УДК 539.374

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ[1]

© 2007 Б.Д. Аннин[2]

Методом Овсянникова найдено частично-инвариантное решение уравнений идеальной пластичности Треска в случае полной пластичности для неоднородной среды (предел текучести зависит от одной координаты). Для этого решения касательная и нормальная составляющие вектора напряжений имеют постоянные значения на плоскости.

Квазистатические уравнения идеальной пластичности Треска для определения напряжений в случае полной пластичности в цилиндрической системе координат $0 < r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$ с базисом $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ имеют вид [1]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0,\\
\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0,\\
\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где компоненты тензора напряжений определяются выражениями

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \sigma + 2\kappa\varepsilon\left(n_r^2 - 1/3\right), &\quad \sigma_{r\varphi} &= 2\kappa\varepsilon\, n_r n_\varphi,\\
\sigma_{\varphi\varphi} &= \sigma + 2\kappa\varepsilon\left(n_\varphi^2 - 1/3\right), &\quad \sigma_{rz} &= 2\kappa\varepsilon\, n_r n_z,\\
\sigma_{zz} &= \sigma + 2\kappa\varepsilon\left(n_z^2 - 1/3\right), &\quad \sigma_{z\varphi} &= 2\kappa\varepsilon\, n_z n_\varphi;
\end{aligned} \tag{2}$$

$$n_r^2 + n_\varphi^2 + n_z^2 = 1. \tag{3}$$

Здесь σ — среднее напряжение, κ — предел текучести при чистом сдвиге, $\mathbf{n} = n_r\mathbf{e}_r + n_\varphi\mathbf{e}_\varphi + n_z\mathbf{e}_z$ — единичный собственный вектор, отвечающий некрат-

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 05-01-00728 "Аналитические и численные методы решения задач деформирования и разрушения анизотропных структурно неоднородных сред".

[2]Аннин Борис Дмитриевич (annin@hydro.nsc.ru), Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, 630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Лаврентьева, 15.

ному главному напряжению

$$\sigma_1 = \varepsilon\frac{4\kappa}{3} + \sigma,$$

два других главных напряжения совпадают

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\varepsilon\frac{2\kappa}{3} + \sigma.$$

Определяемый равенством (2) с учетом (3) тензор напряжений удовлетворяет условию пластичности Треска

$$\max\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\right) = 2\kappa.$$

Будем рассматривать случай неоднородной среды, когда

$$\kappa = K(z), \tag{4}$$

где $K(z)$ — строго положительная, дифференцируемая функция. В частности, подобная зависимость предела текучести имеет место при нейтронном облучении тел [2].

Зависящие от r, φ, z функции σ, n_r, n_φ ,n_z определяются из системы уравнений первого порядка, получаемой путем подстановки (2) в (1), и конечного соотношения (3). Будем искать [3] решение этой системы в виде

$$\begin{gathered} \sigma = 2\varepsilon\, p(z), \qquad n_r = \sin\alpha(z)\cdot\cos\omega(r,\varphi,z), \\ n_\varphi = \sin\alpha(z)\cdot\sin\omega(r,\varphi,z) \qquad n_z = \cos\alpha(z), \\ 0 < \alpha < \pi/2. \end{gathered} \tag{5}$$

Для этого решения на плоскости, ортогональной оси z, напряжения σ_{zz} и $\sqrt{\sigma_{zr}^2 + \sigma_{z\varphi}^2}$ имеют постоянные значения.

Подставив (2), (4), (5) в (1), получим систему трех линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\varphi}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial z}$$

с определителем, равным нулю.

Условие ее разрешимости таково

$$\frac{dp}{dz} - \frac{1}{3}\frac{dK}{dz} - K\operatorname{ctg}\alpha\,\frac{d\alpha}{dz} = 0. \tag{6}$$

При этом функция $\omega = \omega(r,\varphi,z)$ удовлетворяет следующей квазилинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left\{\begin{aligned} &\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial r} - \frac{\cos\omega}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} - \frac{\cos\omega}{r} + h = 0, \\ &\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial r} + \frac{\sin\omega}{r}\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} + g\frac{\partial\omega}{\partial z} + \frac{\sin\omega}{r} = 0, \end{aligned}\right. \tag{7}$$

где
$$h = h(z) = -\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{K}\frac{dK}{dz} + \left(1 - \mathrm{ctg}^2\alpha\right)\frac{d\alpha}{dz}, \qquad g = g(z) = \mathrm{ctg}\alpha. \tag{8}$$

