

## АВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗВИТИИ ТРЕЩИНЫ ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА

© 2007 В.И. Астафьев, Г.Д. Федорченко<sup>1</sup>

В работе представлено автомоделное решение задачи о развитии трещины гидроразрыва пласта (ГРП). Предполагается, что трещина ГРП ориентирована вертикально и исследование процесса ее развития можно провести в рамках связанной плоской задачи теории гидродинамики (течение вязких жидкостей) и линейной теории упругости (движение квазихрупких трещин). Найдены условия существования автомоделного решения, представлены зависимости характера изменения формы трещины ГРП, дебита закачиваемой в нее жидкости и давления в создаваемой трещине ГРП.

### Введение

Гидравлический разрыв пласта (ГРП) представляет собой механический метод воздействия на продуктивный пласт, состоящий в том, что он разрывается по плоскостям минимальной прочности под действием избыточного давления, создаваемого закачкой в скважину жидкости разрыва с расходом, который скважина не успевает поглощать. После разрыва под воздействием давления жидкости образовавшаяся трещина увеличивается, в развивающуюся трещину жидкостью разрыва транспортируется зернистый материал (пропант), закрепляющий берега трещины в раскрытом состоянии после снятия избыточного давления.

В результате ГРП многократно повышается дебит добывающих скважин, повышается конечная нефтеотдача скважины за счет приобщения к выработке слабодренлируемых зон.

Метод ГРП имеет множество технологических решений, обусловленных особенностями конкретного объекта обработки и достигаемой целью. Технологии ГРП различаются, прежде всего, по объемам закачки жидкостей разрыва и пропантов и, соответственно, по размерам создаваемым трещин.

---

<sup>1</sup>Владимир Иванович Астафьев (vlast@ssu.samara.ru), Геннадий Дмитриевич Федорченко, кафедра безопасности информационных систем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Технология применения гидроразрыва в первую очередь основана на знании механизма возникновения и распространения трещин в горных породах, что позволяет прогнозировать геометрию трещины и оптимизировать ее параметры. Математическое моделирование процесса трещинообразования базируется на фундаментальных законах теории упругости, физики нефтегазоносных пластов, фильтрации, термодинамики. Первую теоретическую модель распространения двумерной трещины, получившую всеобщее признание, предложили С.А. Христианович и Ю.П. Желтов [1] (рис. 1). В данной модели высота вертикальной трещины постоянна и принимается за единицу.

## 1. Постановка задачи

Процесс развития трещины ГРП описывается двумя группами уравнений, связанными как с описанием движения вязкой жидкости разрыва пласта внутри трещины (уравнения несжимаемости и Навье–Стокса), так и условиями развития трещины в упругом пласте (уравнения линейной механики разрушения). Для вертикальной трещины ГРП (модель Христиановича–Гиртсма–ДеКлерка [1,2]) эти уравнения имеют следующий вид [3,4]:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (1.1)$$

(уравнение несжимаемости [5]),

$$q = -\frac{W^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.2)$$

(закон Пуазейля для ламинарного течения вязкой жидкости [5]),

$$W = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E} \int_0^l G\left(\frac{x}{l}, \frac{s}{l}\right) p(s, t) ds \quad (1.3)$$

(уравнение линейной механики разрушения [6,7]), где

$$G(\xi, \eta) = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\xi^2} + \sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{1-\xi^2} - \sqrt{1-\eta^2}} \right|.$$

В уравнениях (1.1)–(1.3) использованы обозначения (рис. 1):  
 $W(x, t)$  — раскрытие трещины в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ;  
 $q(x, t)$  — дебит жидкости в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ;  
 $p(x, t)$  — давление в трещине в сечении  $x$  в момент времени  $t$ ;  
 $l(t)$  — длина трещины в момент времени  $t$ ;  
 $\mu$  — вязкость жидкости;  
 $E, \nu$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона упругого пласта.  
 К уравнениям (1.1)–(1.3) необходимо добавить начальное

