приходим к матричной краевой задаче Римана

$$\Psi^+(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P} \Psi^-(t) + \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}(t), \quad t \in L. \quad (3.7)$$

В краевом условии (3.7) матрицы  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{g}(t)$  определяются из (2.5), (2.6).

Невырожденную матрицу  $\mathbf{P}$  возьмем так, чтобы матрица  $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}$  была диагональной или треугольной.

Характеристическое уравнение  $\det(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} - \lambda \mathbf{E}) = 0$  является алгебраическим уравнением четвертой степени с комплексными коэффициентами, один из корней которого  $\lambda_4 = 1$ .

Если собственные значения  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  матрицы  $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$  все различны, то в качестве матрицы  $\mathbf{P}$  можно взять, например, матрицу с элементами

$$\begin{aligned} p_{1j} &= \alpha_3 \lambda_j - \kappa_2 \alpha_2, \quad p_{2j} = (\lambda_j(\bar{c} + \kappa_1) p_{1j} + (\bar{c} - 1) p_{3j}) / (1 + \kappa_1), \\ p_{3j} &= \kappa_2 \alpha_1 - \alpha_4 \lambda_j, \quad p_{4j} = (-\kappa_1 \lambda_j p_{1j} + \kappa_1 p_{2j} + p_{3j}) / \lambda_j, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Тогда задача (3.7) распадается на четыре самостоятельные краевые задачи Римана:

$$\Psi_k^+(t) = \lambda_k \Psi_k^-(t) + f_k(t), \quad t \in L, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (3.8)$$

где  $f_k(t)$  — компоненты вектора-столбца  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{g}(t)$ . Решения задач (3.8) имеют вид:

$$\begin{aligned} \Psi_k(z) = X_k(z) & \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_k(t)dt}{X_k^+(t)(t-z)} + A'_k + B'_k z + \right. \\ & + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{kj}}{z-z_j} + \frac{D_{kj}}{z-\bar{z}_j} + \frac{E_{kj}}{(z-z_j)^2} + \frac{F_{kj}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) + \\ & \left. + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G'_{kj}}{z-z_j} + \frac{H'_{kj}}{(z-z_j)^2} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_4(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_4(t)dt}{t-z} + A'_4 + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{4j}}{z-z_j} + \frac{D_{4j}}{z-\bar{z}_j} + \frac{E_{4j}}{(z-z_j)^2} + \right. \\ \left. + \frac{F_{4j}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G'_{4j}}{z-z_j} + \frac{H'_{4j}}{(z-z_j)^2} \right), \end{aligned}$$

где  $X_k(z)$  — канонические функции соответствующих однородных задач  $X_k^+(t) = \lambda_k X_k^-(t)$ ,  $t \in L$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Эти решения существенно зависят от упругих параметров составной плоскости и коэффициента трения  $\rho$ , так как собственные значения  $\lambda_k$ ,  $k = 1, 2, 3$ , матрицы  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  могут быть как комплексными, так и действительными числами. В общем случае значения  $\lambda_k$  связаны между собой различным образом. Так, в случае комплексных  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  возможны, в частности, равенства  $\lambda_2 = 1/\bar{\lambda}_1$  или  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ , причем всегда  $|\lambda_3| = 1$ . Приведем решение задачи для этих случаев.

#### 4. Решение задачи для случая $\lambda_2 = 1/\bar{\lambda}_1$

Тогда решения задач (3.8) задаются формулами (3.9), в которых канонические функции  $X_k(z)$  имеют вид

$$\begin{aligned} X_1(z) &= (z-a)^{-\alpha'_1 - i\beta'_1} (z-b)^{-1 + \alpha'_1 + i\beta'_1}, \\ X_2(z) &= (z-a)^{-\alpha'_1 + i\beta'_1} (z-b)^{-1 + \alpha'_1 - i\beta'_1}, \\ X_3(z) &= (z-a)^{-\alpha'_3} (z-b)^{-1 + \alpha'_3}, \quad z \notin [a, b], \\ \alpha'_k &= \frac{\arg \lambda_k}{2\pi}, \quad \beta'_k = \frac{\ln |\lambda_k|}{2\pi}, \quad 0 \leq \arg \lambda_k < 2\pi, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

где у этих функций берутся те ветви, которые однозначны в плоскости с разрезом по отрезку  $[a, b]$  и в окрестности  $\infty$  имеют представления

$$X_k(z) = \frac{1}{z} + \frac{b - (\alpha'_1 - (-1)^k i\beta'_1)(b-a)}{z^2} + O(z^{-3}), \quad k = 1, 2,$$

$$X_3(z) = \frac{1}{z} + \frac{b - \alpha'_3(b-a)}{z^2} + O(z^{-3}).$$

В окрестности  $\infty$  функции  $\Psi_k(z)$  имеют вид:

$$\Psi_k(z) = B'_k + (A'_k + d'_k B'_k)z^{-1} + O(z^{-2}),$$

$$\Psi_4(z) = A'_4 + \left( \sum_{j=1}^{n_1} (C_{4j} + D_{4j}) + \sum_{j=n_1+1}^n G'_{4j} - \frac{1}{2\pi i} \int_a^b f_4(t) dt \right) \frac{1}{z} + O(z^{-2}),$$

$$d'_k = b - (\alpha'_1 - (-1)^k i \beta'_1)(b-a), \quad k = 1, 2, \quad d'_3 = b - \alpha'_3(b-a).$$

