УДК 539.3

К ТЕОРИИ БЛОЧНЫХ И НАНО СТРУКТУР

© 2007 В.А. Бабешко, О.В. Евдокимова, О.М. Бабешко[1]

Введение

В работе [1], интегральный и дифференциальный методы факторизации развиваются для совокупности различных областей, граничащих между собой, называемых блочными структурами. При применении этого метода возникают сложности при удовлетворен граничных условий на границе блоков. Из [2] следует, что построенные методом факторизации решения краевой задачи на границе имеют наряду с классическими, также и составляющие в виде обобщенных функций — δ-функций и их производных. В настоящей работе показано, каким образом преодолеваются эти сложности при применении дифференциального метода факторизации в блочных структурах.

1. Ниже под блочными структурами понимаются материалы, занимающие ограниченные, полуограниченные или неограниченные области, называемые контактирующими блоками. Предполагается, что в блочной структуре каждый блок обладает своими специфическими свойствами поведения при воздействии физическими полями различной природы. Считается, что эти поля описываются краевыми задачами для систем связанных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Среды такого типа свойственны строению коры Земли [3], конструкционным материалам, находящимся в сложных физико-механических условиях [4], нано материалам, кристаллическим структурам разнотипной компоновки, материалам электроники [5]. Аналогичное строение имеют и различные материалы, в том числе создаваемые на основе комбинации как только нано размерных, так и макро и нано размерных составляющих [6]. В данной работе рассматривается случай структуры, блоки которой являются трехмерными. Отсутствие существенных ограничений на краевые задачи, описывающие свойства отдельных блоков, свидетельствует о том, что рассматриваемые блочные структуры могут иметь большое разнообразие свойств. В общем случае понятие блока включает в себя требова-

[1]Бабешко Владимир Андреевич (babeshko@kubsu.ru), Евдокимова Ольга Владимировна, Бабешко Ольга Мефодьевна, Кубанский государственный университет, 350040, Россия, г. Краснодар, ул. Ставропольская, 149.

ние неизменности границы области задания краевой задачи, в том числе многосвязной, и требования ее кусочной гладкости. Каждый блок может быть как ограниченным, так и неограниченным и в нем могут протекать связанные процессы механики деформируемого твердого тела, гидромеханики, электромагнитные, диффузионные, тепловые, акустические и другие процессы. Введенные блочные структуры, являются более общими, чем кусочно-однородные структуры, предполагающие лишь скачкообразное изменение физических параметров среды при переходе от блока к блоку, с сохранением материала среды. Последнее выражается в скачкообразном изменении отдельных коэффициентов дифференциальных уравнений краевых задач, происходящем при переходе из блока в блок с сохранением типа краевой задачи. Естественно, введенные блочные структуры имеют более широкий спектр свойств, чем кусочно-однородные. Это вытекает как из разнообразия свойств блоков, их формы, характера взаимодействия блоков между собой, так и как результат взаимодействия физических полей блоков, ряд из которых ими излучается или трансформируется, проходя через них. Частным случаем блочных структур являются слоистые структуры. Такие структуры с плоскими границами для линейных краевых задач можно считать в настоящее время достаточно полно исследованными. Исследование блочных структур проводится, в основном, численными методами, для которых наличие неограниченных областей всегда создает трудности. Дифференциальный метод факторизации, являясь обобщением метода интегральных преобразований, позволяет, уже на этапе решения краевой задачи отвечать на ряд вопросов относительно свойств физических полей в каждом блоке. Целесообразно заметить, что интегральные преобразования в краевой задаче в области $\boldsymbol{\Omega}$ для дифференциальных уравнений в частных производных оказываются удобным инструментом для исследований в тех случаях, когда дифференциальные уравнения, область $\boldsymbol{\Omega}$ и функции, описывающие интегральное преобразование — согласованы. Под согласованностью понимается возможность трансформации дифференциальных уравнений в частных производных в обыкновенные в результате применения интегрального преобразования, и задание граничных условий на границе, описываемой постоянными значениями геометрических параметров. Такое свойство имеет место, если функции интегральных преобразований являются собственными для дифференциального оператора в рассматриваемой области $\boldsymbol{\Omega}$. В терминах топологической алгебры это свойство будет иметь место в том случае, если группы преобразований, порождаемые автоморфизмом многообразия $\boldsymbol{\Omega}$, имеют представления, которые инвариантны относительно дифференцируемого отображения векторного поля, заданного на этом многообразии. Для ряда простых областей, которые будем называть классическими, это преобразования Фурье в областях с плоскими границами, преобразования Бесселя в областях с круговыми границами, преобразования Бесселя–Лежандра в областях со сферическими границами, применяемые, например, к уравнениям с постоянными коэффициентами Гельмгольца, Шредингера, Ламе, Навье–Стокса [7]. В [8] показано, что эти и другие интегральные преобразования являются следствием тех или иных отображений на себя многообразий, порождающих группы преобразований пространства, их движений. Представления этих групп достигаются введением специальных функций, о которых говорилось выше. В тех случаях, когда области относятся к классическим, краевые задачи решаются сравнительно просто: сводятся к простым функциональным или обыкновенным дифференциальным уравнениям после интегрального преобразования, затем применяется интегральное обращение.