Из условия того, что скобка Якоби ([4. С. 94]), вычисленная на основе левых частей системы (8), должна обращаться в нуль на решениях этой системы, следует равенство
$$g\frac{dh}{dz} + h^2 = 0. \tag{9}$$

В предположении $\dfrac{dh}{dz} \neq 0$, $\dfrac{\partial\omega}{\partial\varphi} \neq 0$ вместо z ведем новую независимую переменную h, а вместо ω введем новую неизвестную функцию $\varphi = \varphi(r, h, \omega)$. Система (8) эквивалентна линейной системе
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial r} + h^2\cos\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial h} + h\sin\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega} = 0, \\ h^2\sin\omega\dfrac{\partial\varphi}{\partial h} + \left(\dfrac{1}{r} - h\cos\omega\right)\dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega} + \dfrac{1}{r} = 0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы таково
$$\varphi = \mathrm{arctg}\left(\frac{\cos\omega - hr}{\sin\omega}\right) + f(\eta),$$
где
$$\eta = \left(r - \frac{\cos\omega}{h}\right)^2 + \frac{\sin^2\omega}{h^2}, \tag{10}$$
а $f(\eta)$ — произвольная гладкая функция η.

Из (8) и (9) следует, что функции $h = h(z)$, $\alpha = \alpha(z)$ находятся из решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений
$$\frac{dh}{dz} = -h^2\,\mathrm{tg}\,\alpha, \qquad \frac{d\alpha}{dz} = \left(\frac{dK}{dz}\frac{\mathrm{ctg}\,\alpha}{K} + h\right)\left(1 - \mathrm{ctg}^2\,\alpha\right)^{-1}, \qquad z > z_0, \tag{11}$$
$$h(z_0) = h_0, \quad \alpha(z_0) = \alpha_0.$$
Здесь z_0, $\alpha_0 > 0$, $h_0 \neq 0$ — заданные постоянные.

Из равенства (6) следует
$$p(z) = K(z) + \int\limits_{z_0}^{z} K(z)\,\mathrm{ctg}\,\alpha(z)\frac{d\alpha}{dz}dz + p_0, \tag{12}$$
где p_0 — произвольная постоянная.

Общее решение системы (7) $\omega = \omega(r, \varphi, z)$ при выполнении (9) и $h \neq 0$ находится из уравнения
$$\sin(\varphi + \omega - f(\eta)) + hr\cos(\varphi - f(\eta)) = 0. \tag{13}$$

Формулами (11)–(13) полностью определено решение вида (5).

Рассмотрим случай $\dfrac{dh}{dz} \equiv 0$, следовательно, в силу (9) $h \equiv 0$. Определяя функцию $\alpha = \alpha^*(z)$ из уравнения (8) при $h = 0$, будем иметь:

$$\sin 2\alpha^*(z) = \frac{C}{K(z)}, \tag{14}$$

где C — произвольная постоянная, причем

$$|C| \max_z K(z) < 1.$$

Интегрируя систему (7) при $h = 0$, получаем уравнение для определения функции $\omega = \omega(r, \varphi, z)$:

$$F(\mu, \nu) = 0,$$

где

$$\mu = \omega + \varphi, \qquad \nu = r\cos\omega - \int_{z_0}^{z} \operatorname{tg}\alpha^*(z)\, dz,$$

а $F(\mu, \nu)$ — произвольная гладкая функция своих аргументов. В (12) следует подставить

$$\alpha = \alpha^*(z).$$

В частности, если принять функцию $F(\mu, \nu)$ независимой от μ, то решением системы (7) будет функция.

$$\omega = \arccos\left(\frac{1}{r}\int_{z_0}^{z} \operatorname{tg}\alpha^*(z)\, dz\right).$$

Если принять функцию $F(\mu, \nu)$ независимой от ν, то решением системы (7) будет функция $\omega = -\varphi$.