Из условий "симметрии" (3.3) находим

$$A'_2 = \frac{\bar{p}_{11} \bar{A}'_1}{p_{22}}, \quad B'_2 = \frac{\bar{p}_{11} \bar{B}'_1}{p_{22}},$$

$$A'_3 = (\xi_3 + i) \text{Im} A'_3, \quad B'_3 = (\xi_3 + i) \text{Im} B'_3, \quad A'_4 = (1 + i\rho) \text{Re} A'_4,$$

$$C_{2j} = \frac{\bar{p}_{11} \bar{D}_{1j}}{p_{22}}, \quad D_{2j} = \frac{\bar{p}_{11} \bar{C}_{1j}}{p_{22}}, \quad E_{2j} = \frac{\bar{p}_{11} \bar{F}_{1j}}{p_{22}}, \quad F_{2j} = \frac{\bar{p}_{11} \bar{E}_{1j}}{p_{22}},$$

$$D_{3j} = \frac{\bar{p}_{13} \bar{C}_{3j}}{p_{23}}, \quad F_{3j} = \frac{\bar{p}_{13} \bar{E}_{3j}}{p_{23}}, \quad D_{4j} = c \bar{C}_{4j}, \quad F_{4j} = c \bar{E}_{4j}, \quad j = \overline{1, n_1},$$

$$G'_{2j} = \frac{\bar{p}_{11} \bar{G}'_{1j}}{p_{22}}, \quad H'_{2j} = \frac{\bar{p}_{11} \bar{H}'_{1j}}{p_{22}},$$

$$G'_{3j} = (\xi_3 + i) \text{Im} G'_{3j}, \quad H'_{3j} = (\xi_3 + i) \text{Im} H'_{3j},$$

$$G'_{4j} = (1 + i\rho) \text{Re} G'_{4j}, \quad H'_{4j} = (1 + i\rho) \text{Re} H'_{4j}, \quad j = \overline{n_1 + 1, n},$$

$$\begin{aligned} \xi'_3 = & \left[ \left( \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} + \kappa_1 \right) (\alpha_3^2 ((\text{Re} \lambda_3)^2 - 3(\text{Im} \lambda_3)^2) \text{Re} \lambda_3 - 2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 ((\text{Re} \lambda_3)^2 - \right. \\ & \left. - (\text{Im} \lambda_3)^2) + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Re} \lambda_3 \right) + \frac{2\rho}{1 + \rho^2} (\alpha_3^2 (3(\text{Re} \lambda_3)^2 - (\text{Im} \lambda_3)^2) \text{Im} \lambda_3 - 2\alpha_3 (2\kappa_2 \alpha_2 + \\ & + \alpha_4) \text{Re} \lambda_3 \text{Im} \lambda_3 + \kappa_2 (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4) (\text{Im} \lambda_3 - \rho \text{Re} \lambda_3) + \rho (\alpha_3 \alpha_4 ((\text{Re} \lambda_3)^2 - \\ & \left. - (\text{Im} \lambda_3)^2) + \kappa_2^2 \alpha_1 \alpha_2) + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Im} \lambda_3 \right] / [(1 + \kappa_1) (\alpha_3^2 - 2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 \text{Re} \lambda_3 + \kappa_2^2 \alpha_2^2)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi''_3 = & \left[ \left( \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} + \kappa_1 \right) (\alpha_3^2 (3(\text{Re} \lambda_3)^2 - (\text{Im} \lambda_3)^2) \text{Im} \lambda_3 - 4\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 \text{Re} \lambda_3 \text{Im} \lambda_3 + \right. \\ & \left. + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Im} \lambda_3 \right) - \frac{2\rho}{1 + \rho^2} (\alpha_3^2 ((\text{Re} \lambda_3)^2 - 3(\text{Im} \lambda_3)^2) \text{Re} \lambda_3 - (2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4) \times \\ & \left. \times ((\text{Re} \lambda_3)^2 - (\text{Im} \lambda_3)^2) + \kappa_2 (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4) (\text{Re} \lambda_3 + \rho \text{Im} \lambda_3) + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Re} \lambda_3 - \right. \\ & \left. - 2\rho \alpha_3 \alpha_4 \text{Re} \lambda_3 \text{Im} \lambda_3 - \kappa_2^2 \alpha_1 \alpha_2 \right] / [(1 + \kappa_1) (\alpha_3^2 - 2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 \text{Re} \lambda_3 + \kappa_2^2 \alpha_2^2)], \end{aligned}$$

$$\xi_3 = -\xi''_3 / (1 - \xi'_3).$$

Переобозначим постоянные  $A'_k, B'_k$  через  $A_k, B_k, k = 1, 2, \text{Im} A'_3, \text{Im} B'_3, \text{Re} A'_4, \text{Im} G'_{3j}, \text{Im} H'_{3j}, \text{Re} G'_{4j}, \text{Re} H'_{4j}$  соответственно через  $A_3, B_3, A_4, G_{3j}, H_{3j},$