Если области сложные, то для анализа подобных краевых задач применим, дифференциальный метод факторизации, который позволяет сводить краевые задачи к функциональным уравнениям с понижением размерностей последующих задач.

2. Сформулируем краевую задачу для блочной структуры. Будем считать, что область Ω блочной структуры состоит из областей Ω_b, $(b = 1, 2, \ldots, B)$ с границами $\partial\Omega_b$. Может оказаться, что часть границы блока является общей с границей другого блока, ее называем контактирующей. Остальная часть, не контактирующая, может быть свободной или подчиненной внешним воздействиям. Предполагается, что в каждой области Ω_b ставится краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными, своими в каждой области, коэффициентами.

Краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений в частных производных в блочной трехмерной области Ω, можно записать для каждого блока в виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{K}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_b = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A^b_{spmnk}\boldsymbol{\varphi}^{(m)(n)(k)}_{b_p, x_1x_2x_3} = 0, \\
s = 1,\ 2,\ \ldots,\ P_b, \\
A^b_{sqmnk} = \text{const}, \qquad \boldsymbol{\varphi}_b = \{\varphi_{b_1},\ \varphi_{b_2},\ \ldots,\ \varphi_{b_P}\}, \quad b = 1, 2, \ldots, B, \\
\boldsymbol{\varphi} = \{\boldsymbol{\varphi}_s\}, \qquad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1,\ x_2,\ x_3), \qquad \mathbf{x} = \{x_1,\ x_2,\ x_3\}, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_b.
\end{gathered} \tag{1}$$

На общей, контактирующей, границе $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d$ задаются следующие граничные условия сопряжения

$$\begin{gathered}
\mathbf{R}_b(\partial x_1,\ \partial x_2,\ \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_b + \mathbf{R}_d(\partial x_1,\ \partial x_2,\ \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_d = \\
= \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P} [\ B^b_{spmnk}\boldsymbol{\varphi}^{(m)(n)(k)}_{b_p, x_1x_2x_3} + B^d_{spmnk}\boldsymbol{\varphi}^{(m)(n)(k)}_{d_p, x_1x_2x_3}\ ] = \mathbf{f}_{bds}, \\
s = 1, 2, \ldots, s_{b_0} < P, \qquad \mathbf{x} \in \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d, \\
M_1 < M, \quad N_1, < N, \quad K_1 < K, \qquad b,\ d = 1, 2, \ldots, B.
\end{gathered} \tag{2}$$

Краевая задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s(\Omega)$, описанных в [1].

Эти граничные условия в общем виде описывают случай контакта блоков, когда на общих границах принимается условие совпадения необходимых компонент физических полей, продиктованные соответствующими физическими законами. Например, в задачах термоэлектроупругости эти соотношения приведены в [9]. В частности, условия (2) могут быть намного проще — не иметь на границе внешних воздействий $\mathbf{f}_{bds}$ и представлять лишь требование равенства на общей границе решений и их производных. Но как указано выше, это обстоятельство не позволяет приравнивать производные от решений, записанных в интегральной форме, поскольку их составляющими в методе факторизации являются обобщенные функции [2]. Если речь идет о частях границ блоков, не являющихся общими ни с каким другим блоком, то на них принимаются граничные условия краевой задачи, рассмотренной в работы [1]. Изложим схему применения дифференциального метода факторизации к таким областям.

Следуя дифференциальному методу факторизации [1], сведем краевую задачу к системе функциональных уравнений, рассматривая каждую область $\mathbf{\Omega}_b$ в отдельности. В результате приходим к системе функциональных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\mathbf{K}_b(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Phi}_b = \iint\limits_{\partial\Omega_b} \boldsymbol{\omega}_b, \\ &\mathbf{K}_b\,(\boldsymbol{\alpha}) \equiv -\mathbf{K}_b\,(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{bnm}(\boldsymbol{\alpha})\|\,, \\ &b = 1, 2, ..., B. \end{aligned} \tag{3}$$

Вид и описание всех, участвующих в этой системе обозначений, заимствованы из [1], с добавлением индексов b. В частности, $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм краевой задачи в области $\mathbf{\Omega}_b$.

Сопоставляя настоящий случай с рассмотренным в [1], заметим, что граничные условия (2) в общем случае содержат значения решений и их производных на границе, по крайней мере, из двух соседних областей. Этим блочные структуры существенно отличаются от изучавшихся в [1].

