

О ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ¹

© 2007 С.А. Гришин²

Исследовалась задача о флаттере цилиндрической консольно закрепленной оболочки под действием истекающего из нее сверхзвукового потока газа. Оболочка считалась упругой однородной изотропной, описываемой уравнениями технической теории оболочек в смешанной форме [1]. При таком описании требуется найти две скалярные функции на срединной поверхности: нормальный прогиб и функцию мембранных усилий. Краевые условия, соответственно, должны быть сформулированы в терминах этих функций и производных от них. По смыслу задачи исключительно важно, чтобы в отсутствие взаимодействия с потоком условия обеспечили консервативность механической системы.

1. Получим краевые условия линейной технической теории оболочек для случая цилиндрической консоли. В соответствии с общими формулами [1, с. 26, 27, 41, 45–47, 66] в принятых там обозначениях имеем:

$$k_1 = 0; \quad k_2 = \frac{1}{R}; \quad \alpha = k_2 x = \xi; \quad \beta = \varphi = k_2 y; \quad A = B = R; \quad (1)$$

$$T_1 = \frac{1}{R^2} F_{\varphi\varphi}; \quad T_2 = \frac{1}{R^2} F_{\xi\xi}; \quad S = -\frac{1}{R^2} F_{\varphi\xi}; \quad (2)$$

$$\chi_1 = \frac{1}{R^2} w_{\xi\xi}; \quad \chi_2 = \frac{1}{R^2} w_{\varphi\varphi}; \quad \tau = \frac{1}{R^2} w_{\varphi\xi}; \quad (3)$$

$$\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2; \quad \nabla^2 = \frac{1}{R^2} (\partial_{\xi\xi} + \partial_{\varphi\varphi}); \quad \nabla_k^2 = \frac{1}{R^3} \partial_{\xi\xi}; \quad (4)$$

$$M_1 = -\frac{D}{R^2} (w_{\xi\xi} + \nu w_{\varphi\varphi}) = -D (\nabla^2 w - \frac{1-\nu}{R^2} w_{\varphi\varphi}); \quad (5)$$

$$Q_1 = -\frac{D}{R} (\nabla^2 w)_{\xi} = -\frac{D}{R^3} \partial_{\xi} (\partial_{\xi\xi} + \partial_{\varphi\varphi}) w; \quad (6)$$

$$Eh \varepsilon_{22} = T_2 - \nu T_1 = \frac{1}{R^2} (F_{\xi\xi} - \nu F_{\varphi\varphi}) = \nabla^2 F - \frac{1+\nu}{R^2} F_{\varphi\varphi}; \quad (7)$$

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором А.В. Манжировым.

²Гришин Сергей Анатольевич, Институт проблем механики РАН, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

$$H = -D(1 - \nu)\tau. \quad (8)$$

В этих формулах индексами ξ , φ обозначено дифференцирование по ξ , φ . Координата ξ отсчитывается вдоль образующей и изменяется в пределах от ξ_0 до ξ_1 .

Рассмотрим билинейную форму пары двумерных векторов (z, Φ) , (w, F) , отвечающую линейной части основной системы:

$$\int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (z, \Phi) \begin{pmatrix} D\nabla^4 & -\nabla_k^2 \\ \nabla_k^2 & (Eh)^{-1}\nabla^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ F \end{pmatrix} R^2 d\xi d\varphi. \quad (9)$$

Матрицы умножаются стандартно, умножение компонент некоммукативно. Подынтегральная функция представляет собой сумму четырех слагаемых

$$D(z, \nabla^4 w) - (z, \nabla_k^2 F) + (\Phi, \nabla_k^2 w) + (Eh)^{-1}(\Phi, \nabla^4 F). \quad (10)$$

Начнем с рассмотрения первого:

$$(z, \nabla^4 w) = \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} z \nabla^4 w R^2 d\xi d\varphi. \quad (11)$$

Преобразовав внутренний интеграл по частям дважды, получим

$$\begin{aligned} R^2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} z \nabla^4 w d\xi &= [z(\nabla^2 w)_\xi - z_\xi \nabla^2 w] \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} + \\ &+ \frac{1}{R^2} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (z_{\xi\xi} w_{\xi\xi} + z_{\xi\xi} w_{\varphi\varphi} + z w_{\xi\xi\varphi\varphi} + z w_{\varphi\varphi\xi\xi}) d\xi. \end{aligned} \quad (12)$$