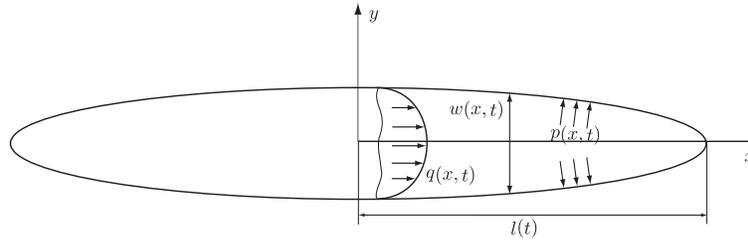


Рис. 1. Схема вертикальной трещины ГРП

$$W(x, 0) = W_0(x), \quad 0 \leq x \leq l_0(t) \quad (1.4)$$

и граничные

$$q(0, t) = q_*(t), \quad t \geq 0, \quad (1.5)$$

$$p(0, t) = p_*(t), \quad t \geq 0 \quad (1.6)$$

условия [3, 4].

Таким образом, имеем замкнутую постановку начально-краевой задачи (1.1)–(1.3) для нахождения текущих значений  $W(x, t)$ ,  $q(x, t)$ , и  $p(x, t)$  по заданному начальному  $W_0(x)$  и граничным  $q_*(t)$  и  $p_*(t)$  условиям. Следует отметить, что начальное условие может быть задано для величины начального давления  $p_0(x)$ . В этом случае величина  $W_0(x)$  находится из уравнения (1.3) при  $t = 0$ .

Для нахождения неизвестной зависимости  $l(t)$  уравнения (1.1)–(1.3) необходимо дополнить условием роста трещины (критерием квазиупругого разрушения) [7]

$$K_I(p(x, t), l(t)) = K_{Ic} \quad (\dot{l}(t) > 0). \quad (1.7)$$

Величину текущего значения коэффициента интенсивности напряжений  $K_I(p(x, t), l(t))$  удобнее находить из следующего выражения [7]:

$$K_I(p(x, t), l(t)) = 2 \sqrt{\frac{l(t)}{\pi}} \int_0^{l(t)} \frac{p(s, t)}{\sqrt{l^2(t) - s^2}} ds. \quad (1.8)$$

## 2. Автомодельное решение для формы трещины

Предположим, что форма трещины  $W(x, t)$  при  $0 \leq x \leq l(t)$  определяется выражением [1]:

$$W(x, t) = \delta_0(t) \Phi(\xi), \quad (2.1)$$

где  $\xi = x/l(t)$  — автомодельная переменная ( $0 \leq \xi \leq 1$ ),  $\delta_0(t)$  — максимальное раскрытие трещины  $W(x, t)$  при  $\xi = 0$ . Тогда из уравнений (1.1)–(1.3) следует, что и остальные функции также будут иметь вид

$$q(x, t) = q_0(t)\Psi(\xi), \quad (2.2)$$

$$p(x, t) = p_0(t)\Pi(\xi), \quad (2.3)$$

где  $q_0(t)$  и  $p_0(t)$  — максимальное значение дебита  $q(x, t)$  и давления  $p(x, t)$  в трещине при  $\xi = 0$ .

Очевидно, что на безразмерные функции  $\Phi(\xi)$ ,  $\Psi(\xi)$  и  $\Pi(\xi)$  наложены дополнительные ограничения

$$\Phi(0) = \Psi(0) = \Pi(0) = 1. \quad (2.4)$$

Разделение переменных (2.1)–(2.3) в уравнениях (1.1)–(1.3) приводит к следующим системам уравнений для групп функций  $(\Phi(\xi), \Psi(\xi), \Pi(\xi))$  и  $(\delta_0(t), q_0(t), p_0(t))$ :

$$\begin{cases} \Psi'(\xi) = -\alpha\Phi(\xi), \\ \Pi'(\xi) = -\beta\Psi(\xi)/\Phi^3(\xi), \\ \Phi(\xi) = \gamma \int_0^1 G(\xi, \eta)\Pi(\eta)d\eta; \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \dot{\delta}(t) = \alpha q_0(t)/l(t), \\ \dot{q}_0(t) = \beta\delta_0^3(t)p_0(t)/12\mu l(t), \\ p_0(t) = \gamma\pi E\delta_0(t)/4(1 - \nu^2)l(t). \end{cases} \quad (2.6)$$