3. В соответствии с правилами дифференциального метода факторизации дальнейшее исследование задачи предполагает факторизацию матрицы-функции $\mathbf{K}_b(\alpha_3^\nu)$, даваемой формулой (3). Для этого выберем матрицу-функцию $\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu, m)$ порядка $P-1$, получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером m у сопряженной матрицы-функции $\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu)$, такую, что нули ξ_n^ν ее определителя $Q_b(\boldsymbol{\alpha}_3^\nu) = \det \mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu, m)$ не совпадают с нулями z_{s+}^ν, z_{s-}^ν [1].

Обозначим элементы обратной матрицы-функции в виде

$$\left[\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu, m)\right]^{-1} = \left\|Q_b^{-1} Q_{psb}\right\|.$$

Тогда элементы матрицы-функции $\mathbf{K}_b^{-1}(\alpha_3^\nu,-)$, имеющей вид

$$\mathbf{K}_b^{-1}\left(\alpha_{3,}^\nu-\right)=\left\|\begin{matrix}1 & & & & & 0\\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} & \dots & S_{mN}\\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1\end{matrix}\right\| \tag{4}$$

допускают интегральное представление в форме

$$\begin{aligned}&S_{mp}(\alpha_3^\nu)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_\mp}\sum_{s=1}^{N}\frac{Q_{psb}(u_3)M_{sm}(u_3)du_3}{Q_b(u_3)K(u_3)(u_3-\alpha_3^\nu)}-(\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2})\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)},\quad m\neq p,\\ &\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{\mathbf{K_b}(\alpha_\mathbf{3}^\nu)}=\frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q_b(\alpha_3^\nu)\mathbf{K_b}(\alpha_\mathbf{3}^\nu)}+\sum_n\frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q_b'(\xi_n^\nu)\mathbf{K_b}(\xi_\mathbf{n}^\nu)(\xi_\mathbf{n}^\nu-\alpha_\mathbf{3}^\nu)},\\ &S_{mm}(\alpha_3^\nu)=\mathbf{K_b^{-1}}(\alpha_\mathbf{3}^\nu),\quad \alpha_\mathbf{3}^\nu\in\lambda_\mp,\\ &Z_{mp}(\alpha_3^\nu)=\sum_{s=1}^{N}{}'Q_{psb}(\alpha_3^\nu)M_{sm}(\alpha_3^\nu).\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь замкнутый контур Γ_+ занимает положение, при котором область λ_+ содержит только нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, а область λ_- — только нули $\boldsymbol{\xi}_n^\nu$. Замкнутый контур Γ_- охватывает область, содержащую все нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, $\boldsymbol{\xi}_n^\nu$. Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции $\mathbf{K}_b^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_3^\nu,-)$ являются рациональными функциями, единственными особенностями которых являются нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, причем член, содержащий их, $\mathbf{K}_b^{-1}(\boldsymbol{\alpha}_3^\nu,-)$, явно выделен.

Граничные условия в соответствии с алгоритмом применения дифференциального метода факторизации в случаях не контактирующих границ применяются в соответствии с правилами, оговоренными в [1] Удовлетворение граничных условий осуществляется по следующей схеме. Вначале граничные условия на не контактирующей границе для каждого отдельного блока вносятся в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3). При контакте блоков, на общих границах соседних блоков выполняются условия сопряжения (2), которые могут, в зависимости от свойств описываемых полей, включать некоторые соотношения для решений и их производных. В простейшем случае — это равенство на общей границе решений и их производных при переходе из одного блока в соседний. Эти соотношения должны быть внесены в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3), предварительно разрешенных относительно неизвестных на границе производных по нормали. Последнее обеспечит выполнение контактных граничных условий (2) при решении псевдодифференциальных уравнений, что доказывается по схеме, изложенной в [2].

Опуская дальнейшие преобразования, изложенные в [1], получаем в случае блоков, занимающих выпуклые области, представление решения в каждом блоке в виде

$$\boldsymbol{\varphi}_b(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{rb}^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_3^\nu\right)\mathbf{K}_b^{-1}\left(\boldsymbol{\alpha}_3^\nu, -\right)\iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_b e^{-i\langle\boldsymbol{\alpha}_3^\nu \mathbf{x}_3^\nu\rangle} d\boldsymbol{\alpha}_3^\nu d\boldsymbol{\alpha}_3^\nu d\boldsymbol{\alpha}_3^\nu, \quad \mathbf{x}^\nu \in \Omega_b.$$