Для любых периодических по φ функций f , g интегрирование по частям дает

$$\int_0^{2\pi} f g_{\varphi\varphi} d\varphi = - \int_0^{2\pi} f_\varphi g_\varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} f_{\varphi\varphi} g d\varphi. \quad (13)$$

Применив это равенство дважды, к функциям $f = z$, $g = w_{\xi\xi}$ и $f = z$, $g = w_{\varphi\varphi}$, и используя (12), получим

$$\begin{aligned} (z, \nabla^4 w) &= \int_0^{2\pi} [z(\nabla^2 w)_\xi - z_\xi \nabla^2 w] \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} d\varphi + \\ &+ \frac{1}{R^2} \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (z_{\xi\xi} w_{\xi\xi} + z_{\xi\xi} w_{\varphi\varphi} + z_{\varphi\varphi} w_{\xi\xi} + z_{\varphi\varphi} w_{\varphi\varphi}) d\xi d\varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Подынтегральная функция в двойном интеграле (14) переписывается в виде

$$(z_{\xi\xi} + z_{\varphi\varphi})(w_{\xi\xi} + w_{\varphi\varphi}) = R^4 \nabla^2 z \nabla^2 w. \quad (15)$$

Контурный интеграл правой части (14) доставляет материал для строительства краевых условий. Прибавив и вычтя внутри квадратной скобки в (14) член $R^{-2}(1-\nu)z_{\xi}w_{\varphi\varphi}$, выделим множителем при z_{ξ} линейную форму, пропорциональную изгибающему моменту M_1 . Имея далее целью создать симметричную по z , w граничную форму, прибавим и вычтем затем член $R^{-2}(1-\nu)zw_{\varphi\varphi\xi}$. Тогда получим:

$$\begin{aligned} z(\nabla^2 w)_{\xi} - z_{\xi}\nabla^2 w &= \\ &= z(\nabla^2 w)_{\xi} - z_{\xi}\left(\nabla^2 w - \frac{1-\nu}{R^2}w_{\varphi\varphi}\right) - \frac{1-\nu}{R^2}z_{\xi}w_{\varphi\varphi} = \\ &= z\left[(\nabla^2 w)_{\xi} + \frac{1-\nu}{R^2}w_{\varphi\varphi\xi}\right] - z_{\xi}\left[\nabla^2 w - \frac{1-\nu}{R^2}w_{\varphi\varphi}\right] - \frac{1-\nu}{R^2}[zw_{\varphi\varphi}]_{\xi}. \end{aligned} \quad (16)$$

Контурный интеграл из (14) запишется в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[z(\nabla^2 w)_{\xi} - z_{\xi}\nabla^2 w \right] \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} d\varphi &= \\ &= \int_0^{2\pi} \left[z\left[(\nabla^2 w)_{\xi} + \frac{(1-\nu)}{R^2}w_{\varphi\varphi\xi}\right] - \right. \\ &\quad \left. - z_{\xi}\left[\nabla^2 w - \frac{(1-\nu)}{R^2}w_{\varphi\varphi}\right] + \frac{(1-\nu)}{R^2}[z_{\varphi}w_{\varphi}]_{\xi}\right] \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} d\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее слагаемое (16) было проинтегрировано по частям, как в (13), первые два — оставлены без изменений.

2. Сравнив с (3), (5), (6), (8), видим, что вторая квадратная скобка правой части (17) пропорциональна M_1 , как и говорилось выше, первая же — пропорциональна так называемой *обобщенной перерезывающей силе*

$$\tilde{Q}_1 = Q_1 + \frac{1}{R}\partial_{\varphi}H. \quad (18)$$

Наглядная механическая трактовка этого понятия имеется в [2, с. 56] или [3, с. 113]. Далее для краткости будем называть $\tilde{Q}_w$, M_w линейные формы от функции w , заключенные соответственно в первую и вторую квадратные скобки правой части (17).