Система (2.5) представляет собой систему уравнений в нелинейной задаче на собственные значения — найти собственные числа  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , при которых система (2.5) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее условиям (2.4).

Накладывая на собственные функции  $\Phi(\xi)$ ,  $\Psi(\xi)$  и  $\Pi(\xi)$  следующие дополнительные ограничения по характеру их поведения при  $\xi = 1$ :

$$\Phi(1) = 0 \quad (\text{нулевое раскрытие в вершине трещины}),$$

$$\Psi(1) = 0 \quad (\text{нулевой дебит в вершине трещины}),$$

$$\Pi(1) = 0 \quad (\text{нулевое давление в вершине трещины}),$$

систему (2.5) можно представить в виде

$$\begin{cases} \Psi(\xi) = \alpha \int_{\xi}^1 \Phi(\eta)d\eta, \\ \Pi(\xi) = \beta \int_{\xi}^1 \frac{\Psi(\eta)}{\Phi^3(\eta)}d\eta, \\ \Phi(\xi) = \gamma \int_0^1 G(\xi, \eta)\Pi(\eta)d\eta. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из граничных условий (2.4) следует, что система (2.7) может иметь решения лишь при следующих значениях  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \alpha^{-1} = \int_0^1 \Phi(\eta) d\eta, \\ \beta^{-1} = \int_0^1 \frac{\Psi(\eta)}{\Phi^3(\eta)} d\eta, \\ \gamma^{-1} = \int_0^1 G(0, \eta) \Pi(\eta) d\eta. \end{cases} \quad (2.8)$$

Задача нахождения собственных чисел  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и собственных функций  $\Phi(\xi)$ ,  $\Psi(\xi)$ ,  $\Pi(\xi)$ , удовлетворяющих уравнениям (2.7) и (2.8) эквивалентна задаче о нахождении неподвижной точки  $X = F(X)$  оператора  $F(X)$ , определяемого правой частью уравнений системы (2.7).

Вопросам, связанным с доказательством существования неподвижной точки оператора  $F(X)$  и алгоритмом ее нахождения, будет посвящено отдельное исследование. В настоящей работе реализован следующий итерационный процесс нахождения решения системы (2.7). Пусть известно  $i$ -ое приближение функции  $\Phi_i(\xi)$ . Вычислим в соответствии с уравнениями (2.7)

и (2.8) значения  $\Psi_i(\xi) = \alpha_i \int_{\xi}^1 \Phi_i(\eta) d\eta$ ,  $\Pi_i(\xi) = \beta_i \int_{\xi}^1 \frac{\Psi_i(\eta)}{\Phi_i^3(\eta)} d\eta$  и положим в каче-

стве  $(i+1)$ -го приближения  $\Phi_{i+1}(\xi) = \gamma_i \int_0^1 G(\xi, \eta) \Pi(\eta) d\eta$ . Сходимость данного

процесса для  $\Phi_0(\xi) = \sqrt{1-\xi}$  представлена на рис. 2. Как видно, при удачном выборе начального приближения  $\Phi_0(\xi)$  процесс быстро сходится и за 3–5 итераций дает характер формы трещины ГРП, распределения по ней дебита и давления при автомодельном представлении решения.