Решение можно сделать более наглядным, вычислив интеграл по параметру $\boldsymbol{\alpha}_3^\nu$ по теории форм-вычетов Лере. В результате имеем

$$\boldsymbol{\varphi}_b\left(\mathbf{x}^\nu\right) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_s e^{-i\left(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu\right)}\left[\mathbf{K}_{rb}^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)\mathbf{T}_{+b}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu\right)e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} - \right.$$

$$\left. - \mathbf{K}_{rb}^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)\mathbf{T}_{-b}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu\right)e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu}\right] d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu,$$

$$t_{m\pm b}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s\pm}^\nu\right) = -\sum_{p=1}^{P}\iint\limits_{\partial\Omega_{\pm b}}\frac{\omega_{pb} Z_{mp}(z_{s\pm}^\nu)}{Q_b(z_{s\pm}^\nu)K_b'(z_{s\pm}^\nu)}, \quad b = 1, 2, ..., B,$$

$$\mathbf{T}_{\pm b} = \{0, 0, \dots, 0, t_{m\pm b}, 0, \dots, 0\}.$$

В этой формуле граница $\partial\Omega_b$ для выбранного $x_3^\nu < 0$, $\mathbf{x}^\nu \in \Omega_b$, разбита по следующему правилу:

$$\iint\limits_{\partial\Omega_b}\boldsymbol{\omega}_b = \iint\limits_{\partial\Omega_{+b}}\boldsymbol{\omega}_b + \iint\limits_{\partial\Omega_{-b}}\boldsymbol{\omega}_b,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{+b}}\boldsymbol{\omega}_b \exp(-i\alpha_1^\nu x_3^\nu) \to 0, \qquad \operatorname{Im}\alpha_1^\nu \to \infty,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{-b}}\boldsymbol{\omega}_b \exp(-i\alpha_1^\nu x_3^\nu) \to 0, \qquad \operatorname{Im}\alpha_1^\nu \to -\infty.$$

В случае, если блок вырождается в полупространство или слоистую среду, псевдодифференциальные уравнения, появляющиеся в процессе решения краевой задачи, вырождаются в алгебраические, после обращения которых решение строится в конечном виде [1].

В том случае, если рассматриваемый блок не является выпуклым телом, для исследования краевой задачи применяется метод обобщенной факторизации [10].

Замечание. Вопрос "сшивания" решений, получаемых в каждом блоке, в методе факторизации осуществляется автоматически при удовлетворении граничных условий. При наличии трещин, разломов или включений меньших размерностей, последние надо рассматривать как границы блоков. В результате получается однотипный алгоритм исследования блочных структур с указанными неоднородностями.

В том случае, когда блоки вырождаются в слои с плоско-параллельными границами, изложенный алгоритм исследования блочных структур приводит к решениям, полностью совпадающим с получаемыми традиционными методами интегральных преобразований по координатам, лежащим в граничной плоскости [11].

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ, (06-01-00295), (06-01-08017), (06-08-00671), программа Юг России, проекты — (06-01-96802)–(06-01-96805), (06-05-96806), (06-01-96634)–(06-01-96638), проект НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

Литература

[1] Бабешко, В.А. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова // ДАН. – 2006. – Т. 410. – №2. – С. 168–172.

[2] Бабешко, В.А. Выполнение граничных условий в дифференциальном методе факторизации / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко, О.В. Евдокимова. – ДАН. – 2007. (в печати)

[3] Садовский, М.А. Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс / М.А. Садовский, Л.Г. Болховитинов, В.Ф. Писаренко. – М.: Наука, 1987. – 104 с.

[4] Новацкий, В. Электромагнитные эффекты в твердых телах / В. Новацкий. – М.: Мир, 1986. – 160 с.

[5] Нефедов, Е.И. Широкополосные микрополосковые управляющие устройства СВЧ / Е.И. Нефедов, А.С. Саидов, А.Р. Тагилаев. – М.: Радио и связь, 1994. – 168 с.

[6] Гуткин, М.Ю. Физическая механика деформируемых наноструктур / М.Ю. Гуткин, И.А. Овидько. СПб.: Изд-во "Янус", 2003 – Т. 1. – С. 192; Т. 2. – С. 352.

[7] Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с.

[8] Виленкин, Н.Я. Специальные функции и теория представления групп / Н.Я. Виленкин. – М.: Наука, 1991. – 576 с.

[9] Ворович, И.И. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах / И.И. Ворович, В.А. Бабешко, О.Д. Пряхина. – М.: Научный мир, 1999. – 248 с.

[10] Бабешко, В.А. Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях / В.А. Бабешко, О.М. Бабешко // Докл. РАН. – 2003. – Т. 392. – №2. – С. 185–189.

[11] Бреховских, Л.М. Акустика слоистых сред / Л.М. Бреховских, О.А. Годин. – М.: Наука, 1989. – 412 с.

Поступила в редакцию 15/V/2007;
в окончательном варианте — 15/V/2007.