Краевые условия заделки при $\xi = \xi_0$ и свободного края при $\xi = \xi_1$ записываются в виде

$$w \Big|_{\xi_0} = w_{\xi} \Big|_{\xi_0} = M_w \Big|_{\xi_1} = \tilde{Q}_w \Big|_{\xi_1} = 0. \quad (19)$$

При выполнении (19) два первых слагаемых контурного интеграла (17) обращаются в нуль, а последнее можно преобразовать к виду двойного интеграла от симметричного по аргументам z , w выражения. В итоге получим, что на линеале функций z , w , подчиненных (19), определено псевдоскаляр-

ное произведение

$$\begin{aligned} \langle z, w \rangle &\equiv (z, \nabla^4 w) = (\nabla^4 z, w) = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\nabla^2 z \nabla^2 w + \frac{1-\nu}{R^4} (z_\varphi w_\varphi)_{\xi\xi} \right] R^2 d\xi d\varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Форма

$$(\Phi, \nabla^4 F) = \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \Phi \nabla^4 F R^2 d\xi d\varphi, \quad (21)$$

отвечающая последнему члену суммы (10), обрабатывается аналогично. Формулы (12)–(15) просто переписываются в новых обозначениях. Далее множителем при Φ_ξ выделяется форма M_F , отличающаяся от M_w заменой $-\nu$ на $+\nu$ и пропорциональная ϵ_{22} из (7). Неиспользованное слагаемое $-R^{-2}(1+\nu)\Phi_\xi F_{\varphi\varphi}$ симметризуется прибавлением и вычитанием $R^{-2}(1+\nu)\Phi F_{\varphi\varphi\xi}$, после чего выделяется форма $\tilde{Q}_F$, а симметричная по аргументам часть преобразуется обратно в двойной интеграл:

$$\begin{aligned} (\Phi, \nabla^4 F) &= \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\Phi \left[(\nabla^2 F)_\xi + \frac{1+\nu}{R^2} F_{\varphi\varphi\xi} \right] - \Phi_\xi \left[\nabla^2 F - \frac{1+\nu}{R^2} F_{\varphi\varphi} \right] \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} d\varphi + \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\nabla^2 \Phi \nabla^2 F + \frac{1+\nu}{R^4} (\Phi_\varphi F_\varphi)_{\xi\xi} \right] R^2 d\xi d\varphi. \end{aligned} \quad (22)$$

Краевые условия заделки при $\xi = \xi_0$ и свободного края при $\xi = \xi_1$ записываются в виде, симметричном (19):

$$F \Big|_{\xi_1} = F_\xi \Big|_{\xi_1} = M_F \Big|_{\xi_0} = \tilde{Q}_F \Big|_{\xi_0} = 0. \quad (23)$$

Если $F(\xi_1) = 0 \ \forall \varphi$, то дифференцируя по φ дважды и сравнивая с (2), получим $T_1(\xi_1) = 0$. Аналогично из условия $F_\xi(\xi_1) = 0 \ \forall \varphi$ следует, что $S(\xi_1) = 0$. Таким образом, в отличие от общей теории, здесь на свободном контуре равняется нулю не обобщенное сдвигающее усилие $\tilde{S} = S + 2R^{-1}H$ [2, с. 57], а традиционное.

С другой стороны, из условия $T_1(\xi_1) = 0$ следует $F_{\varphi\varphi}(\xi_1) = 0$, откуда $F(\xi_1) = A\varphi + B$. Из условия $S(\xi_1) = 0$ следует $F_\xi(\xi_1) = C$. Константа A должна быть взята нулевой из требования периодичности F . Константы B и C могут быть положены равными нулю, поскольку в уравнениях технической теории для цилиндра фигурируют только вторые производные от F по координатам. Значит, F определяется с точностью до линейного члена.