### 3. Временная зависимость процесса роста трещины ГРП

При решении второй части задачи — интегрировании по времени системы (2.6) с найденными значениями собственных чисел  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ , ее необходимо дополнить условием роста трещины (1.7)–(1.8), которое в автомодельных переменных примет следующий вид:

$$2p_0(t) \sqrt{\frac{l(t)}{\pi}} = K_{Ic}/k, \quad (3.1)$$

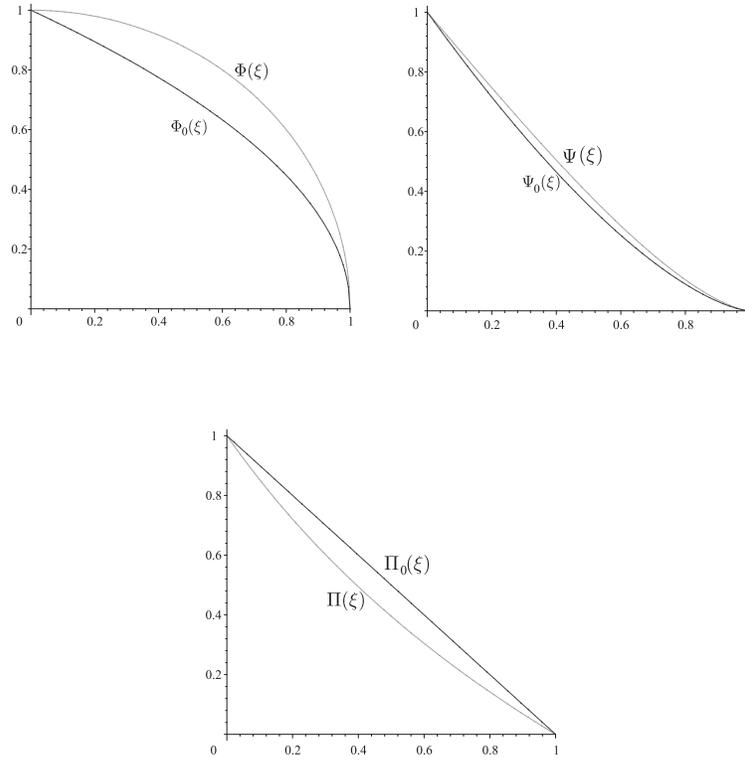


Рис. 2. Форма трещины ГРП  $\Phi(\xi)$  и характер распределения в ней дебита  $\Psi(\xi)$  и давления  $\Pi(\xi)$

где  $k = \int_0^1 \frac{\Pi(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} d\eta \approx 0.72$ .

Решение системы (2.6), (3.1) зависит от трех размерных параметров  $12\mu$ ,  $\frac{\pi E}{4(1-\nu^2)}$  и  $\frac{\sqrt{\pi} K_{Ic}}{2k}$ , начальной длины трещины  $l_0$  и времени  $t$ .

Обезразмерив систему (2.6), (3.1), ее можно переписать в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{\delta}_0}{d\tau} = \alpha \frac{\hat{q}_0}{\hat{l}}, \\ \hat{q}_0 = \beta \frac{\hat{\delta}_0^3 \hat{p}_0}{\hat{l}}, \\ \hat{p}_0 = \gamma \frac{\hat{\delta}_0}{\hat{l}_0}, \\ \hat{p}_0 = \frac{k_c}{\sqrt{\hat{l}}}, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

где  $k_c = \frac{2(1-\nu^2)K_{Ic}}{kE\sqrt{\pi l_0}}$ ,  $\tau = \frac{\pi Et}{48(1-\nu^2)\mu}$ , а в качестве масштаба  $u$  безразмерных

функций  $\hat{\delta}_0(\tau)$ ,  $\hat{q}_0(\tau)$ ,  $\hat{p}_0(\tau)$  и  $\hat{l}(\tau)$  выбраны величины  $l_0$ ,  $\frac{\pi E l_0^2}{48(1-\nu^2)\mu}$ ,  $\frac{\pi E}{4(1-\nu^2)}$  и  $l_0$ , соответственно.

Решение системы (3.2) легко находится и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \hat{\delta}_0(\tau) = \frac{k_c}{\gamma} \sqrt{\hat{l}(\tau)}, \\ \hat{q}_0(\tau) = \frac{\beta k_c^4}{\gamma^3} = \text{const}, \\ \hat{p}_0(\tau) = \frac{k_c}{\sqrt{\hat{l}(\tau)}}, \\ \hat{l}(\tau) = \left(1 + \frac{3\alpha\beta k_c^3}{\gamma} \tau\right)^{2/3}. \end{cases} \quad (3.3)$$

При выполнении условия  $\tau \gg \gamma^2/3\alpha\beta k_c^3$  данное решение можно переписать в следующей форме:

$$\begin{cases} \hat{l}(\tau) = k_c^2 \left(\frac{3\alpha\beta\tau}{\gamma^2}\right)^{2/3}, \\ \hat{\delta}_0(\tau) = \frac{k_c}{\gamma} \left(\frac{3\alpha\beta\tau}{\gamma^2}\right)^{1/3}, \\ \hat{q}_0 = \frac{\beta k_c^4}{\gamma^3} = \text{const}, \\ \hat{p}_0 = \left(\frac{3\alpha\beta\tau}{\gamma^2}\right)^{-1/3}. \end{cases} \quad (3.4)$$

#### 4. Заключение и выводы

Анализ представленного решения и выражений для зависимостей данного решения от переменных  $x$  и  $t$  показывает, что автомодельное решение начально-краевой задачи (1.1)–(1.6) существует. Пространственное распределение зависимостей  $W(x, t)$ ,  $q(x, t)$  и  $p(x, t)$  изображено на рис. 2, а временное их изменение определено соотношениями (3.3)–(3.4). Условием существования автомодельного решения является соответствие результатов полученного решения с начальными данными (1.4) и граничными условиями исходной задачи (1.5)–(1.6). Сравнивая полученные результаты с данными начальными условиями, можно утверждать, что в случае, когда функция  $W_0(x)$  соответствует решению системы (2.7)–(2.8), а функции  $q_*(t)$  и  $p_*(t)$  — решению (3.3), для данной начально-краевой задачи существует автомодельное решение. В частности, величина граничного дебита  $q_*(t)$  в автомодельном случае должна быть постоянной, а значение давления на границе  $p_*(t)$  должно убывать обратно пропорционально квадратному корню от текущей длины трещины.

## Литература

- [1] Geertsma, J. A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures / J. Geertsma, F. Clerk de // J. Petr. Techn. – 1969. – V. 21. – No. 12. – P. 1571–1581.
- [2] Garagash, D. An analysis of the influence of the pressurization rate on the borehole breakdown pressure / D. Garagash, E. Detournay // Int. J. Solids Struct. – 1997. – V. 34. – No. 24. – P. 3099–3118.
- [3] Garagash, D. Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness / D. Garagash // Eng. Fract. Mech. – 2006. – V. 73. – No 4. – P. 456–481.
- [4] Sheddon, I.M. Crack problems in the classical theory of elasticity / I.M. Sheddon, M. Lowengrub. – NY: John. Wiley & Sons, 1969. – 221 p.
- [5] Жестов, Ю.П. О гидравлическом разрыве нефтяного пласта / Ю.П. Жестов, С.А. Христианович // Изв. АН СССР. ОТН. 1955. – №5. – С. 3–41.
- [6] Кочин, Н.Е. Теоретическая гидромеханика / Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. – Т. 2. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948.
- [7] Астафьев, В.И. Нелинейная механика разрушения / В.И. Астафьев, Ю.Н. Радаев, Л.В. Степанова. – Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2001. – 632 с.

Поступила в редакцию 15/V/2007;  
в окончательном варианте — 15/V/2007.