$G_{4j}, H_{4j}$ . Тогда решения (3.9) при  $k = 1, 2$  примут вид

$$\begin{aligned}\Psi_1(z) &= X_1(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_1(t)dt}{X_1^+(t)(t-z)} + A_1 + B_1 z + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{1j}}{z-z_j} + \frac{D_{1j}}{z-\bar{z}_j} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{E_{1j}}{(z-z_j)^2} + \frac{F_{1j}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{1j}}{z-z_j} + \frac{H_{1j}}{(z-z_j)^2} \right) \right), \\ \Psi_2(z) &= X_2(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_2(t)dt}{X_2^+(t)(t-z)} + \frac{\bar{p}_{11}}{p_{22}} \left( \bar{A}_1 + \bar{B}_1 z + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{\bar{D}_{1j}}{z-z_j} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\bar{C}_{1j}}{z-\bar{z}_j} + \frac{\bar{F}_{1j}}{(z-z_j)^2} + \frac{\bar{E}_{1j}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{\bar{G}_{1j}}{z-z_j} + \frac{\bar{H}_{1j}}{(z-z_j)^2} \right) \right) \Bigg),\end{aligned}$$

а при  $k = 3, 4$  — вид

$$\begin{aligned}\Psi_3(z) &= X_3(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_4(t)dt}{X_3^+(t)(t-z)} + (\xi_3 + i) \left( A_3 + B_3 z + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{3j}}{z-z_j} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{H_{3j}}{(z-z_j)^2} \right) \right) + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{3j}}{z-z_j} + \frac{E_{3j}}{(z-z_j)^2} + \frac{\bar{p}_{13}}{p_{23}} \left( \frac{\bar{C}_{3j}}{z-\bar{z}_j} + \frac{\bar{E}_{3j}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) \right) \Bigg), \\ \Psi_4(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_4(t)dt}{t-z} + (1 + i\rho) \left( A_4 + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{4j}}{z-z_j} + \frac{H_{4j}}{(z-z_j)^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{4j}}{z-z_j} + \frac{E_{4j}}{(z-z_j)^2} + c \left( \frac{\bar{C}_{4j}}{z-\bar{z}_j} + \frac{\bar{E}_{4j}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) \right) \right).\end{aligned}$$

Из разложений функций  $\Psi_k(z)$ ,  $k = 1, 2$  в ряды Лорана в окрестностях точек  $\infty$ ,  $z_j$  и  $\bar{z}_j$ , используя представления (3.2), (3.4)–(3.6), находим

$$\begin{aligned}B_1 &= q_{11}\gamma_1 + q_{12}\bar{\gamma}_1 + q_{13}\gamma_2 + q_{14}\bar{\gamma}_2, \\ A_1 &= q_{11}\gamma_3 + q_{12}\bar{\gamma}_3 + q_{13}\gamma_4 + q_{14}\bar{\gamma}_4 - d_1 B_1, \quad d_1 = b - (\alpha'_1 + i\beta'_1)(b-a); \\ C_{1j} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \kappa_1)X_1(z_j)} \left( q_{11} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} q_{13} \right), \quad E_{1j} = 0, \\ F_{1j} &= \frac{(\bar{z}_j - z_j)(X_j - iY_j) + i(1 + \kappa_1)M_j}{2\pi(1 + \kappa_1)X_1(\bar{z}_j)} \left( q_{13} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} q_{11} \right), \\ D_{1j} &= \frac{\kappa_1(X_j + iY_j)}{2\pi(1 + \kappa_1)X_1(\bar{z}_j)} \left( q_{13} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} q_{11} \right) - h_1 F_{1j}, \\ h_1 &= \frac{\alpha'_1 + i\beta'_1 - 1}{z_j - b} - \frac{\alpha'_1 + i\beta'_1}{z_j - a}, \quad \text{если } \text{Im}z_j > 0; \\ C_{1j} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)X_1(z_j)} q_{11}, \quad E_{1j} = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{1j} &= \frac{(\bar{z}_j - z_j)(X_j - iY_j) + i(1 + \kappa_2)M_j}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)X_1(\bar{z}_j)} q_{13}, \\
D_{1j} &= \frac{\kappa_2(X_j + iY_j)}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)X_1(\bar{z}_j)} q_{13} - h_1 F_{1j}, \quad \text{если } \operatorname{Im} z_j < 0; \\
G_{1j} &= \frac{(X_j + iY_j)(\alpha_1 \kappa_2 q_{13} - \alpha_3 q_{11}) + (X_j - iY_j)(\alpha_1 \kappa_2 q_{14} - \alpha_3 q_{12})}{2\pi\alpha_1 \alpha_3(1 + \kappa_2)X_1(z_j)} - h_1 H_{1j}, \\
H_{1j} &= i \frac{M_j - z_j Y_j}{2\pi\alpha_3 X_1(z_j)} (q_{13} - q_{14}), \quad \text{если } \operatorname{Im} z_j = 0.
\end{aligned}$$