Наконец проинтегрируем по частям сумму второго и третьего слагаемых (10):

$$\begin{aligned} -(z, \nabla_k^2 F) + (\Phi, \nabla_k^2 w) = \\ = \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \left(-z F_{\xi\xi} + \Phi w_{\xi\xi} \right) \Big|_{\xi_0}^{\xi_1} d\varphi + \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} (z_{\xi} F_{\xi} - \Phi_{\xi} w_{\xi}) d\xi d\varphi. \end{aligned} \quad (24)$$

Под двойным интегралом в (24) стоит кососимметричная форма, обращающаяся в нуль при $z \equiv w$, $F \equiv \Phi$. Контурный интеграл равен нулю при $\xi = \xi_0$ за счет условий (19) $w(\xi_0) = w_{\xi}(\xi_0) = 0$, поэтому обратить его в нуль при $\xi = \xi_1$ можно только взяв $F(\xi_1) = F_{\xi}(\xi_1) = 0$, что и было сделано в (23). Именно это обстоятельство является основным при выборе условий в виде $F(\xi_1) = \tilde{Q}_F(\xi_0) = 0$ (выбор $F(\xi_0) = \tilde{Q}_F(\xi_1) = 0$ также обращает в нуль контурный интеграл в (22), но не зануляет интеграл в (24)). Подобно (20) формула (22) определяет для функций Φ , F из линеала, заданного условиями (23), псевдоскалярное произведение

$$\langle \Phi, F \rangle = (\Phi, \nabla^4 F) = (\nabla^4 \Phi, F). \quad (25)$$

Покажем, что на самом деле (20) и (25) суть скалярные произведения. Обозначим $\kappa = 1 \mp \nu > 0$. Рассмотрим квадратичную форму

$$\int_0^{2\pi} \left((f_{\xi\xi} + f_{\varphi\varphi})^2 + \kappa (f_{\varphi}^2)_{\xi\xi} \right) d\varphi. \quad (26)$$

Выполним дифференцирования в последнем слагаемом (26):

$$(f_{\varphi}^2)_{\xi\xi} = 2(f_{\varphi\xi}^2 + f_{\varphi} f_{\xi\xi\varphi}). \quad (27)$$

Проинтегрируем по частям последнее слагаемое (27) и воспользуемся формулой (13):

$$\int_0^{2\pi} f_{\varphi} f_{\xi\xi\varphi} d\varphi = - \int_0^{2\pi} f_{\varphi\varphi} f_{\xi\xi} d\varphi. \quad (28)$$

Подставив (27), (28) в (26), увидим, что подынтегральная форма содержит только вторые производные, которые обозначим

$$a = f_{\xi\xi}; \quad b = f_{\varphi\varphi}; \quad c = f_{\varphi\xi}. \quad (29)$$

В каждой точке области интегрирования это просто действительные числа. Подынтегральную функцию из (26) перепишем в виде

$$(a + b)^2 + 2\kappa(c^2 - ab) = (a \pm \nu b)^2 + (1 - \nu^2)b^2 + 2(1 \mp \nu)c^2 \geq 0. \quad (30)$$

Интеграл от формы (30) тем более неотрицателен. Равенство нулю в (30) достигается если и только если $a = b = c = 0$, что отвечает в силу (29) функциям вида $f = A\varphi + B\xi + C$, где A , B , C — константы. Если положить $f = w$ (верхний знак в (30)), краевые условия (19) немедленно влекут

$A = B = C = 0$. Для $f = F$ (нижний знак в (30)) совершенно аналогично из (23) вытекает, что $F \equiv 0$.

Таким образом, для консольного цилиндра имеем восемь условий (19), (23), по четыре независимых на каждую из искоемых функций w , F . Это обстоятельство позволяет работать в прямом произведении линеалов (достаточно гладких) функций w , подчиненных (19), и F , подчиненных (23). Формулы (20), (22) вносят в эти линеалы структуру отделимого евклидова пространства.