Считая известным тензор напряжений, найдем вектор скорости

$$\mathbf{u} = u_r\mathbf{e}_r + u_\varphi\mathbf{e}_\varphi + u_z\mathbf{e}_z,$$

используя условие несжимаемости

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \tag{15}$$

и условие изотропии [1]

$$\frac{\left(\xi_{rr}n_r + \xi_{r\varphi}n_\varphi + \xi_{rz}n_z\right)}{n_r} = \frac{\xi_{r\varphi}n_r + \xi_{\varphi\varphi}n_\varphi + \xi_{\varphi z}n_z}{n_\varphi} = \frac{\xi_{rz}n_r + \xi_{\varphi z}n_\varphi + \xi_{zz}n_z}{n_z}, \tag{16}$$

где тензор скоростей пластических деформаций определяется в виде

$$\begin{gathered}
\xi_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad 2\xi_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right),\\
\xi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \qquad 2\xi_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi},\\
\xi_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \qquad 2\xi_{zr} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{17}$$

Условие (16) означает, что собственный вектор **n** тензора напряжений, отвечающий некратному главному напряжению σ_1, является также собственным вектором тензора скоростей деформаций.

Будем искать решение уравнений (15)–(17) в виде

$$u_r = u(z)\cos(\omega + t(z)), \qquad u_\varphi = u(z)\sin(\omega + t(z)), \qquad u_z = u_z(z), \tag{18}$$

где функция $\omega = \omega(r, \varphi, z)$ та же, что и в соотношениях (5). Подставим (18) в (15)–(17) и, учитывая (8), (9), получим равенство $t(z) = 0$ и уравнения

$$\frac{du_z}{dz} = -uh, \quad \frac{du}{dz} = \operatorname{tg} 2\alpha \frac{du_z}{dz}. \tag{19}$$

Случай $t(z) \neq 0$ не представляет интереса.

Для определения функций $u_z = u_z(z)$ и $u = u(z)$ следует в (11) добавить уравнения (19) и присоединить начальные условия $u_z(z_0) = u_{z0}$, $u(z_0) = u_0$, где u_{z0}, u_0 — заданные постоянные.

Если $h \equiv 0$, то из (19) следует, что u_z, u — постоянные.

Замечание 1. Пусть $K(z) = \kappa_0 e^{\lambda z}$, где $\kappa_0 > 0$, λ — постоянные. В этом случае из (11) следует $h = Ce^{\lambda z}\sin 2\alpha$, где $C = h_0 \Big/ \left(\sin 2\alpha_0 e^{\lambda z_0}\right)$. Функция $\alpha = \alpha(z)$ определяется из решения задачи Коши

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\left(\frac{\lambda}{2} + Ce^{\lambda z}\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg} 2\alpha, \qquad z > z_0$$

$$\alpha(z_0) = \alpha_0.$$

Замечание 2. Решение вида (2) имеет место также для случая, когда предел текучести κ зависит от среднего давления $\kappa = \tilde{\kappa}(\sigma)$, где $\tilde{\kappa}(\sigma)$ — строго положительная дифференцируемая функция.

Замечание 3. Аналогичное исследование можно провести в сферической системе координат ρ, θ, λ для случая, когда предел текучести зависит от $\rho: \ \kappa = \hat{\kappa}(\rho)$, где $\hat{\kappa}(\rho)$ — положительная дифференцируемая функция. Если $\hat{\kappa}$ постоянное, соответствующее решение докладывалось автором на IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике [5].

Литература

[1] Ишлинский, А.Ю. Математическая теория пластичности / А.Ю. Ишлинский, Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001.

[2] Яровая, А.В. Деформирование слоистых элементов конструкций в термоградиационном поле / А.В. Яровая // Проблемы прочности. – 2004. – №6. – С. 111–118.

[3] Овсянников, Л.В. Особый вихрь / Л.В. Овсянников // ПМТФ. – 1995. – Т. 36. – №3. – С. 45–52.

[4] Гюнтер, Н.М. Интегрирование уравнений первого порядка в частных производных / Н.М. Гюнтер. – М.; Л.: ОНТИ ГТТИ, 1934.

[5] Аннин, Б.Д. Подмодели идеальной пластичности при условии полной пластичности / Б.Д. Аннин // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике: аннотации докладов (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 г.) Т. III. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2006. – С. 17.

Поступила в редакцию 2/V/2007;
в окончательном варианте — 2/V/2007.

EXACT SOLUTION OF THE PLASTICITY EQUATIONS FOR INHOMOGENEOUS MEDIA

© 2007 B.D. Annin[3]

By the Ovsyannikov method a partially-invariant solution of the perfect plasticity Tresca equations in the case of full plasticity for inhomogeneous media (the yield limit is dependent on a coordinate) is found. For this solution the tangential and normal components of the stress vector have a constant value on a plane.

Paper received 2/V/2007.
Paper accepted 2/V/2007.

[3]Annin Boris Dmitrievich (annin@hydro.nsc.ru), Lavrentiev Institute of Hydrodynamics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090, Russia.