При  $k = 3$  и  $k = 4$  постоянные находятся по формулам

$$\begin{aligned}
B_3 &= (q_{31}\gamma_1 + q_{32}\bar{\gamma}_1 + q_{33}\gamma_2 + q_{34}\bar{\gamma}_2)/(\xi_3 + i), \\
A_3 &= \frac{q_{31}\gamma_3 + q_{32}\bar{\gamma}_3 + q_{33}\gamma_4 + q_{34}\bar{\gamma}_4}{\xi_3 + i} - d'_3 B_3, \quad d_3 = b - \alpha'_3(b - a), \\
A_4 &= (q_{41}\gamma_1 + q_{42}\bar{\gamma}_1 + q_{43}\gamma_2 + q_{44}\bar{\gamma}_2)/(1 + i\rho); \\
C_{3j} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \kappa_1)X_3(z_j)} (q_{31} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} q_{33}), \\
C_{4j} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \kappa_1)} (q_{41} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} q_{43}), \quad E_{kj} = 0, \quad k = 3, 4, \quad \text{если } \operatorname{Im} z_j > 0; \\
C_{3j} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)X_3(z_j)} q_{31}, \\
C_{4j} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)} q_{41}, \quad E_{kj} = 0, \quad k = 3, 4, \quad \text{если } \operatorname{Im} z_j < 0; \\
H_{3j} &= i \frac{(M_j - z_j Y_j)(q_{33} - q_{34})}{2\pi\alpha_3(\xi_3 + i)X_3(z_j)}, \quad H_{4j} = i \frac{(M_j - z_j Y_j)(q_{43} - q_{44})}{2\pi\alpha_3(1 + i\rho)}, \\
G_{3j} &= \frac{(X_j + iY_j)(\alpha_1 \kappa_2 q_{33} - \alpha_3 q_{31}) + (X_j - iY_j)(\alpha_1 \kappa_2 q_{34} - \alpha_3 q_{32})}{2\pi\alpha_1 \alpha_3(1 + \kappa_2)(\xi_3 + i)X_3(z_j)} - h'_3 H_{3j}, \\
G_{4j} &= \frac{(X_j + iY_j)(\alpha_1 \kappa_2 q_{43} - \alpha_3 q_{41}) + (X_j - iY_j)(\alpha_1 \kappa_2 q_{44} - \alpha_3 q_{42})}{2\pi\alpha_1 \alpha_3(1 + i\rho)(1 + \kappa_2)}, \\
h'_3 &= \frac{\alpha'_3 - 1}{z_j - b} - \frac{\alpha'_3}{z_j - a}, \quad \text{если } \operatorname{Im} z_j = 0.
\end{aligned}$$

Комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  вблизи вершины  $z = b$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= \frac{1}{2(2\pi m)\alpha'_1(z - b)^{1-\alpha'_1}} \left( \frac{K_1 - iK_2}{(z - b)^{-i\beta'_1}} + \frac{p_{12}(K_1 + iK_2)}{p_{22}(z - b)^{i\beta'_1}} \right) + \\
&\quad + \frac{p_{13}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)\alpha'_3(z - b)^{1-\alpha'_3}} + O(\ln|z - b|),
\end{aligned}$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2(2\pi m)^{\alpha'_1} (z-b)^{1-\alpha'_1}} \left( \frac{p_{31}(K_1 - iK_2)}{p_{11}(z-b)^{-i\beta'_1}} + \frac{p_{32}(K_1 + iK_2)}{p_{22}(z-b)^{i\beta'_1}} \right) + \frac{p_{33}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{\alpha'_3} (z-b)^{1-\alpha'_3}} + O(\ln |z-b|),$$

где

$$\begin{aligned} K_1 - iK_2 &= \frac{2(2\pi m)^{\alpha'_1} p_{11}}{(b-a)^{\alpha'_1 i\beta'_1}} \left( \frac{\sqrt{|\lambda_1|} e^{-i\pi\alpha'_1}}{2\pi i} \int_a^b f_1(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{\alpha'_1 + i\beta'_1} dt + A_1 + B_1 b + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{1j}}{b-z_j} + \frac{D_{1j}}{b-\bar{z}_j} + \frac{F_{1j}}{(b-\bar{z}_j)^2} \right) + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{1j}}{b-z_j} + \frac{H_{1j}}{(b-z_j)^2} \right) \right), \\ K_3 &= 2 \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right)^{\alpha'_3} \operatorname{Im} \left( \left( \frac{e^{-i\pi\alpha'_3}}{2\pi i} \int_a^b f_3(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{\alpha'_3} dt + (\xi_3 + i)(A_3 + B_3 b + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{3j}}{b-z_j} + \frac{H_{3j}}{(b-z_j)^2} \right) \right) + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{3j}}{b-z_j} + \frac{\bar{p}_{13} \bar{C}_{3j}}{p_{23} b - \bar{z}_j} \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично находятся представления комплексных потенциалов вблизи левой вершины  $z = a$  включения