3. Теперь выясним, как связана форма (9) с энергией деформации оболочки. Возьмем функции $z \equiv w$, $\Phi \equiv F$, удовлетворяющие (19), (23) соответственно, подставим их в (9), воспользуемся (20), (22), (2), (3), (4). Тогда получим:

$$\begin{aligned}
D\langle w, w \rangle + (Eh)^{-1} \langle F, F \rangle = \\
= D \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[(\nabla^2 w)^2 + \frac{1-\nu}{R^4} (w_{\varphi}^2)_{\xi\xi} \right] R^2 d\xi d\varphi + \\
+ \frac{1}{Eh} \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[(\nabla^2 F)^2 + \frac{1+\nu}{R^4} (F_{\varphi}^2)_{\xi\xi} \right] R^2 d\xi d\varphi = \\
= D \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} [(\chi_1 + \chi_2)^2 + 2(1-\nu)(\tau^2 - \chi_1\chi_2)] R^2 d\xi d\varphi + \\
+ \frac{1}{Eh} \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} [(T_1 + T_2)^2 + 2(1+\nu)(S^2 - T_1T_2)] R^2 d\xi d\varphi = \\
= D \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} [\chi_1^2 + \chi_2^2 + 2\nu\chi_1\chi_2 + 2(1-\nu)\tau^2] R^2 d\xi d\varphi + \\
+ \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2(1-\nu)\left(\frac{\varepsilon_{12}}{2}\right)^2 \right] R^2 d\xi d\varphi = \\
= D \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\frac{1+\nu}{2}(\chi_1 + \chi_2)^2 + \frac{1-\nu}{2}(\chi_1 - \chi_2)^2 + 2(1-\nu)\tau^2 \right] R^2 d\xi d\varphi + \\
+ \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_0^{2\pi} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \left[\frac{1+\nu}{2}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 + \right. \\
\left. + \frac{1-\nu}{2}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\varepsilon_{12}}{2}\right)^2 \right] R^2 d\xi d\varphi.
\end{aligned} \tag{31}$$

При преобразовании интеграла от тангенциальных усилий использованы соотношения упругости в форме

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}); & T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}); \\ S &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(1-\nu)\frac{\varepsilon_{12}}{2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Формула (31) отличается от формулы (1.112) из [2, с. 46] для потенциальной энергии деформации в общей линейной теории оболочек только отсутствием множителя $1/2$. Однако выражения (3) приращений кривизны и кручения через смещения в технической теории оболочек [1, с. 45] отличаются от соответствующих формул общей теории [2, с. 29], [1, с. 39] весьма заметно. Именно, в технической теории отброшены все члены, содержащие тангенциальные смещения и их производные по координатам. Поэтому можно сказать, что форма энергии растяжения–сжатия–сдвига в технической теории точна, форма энергии изгиба–скручивания — приближенна. Это обстоятельство и является причиной, по которой краевые условия (19), (23) не похожи на соответствующие условия общей теории оболочек.

4. Выясним смысл условия $\tilde{Q}_F|_{\xi_0} = 0$. Из формул (22), (2), (32) получим:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_F &= \left[\nabla^2 F + \frac{1+\nu}{R^2} F_{\varphi\varphi} \right]_{\xi} = (T_1 + T_2)_{\xi} - (1+\nu)S_{\varphi} = \\ &= (T_2 - \nu T_1 + \nu T_1 + (2+\nu)T_1)_{\xi} = Eh \varepsilon_{22\xi} + 2(1+\nu)T_{1\xi} = \\ &= Eh \varepsilon_{22\xi} - 2(1+\nu)S_{\varphi} = Eh(\varepsilon_{22\xi} - \varepsilon_{12\varphi}). \end{aligned} \quad (33)$$

Теперь запишем формулы, выражающие в технической теории тангенциальные деформации через смещения [1, с. 45]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= R^{-1}u_{\xi} - \frac{1}{2}R^{-2}w_{\xi}^2; & \varepsilon_{22} &= R^{-1}v_{\varphi} - R^{-1}w - \frac{1}{2}R^{-2}w_{\varphi}^2; \\ \varepsilon_{12} &= R^{-1}v_{\xi} + R^{-1}u_{\varphi} + R^{-2}w_{\xi}w_{\varphi}. \end{aligned} \quad (34)$$