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{1}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_1} (a-z)^{\alpha'_1}} \left( \frac{K_1 - iK_2}{(a-z)^{-i\beta'_1}} + \frac{p_{12}(K_1 + iK_2)}{p_{22}(a-z)^{i\beta'_1}} \right) + \frac{p_{13}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_3} (a-z)^{\alpha'_3}} + O(\ln |a-z|), \\ \Omega(z) &= \frac{1}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_1} (a-z)^{\alpha'_1}} \left( \frac{p_{31}(K_1 - iK_2)}{p_{11}(a-z)^{-i\beta'_1}} + \frac{p_{32}(K_1 + iK_2)}{p_{22}(a-z)^{i\beta'_1}} \right) + \frac{p_{33}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_3} (a-z)^{\alpha'_3}} + O(\ln |a-z|), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_1 - iK_2 &= \frac{-2(2\pi m)^{1-\alpha'_1} p_{11}}{(b-a)^{1-\alpha'_1 - i\beta'_1}} \left( -\frac{\sqrt{|\lambda_1|} e^{-i\pi\alpha'_1}}{2\pi i} \int_a^b f_1(t) \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{1-\alpha'_1 - i\beta'_1} dt + \right. \\ &\quad \left. + A_1 + B_1 a + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{1j}}{a-z_j} + \frac{D_{1j}}{a-\bar{z}_j} + \frac{F_{1j}}{(a-\bar{z}_j)^2} \right) + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{1j}}{a-z_j} + \frac{H_{1j}}{(a-z_j)^2} \right) \right), \\ K_3 &= -2 \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right)^{-1+\alpha'_3} \operatorname{Im} \left( -\frac{e^{-i\pi\alpha'_3}}{2\pi i} \int_a^b f_3(t) \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{\alpha'_3} dt + (\xi_3 + i) \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \left( A_3 + B_3 a + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{3j}}{a-z_j} + \frac{H_{3j}}{(a-z_j)^2} \right) + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{3j}}{a-z_j} + \frac{\bar{p}_{13} \bar{C}_{3j}}{p_{23} a-\bar{z}_j} \right) \right).$$

## 5. Решение задачи в случае $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$

Тогда канонические функции  $X_1(z)$ ,  $X_2(z)$  в формулах (3.9) в предположении, что все  $\lambda_k$  — различные, имеют вид

$$X_k(z) = (z-a)^{-\alpha'_k} (z-b)^{-1+\alpha'_k}, \quad k = 1, 2.$$

У функций  $X_k(z)$ ,  $k = 1, 2$  берутся те ветви, которые однозначны вне разреза по отрезку  $[a, b]$  и в окрестности  $\infty$  имеют представления

$$X(z) = \frac{1}{z} + \frac{b - \alpha'_k(b-a)}{z^2} + O(z^{-3}).$$

Каноническая функция  $X_3(z)$  не меняется.

Используя условия "симметрии" (3.3), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} A'_k &= (\xi_k + i) \text{Im} A'_k, & B'_k &= (\xi_k + i) \text{Im} B'_k, \\ D_{kj} &= \frac{\bar{p}_{1k} \bar{C}_{kj}}{p_{2k}}, & F_{kj} &= \frac{\bar{p}_{1k} \bar{E}_{kj}}{p_{2k}} \quad j = \overline{1, n_1}; \\ G'_{kj} &= (\xi_k + i) \text{Im} G'_{kj}, & H'_{kj} &= (\xi_k + i) \text{Im} H'_{kj}, \quad k = 1, 2, \quad j = \overline{n_1 + 1, n}, \\ \xi_k &= -\xi'_k / (1 - \xi'_k), \\ \xi'_k &= \left[ \left( \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} + \kappa_1 \right) (\alpha_3^2 ((\text{Re} \lambda_k)^2 - 3(\text{Im} \lambda_k)^2) \text{Re} \lambda_k - 2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 ((\text{Re} \lambda_k)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\text{Im} \lambda_k)^2) + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Re} \lambda_k \right) + \frac{2\rho}{1+\rho^2} (\alpha_3^2 (3(\text{Re} \lambda_k)^2 - (\text{Im} \lambda_k)^2) \text{Im} \lambda_k - 2\alpha_3 (2\kappa_2 \alpha_2 + \\ &\quad \left. + \alpha_4) \text{Re} \lambda_k \text{Im} \lambda_k + \kappa_2 (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4) (\text{Im} \lambda_k - \rho \text{Re} \lambda_k) + \rho (\alpha_3 \alpha_4 ((\text{Re} \lambda_k)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\text{Im} \lambda_k)^2) + \kappa_2^2 \alpha_1 \alpha_2) + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Im} \lambda_k \right] / [(1 + \kappa_1) (\alpha_3^2 - 2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 \text{Re} \lambda_k + \kappa_2^2 \alpha_2^2)], \\ \xi''_k &= \left[ \left( \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2} + \kappa_1 \right) (\alpha_3^2 (3(\text{Re} \lambda_k)^2 - (\text{Im} \lambda_k)^2) \text{Im} \lambda_k - 4\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 \text{Re} \lambda_k \text{Im} \lambda_k + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Im} \lambda_k) - \frac{2\rho}{1+\rho^2} (\alpha_3^2 ((\text{Re} \lambda_k)^2 - 3(\text{Im} \lambda_k)^2) \text{Re} \lambda_k - (2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \alpha_4) \times \right. \\ &\quad \left. \times ((\text{Re} \lambda_k)^2 - (\text{Im} \lambda_k)^2) + \kappa_2 (\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_4) (\text{Re} \lambda_k + \rho \text{Im} \lambda_k) + \kappa_2^2 \alpha_2^2 \text{Re} \lambda_k - \right. \\ &\quad \left. - 2\rho \alpha_3 \alpha_4 \text{Re} \lambda_k \text{Im} \lambda_k - \kappa_2^2 \alpha_1 \alpha_2 \right] / [(1 + \kappa_1) (\alpha_3^2 - 2\kappa_2 \alpha_2 \alpha_3 \text{Re} \lambda_k + \kappa_2^2 \alpha_2^2)]. \end{aligned}$$

Переобозначим  $\text{Im} A'_k$ ,  $\text{Im} B'_k$ ,  $\text{Im} G'_{kj}$ ,  $\text{Im} H'_{kj}$  соответственно через  $A_k$ ,  $B_k$ ,

$G_{kj}, H_{kj}$ . Тогда решения (3.8) при  $k = 1$  и  $k = 2$  примут вид

$$\Psi_k(z) = X_k(z) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f_k(t) dt}{X_k^+(t)(t-z)} + (\xi_k + i)(A_k + B_k z + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{kj}}{z-z_j} + \frac{H_{kj}}{(z-z_j)^2} \right)) + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{kj}}{z-z_j} + \frac{E_{kj}}{(z-z_j)^2} + \frac{\bar{p}_{1k}}{p_{2k}} \left( \frac{\bar{C}_{kj}}{z-\bar{z}_j} + \frac{\bar{E}_{kj}}{(z-\bar{z}_j)^2} \right) \right) \right), \quad k = 1, 2.$$

Из разложений функций  $\Psi_k(z)$ ,  $k = 1, 2$  в ряды Лорана в окрестностях точек  $\infty$ ,  $z_j$  и  $\bar{z}_j$ , используя формулы (3.2), (3.5)–(3.7), находим

$$\begin{aligned} B_k &= (q_{k1}\gamma_1 + q_{k2}\bar{\gamma}_1 + q_{k3}\gamma_2 + q_{k4}\bar{\gamma}_2)/(\xi_k + i), \\ A_k &= \frac{q_{k1}\gamma_3 + q_{k2}\bar{\gamma}_3 + q_{k3}\gamma_4 + q_{k4}\bar{\gamma}_4}{\xi_k + i} - d_k B_k, \quad k = 1, 2, \\ C_{kj} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi(1 + \kappa_1)X_k(z_j)}(q_{k1} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3}q_{k3}), \quad E_{kj} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{если } \text{Im}z_j > 0; \\ C_{kj} &= -\frac{X_j + iY_j}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_2)X_k(z_j)}q_{k1}, \quad E_{kj} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \text{если } \text{Im}z_j < 0; \\ G_{kj} &= \frac{(X_j + iY_j)(\alpha_1\kappa_2q_{k3} - \alpha_3q_{k1}) + (X_j - iY_j)(\alpha_1\kappa_2q_{k4} - \alpha_3q_{k2})}{2\pi\alpha_1\alpha_3(1 + \kappa_2)(\xi_k + i)X_k(z_j)} - h'_k H_{kj}, \\ H_{kj} &= i\frac{M_j - z_j Y_j}{2\pi\alpha_3(\xi_k + i)X_k(z_j)}(q_{k3} - q_{k4}), \quad k = 1, 2, \quad \text{если } \text{Im}z_j = 0, \\ d_k &= b - (\alpha'_k + i\beta'_k)(b - a), \quad h'_k = \frac{\alpha'_k - 1}{z_j - b} - \frac{\alpha'_k}{z_j - a}. \end{aligned}$$

Зная функции  $\Psi_k(z)$ , можем найти комплексные потенциалы, следовательно, напряжения. Изучим поведение функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  на концах включения. Вблизи вершины  $z = b$  они имеют вид:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{p_{11}(\xi_1 + i)K_1}{2(2\pi m)^{\alpha'_1}(z-b)^{1-\alpha'_1}} + \frac{p_{12}(\xi_2 + i)K_2}{2(2\pi m)^{\alpha'_2}(z-b)^{1-\alpha'_2}} + \\ &\quad + \frac{p_{13}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{\alpha'_3}(z-b)^{1-\alpha'_3}} + O(\ln|z-b|), \\ \Omega(z) &= \frac{p_{31}(\xi_1 + i)K_1}{2(2\pi m)^{\alpha'_1}(z-b)^{1-\alpha'_1}} + \frac{p_{32}(\xi_2 + i)K_2}{2(2\pi m)^{\alpha'_2}(z-b)^{1-\alpha'_2}} + \\ &\quad + \frac{p_{33}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{\alpha'_3}(z-b)^{1-\alpha'_3}} + O(\ln|z-b|), \end{aligned}$$

где

$$K_k = 2 \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right)^{\alpha'_k} \operatorname{Im} \left[ -\frac{\ell^{-i\pi\alpha'_k}}{2\pi i} \int_a^b f_k(t) \left( \frac{t-a}{b-t} \right)^{\alpha'_k} dt + (\xi_k + i)(A_k + B_k b + \right. \\ \left. + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{kj}}{b-z_j} + \frac{H_{kj}}{(b-z_j)^2} \right) \right) + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{kj}}{b-z_j} + \frac{\bar{p}_{1k} \bar{C}_{kj}}{p_{2k}(b-\bar{z}_j)} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3.$$

Аналогично находятся представления комплексных потенциалов вблизи правой вершины включения  $z = a$

$$\Phi(z) = \frac{p_{11}(\xi_1 + i)K_1}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_1}(a-z)^{\alpha'_1}} + \frac{p_{12}(\xi_2 + i)K_2}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_2}(a-z)^{\alpha'_2}} + \\ + \frac{p_{13}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_3}(a-z)^{\alpha'_3}} + O(\ln|a-z|), \\ \Omega(z) = \frac{p_{31}(\xi_1 + i)K_1}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_1}(a-z)^{\alpha'_1}} + \frac{p_{32}(\xi_2 + i)K_2}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_2}(a-z)^{\alpha'_2}} + \\ + \frac{p_{33}(\xi_3 + i)K_3}{2(2\pi m)^{1-\alpha'_3}(a-z)^{\alpha'_3}} + O(\ln|a-z|),$$

где

$$K_k = -2 \left( \frac{2\pi m}{b-a} \right)^{1-\alpha'_k} \operatorname{Im} \left[ -\frac{\ell^{-i\pi\alpha'_k}}{2\pi i} \int_a^b f_k(t) \left( \frac{b-t}{t-a} \right)^{1-\alpha'_k} dt + \right. \\ \left. + (\xi_k + i) \left( A_k + B_k a + \sum_{j=n_1+1}^n \left( \frac{G_{kj}}{a-z_j} + \frac{H_{kj}}{(a-z_j)^2} \right) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n_1} \left( \frac{C_{kj}}{a-z_j} + \frac{\bar{p}_{1k} \bar{C}_{kj}}{p_{2k}(a-\bar{z}_j)} \right) \right], \quad k = 1, 2, 3.$$

В обоих рассмотренных выше случаях поведение комплексных потенциалов, следовательно, и напряжений вблизи вершин включения, определяется тремя действительными параметрами  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ , которые примем за коэффициенты интенсивности напряжений. Эти коэффициенты являются нелинейными функциями от упругих параметров составной плоскости и коэффициента трения  $\rho$ . Они также зависят нелинейно от длины включения и линейно от заданных на  $\infty$  напряжений. В случае  $\lambda_2 = 1/\bar{\lambda}_1$  напряжения вблизи вершины  $z = b$  включения помимо степенных особенностей, определяемых функциями  $(z-b)^{-\alpha_1}$  и  $(z-b)^{-\alpha_3}$ , имеют еще и осциллирующую особенность, определяемую функцией  $(z-b)^{i\beta_1}$ , тогда как в случае  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$  осциллирующая особенность отсутствует.

### 6. Численные расчеты

Пусть составная плоскость растягивается двумя горизонтальными сосредоточенными силами  $X_1 = -X_0$ ,  $X_2 = X_0$  ( $X_0 > 0$ ), расположенными на линии раздела сред слева и справа от включения (рис. 1). Включение занимает отрезок  $[-l/2, l/2]$  и расположено между полуплоскостями с упругими постоянными  $\nu_1 = 0,25$ ,  $\nu_2 = 0,125$  и  $\mu_* = \mu_2/\mu_1 = 15$ , для которых собственные значения матрицы  $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  равны  $\lambda_1 = -0,485 - i0,07$ ,  $\lambda_2 = 1/\bar{\lambda}_1 = -2,018 - i0,292$ ,  $\lambda_3 = -0,815 + i0,579$ . Коэффициент трения  $\rho = 0,5$ . Точки приложения сил удалены от концов включения на расстояния  $\Delta_1 = l$ ,  $\Delta_2 = l$ . Все остальные исходные силовые параметры задачи равны нулю.

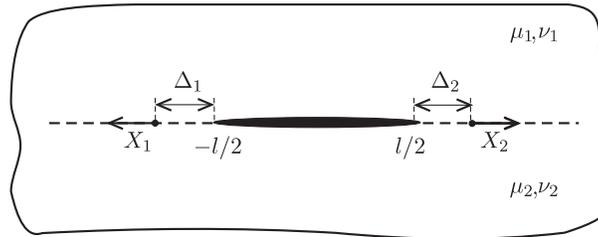


Рис. 1. Составная плоскость растягивается двумя горизонтальными сосредоточенными силами

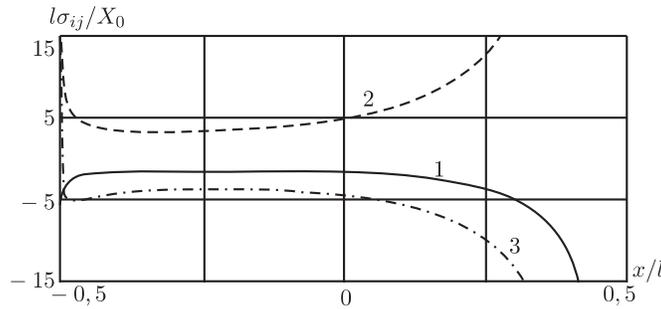


Рис. 2. Эпюры контактных напряжений

На рис. 2 приведены эпюры контактных напряжений на сторонах включения. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $l\sigma_y^+/X_0$ ,  $l\sigma_y^-/X_0$  и  $l\tau_{xy}^-/X_0$ . Графики коэффициентов интенсивности напряжений  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  (кривые 1, 2, 3 соответственно) в зависимости от расстояния  $\Delta_1$  при фиксированном  $\Delta_2 = l$  и от длины  $l$  включения при фиксированных  $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$  представлены на рис. 3.

Для случая составной плоскости с упругими параметрами  $\nu_1 = 0,37$ ,  $\nu_2 = 0,22$ ,  $\mu_* = 4,35$ , когда  $\lambda_1 = -0,644 + i0,765$ ,  $\lambda_2 = -0,996 - i0,086$ ,  $\lambda_3 = -0,736 - i0,677$ ,  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 1$ , соответствующие графики коэффициентов интенсивности напряжений приведены на рис. 4. На первом рисунке

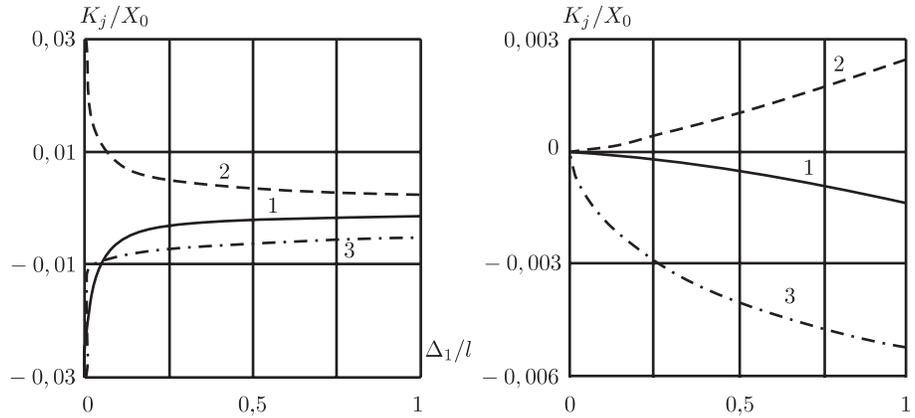


Рис. 3. Графики коэффициентов интенсивности напряжений

расстояние  $\Delta_2 = l$  фиксировано и меняется  $\Delta_1$ , а на втором рисунке  $\Delta_1 = 1$ ,  $\Delta_2 = 0.1$  и меняется длина включения  $l$ . В обоих случаях в точках  $z_1 = \Delta_1 + l/2$  и  $z_2 = -\Delta_2 - l/2$  действуют сосредоточенные силы  $X_1 + iY_1 = -(0, 1 + i)Y_0$  и  $X_2 + iY_2 = (0, 1 + i)Y_0$  ( $Y_0 > 0$ ) соответственно.

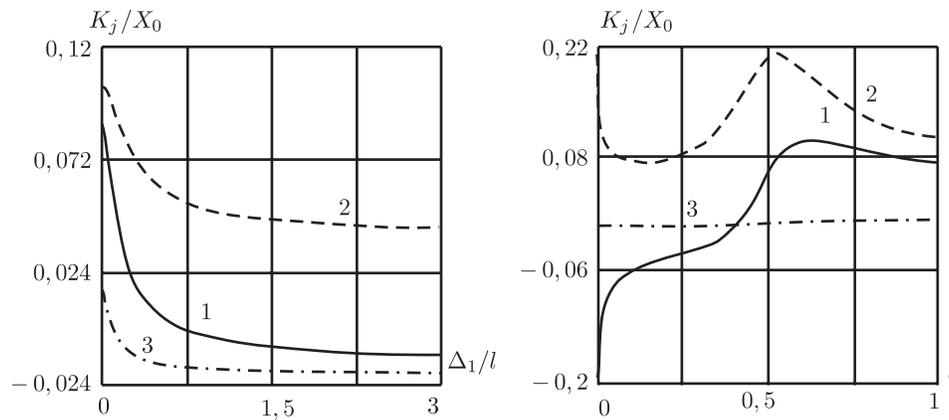


Рис. 4. Графики коэффициентов интенсивности напряжений

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 07-01-00038.

## Литература

- [1] Rice, J.R. Plane problems of cracks in dissimilar media / J.R. Rice, G.C. Sih // Transactions of ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1965. – No. 32(2). – P. 418–423.
- [2] Черепанов, Г.П. Механика разрушения композиционных материалов / Г.П. Черепанов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.

- [3] Мухелишвили, Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
- [4] Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Поступила в редакцию 15/V/2007;  
в окончательном варианте — 15/V/2007.

## PARTIALLY DETACHED THIN RIGID INCLUSION BETWEEN DIFFERENT ELASTIC MATERIALS WITH FRICTION IN A CONTACT ZONE

© 2007 I.I. Il'ina<sup>3</sup> V.V. Silvestrov<sup>4</sup>

The stressed state of a piecewise-homogeneous elastic plane which is formed of two different half-planes by glued them together and contains thin rigid smooth inclusion on their line connection is studied. One side of inclusion is perfectly connected to elastic body. Other side of inclusion is detached from elastic body and contacts to body with friction. The finite set of the concentrated forces and pairs of forces is enclosed to a plane outside of inclusion.

The complex potentials describing the stressed state of the plane are found in explicit form using the Riemann-Hilbert matrix boundary-value problem. The behaviour of stresses near the inclusion tips is studied.

Paper received 15/V/2007.

Paper accepted 15/V/2007.

---

<sup>3</sup>Il'ina Irina Igorevna (ir\_rus@mail.ru), Dept. of Higher Mathematics, Chuvash State University, Cheboksary, 428015, Russia.

<sup>4</sup>Silvestrov Vasily Vasilyevich (v\_silvestrov@mail.ru), Dept. of Higher Mathematics, Oil and Gas Russian State University, Moscow, 119991, Russia.