Пусть заданы общие условия заделки:

$$u|_{\xi_0} = v|_{\xi_0} = w|_{\xi_0} = w_{\xi}|_{\xi_0} = 0. \quad (35)$$

Тогда из второго равенства (34) следует, что $\varepsilon_{22}|_{\xi_0} = 0$, а из (7), что $M_F|_{\xi_0} = 0$. Дифференцируя второе равенство (34) по ξ , а третье — по φ и вычитая, получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22\xi} - \varepsilon_{12\varphi} &= R^{-1}[v_{\varphi\xi} - v_{\xi\varphi}] - \\ &- [R^{-1}(w_{\xi\xi} + u_{\varphi\varphi}) - R^{-2}w_{\varphi}w_{\varphi\xi} - R^{-2}(w_{\xi\varphi}w_{\varphi} + w_{\xi}w_{\varphi\varphi})]. \end{aligned} \quad (36)$$

Первая квадратная скобка правой части (36) равна нулю всегда, а вторая — при $\xi = \xi_0$ в силу (35). Поэтому (36), (33) влекут $\tilde{Q}_F|_{\xi_0} = 0$. В результате из традиционных условий (34) вытекают (19).

Пусть напротив выполнены условия (19). Перепишем две последние формулы (34) так:

$$u_{\varphi} = R\varepsilon_{12} - v_{\xi} - R^{-1}w_{\xi}w_{\varphi}; \quad v_{\varphi} = R\varepsilon_{22} + w + \frac{1}{2}R^{-1}w_{\varphi}^2. \quad (37)$$

В силу (19), (7) $v_\varphi|_{\xi_0} = 0$. Откуда $v = C_1 = \text{const}$ ($\xi = \xi_0$). Первое равенство (37) дифференцируем по φ , второе — по ξ , подставляем в первое и полагаем $\xi = \xi_0$. Тогда

$$u_{\varphi\varphi}|_{\xi_0} = [R(\varepsilon_{12} \varphi - \varepsilon_{22} \xi) - R^{-1}(2w_\varphi w_{\xi\varphi} + w_\xi w_{\varphi\varphi}) - w_\xi]|_{\xi_0} = 0 \quad (38)$$

в силу (19). Рассматриваем (38) как обыкновенное дифференциальное уравнение на контуре $\xi = \xi_0$. Его общее решение

$$u|_{\xi_0} = C_3\varphi + C_2; \quad C_3, C_2 = \text{const}.$$

Из условия периодичности следует, что $C_3 = 0$.

Итак, контур $\xi = \xi_0$ при выполнении условий (19) может только поворачиваться как твердое тело вокруг оси симметрии или двигаться поступательно вдоль нее. Такие движения можно исключить, положив $C_1 = C_2 = 0$. Тогда придем к условиям (35).

Суммируя сказанное, можно назвать равенство $\tilde{Q}_F|_{\xi_0} = 0$ условием однозначной восстановимости окружного смещения v из системы (34).

Задача о флаттере решалась также и для консольно закрепленной конической оболочки. В работе [4] подробно рассмотрен частный случай осевой симметрии. Краевые условия общего случая получаются выкладками, аналогичными приведенным в настоящей статье.

Литература

- [1] Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. — М.: Наука, 1978. — 359 с.
- [2] Новожилов, В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И. Михайловский. — Л.: Политехника, 1991. — 656 с.
- [3] Панагиотопулос, П. Неравенства в механике и их приложения / П. Панагиотопулос. — М.: Мир, 1989. — 494 с.
- [4] Александров, В.М. Динамика конической оболочки при внутреннем сверхзвуковом потоке газа / В.М. Александров, С.А. Гришин // Прикл. мат. и мех. — 1994. — Т. 58. — Вып. 4. — С. 123–132.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.

DYNAMIC PROBLEM FOR THE SHELLS TECHNICAL THEORY EQUATIONS IN MIXED FORM³

© 2007 S.A. Grishin⁴

The flutter problem for a cylindrical clamped-free shell under the effect of the supersonic gas flow ejected from it is studied. The shell is assumed to be elastic isotropic and homogeneous, modelled with the equations of the technical theory of shells in the mixed form [1]. For such a model we have to find two scalar functions on the shell middle surface: the normal deflexion and the membrane-stress potential. The boundary conditions therefore also must be formulated in terms of these functions and their derivatives. It is extremely important that the mechanical system is conservative when no flow interacts with it.

Paper received 15/V/2007.

Paper accepted 15/V/2007.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.V. Manzhurov.

⁴Grishin Sergey Anatolievich, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia.