

УДК 539.3

ДВИЖЕНИЕ ПЛОСКОГО ШТАМПА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ ПО ГРАНИЦЕ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

© 2007 В.М. Александров, А.В. Марк¹

Рассмотрена контактная задача о взаимодействии жесткого плоского штампа с границей вязкоупругой полуплоскости. Предполагается, что штамп движется с постоянной скоростью по указанной границе и вдавлируется в нее постоянной нормальной силой. Трением в области контакта штампа с поверхностью полуплоскости пренебрегаем. На первом этапе определяется перемещение границы полуплоскости от приложенной к ней движущейся неизменяющейся нормальной нагрузки. Затем на втором этапе выводится интегральное уравнение собственно контактной задачи для определения контактного давления. На третьем этапе показано, как с помощью модифицированного метода коллокации Мультонпа–Каландия можно построить приближенное решение указанного интегрального уравнения.

1. Задачу будем решать в условиях плоской деформации. Тогда для этого случая перепишем формулу [1], дающую выражение для перемещения точек границы вязкоупругой полуплоскости от действующей на эту границу нормальной сосредоточенной силы P

$$v(x) = -\frac{1}{\pi\theta_*} \left[\ln|x| + C + \int_{-\infty}^0 K(-\tau)(\ln|x - V\tau| + C) d\tau \right] P, \quad (1.1)$$

где начало координат выбрано в точке приложения силы P , ось x — параллельна поверхности полупространства, $\theta_* = G/(1 - \nu)$, G и ν — мгновенные модуль сдвига и коэффициент Пуассона, $K(t)$ — ядро ползучести, V — скорость движения силы P вместе с системой координат по поверхности полупространства, C — постоянная.

Далее будет рассматриваться случай стандартного вязкоупругого тела

$$K(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right), \quad (1.2)$$

¹Александров Виктор Михайлович (alexand@ipmnet.ru), Марк Александр Викторович, Институт проблем механики Российской академии наук, 119526, Россия, г. Москва, пр-т Вернадского, 101, корп. 1.

где K и λ — вязкие постоянные (λ — характерное время ползучести). С учетом (1.2) формула (1.1) для случая движения по поверхности полуплоскости распределенной нормальной нагрузки $q(x)$, расположенной на отрезке $x \in [-a, a]$, примет вид

$$v(x) = -\frac{1}{\pi\theta_*} \int_{-a}^a q(\xi) \left[\ln |\xi - x| + C + K \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) (\ln |\xi - x - V\tau| + C) d\tau \right] d\xi. \quad (1.3)$$

2. Перейдем теперь к контактной задаче. В ней $v(x)$ известно и равно δ — внедрению плоского штампа под действием силы P , а неизвестно контактное давление $q(\xi)$. Таким образом, имеем на основании (1.3) интегральное уравнение

$$-\int_{-a}^a q(\xi) \left[\ln |\xi - x| + C + K \int_{-\infty}^0 \exp\left(\frac{\tau}{\lambda}\right) (\ln |\xi - x - V\tau| + C) d\tau \right] d\xi = \pi\theta_*\delta \quad (|x| \leq a). \quad (2.1)$$

Чтобы избавиться от постоянной C , продифференцируем по x обе части уравнения (2.1). Будем иметь после вычисления внутреннего интеграла [2] (3.352(2)) выражение

$$\int_{-a}^a q(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{K}{V} \exp\left(-\frac{\xi - x}{\lambda V}\right) \text{Ei}\left(-\frac{\xi - x}{\lambda V}\right) \right] d\xi = 0 \quad (|x| \leq a), \quad (2.2)$$

где $\text{Ei}(x)$ — интегральная показательная функция [2].

Введем следующие безразмерные величины и формулы

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{a}, & \xi' &= \frac{\xi}{a}, & \mu &= \frac{\lambda V}{a}, & k &= K\lambda, \\ \varphi(\xi') &= \frac{q(\xi'a)}{\theta_*}, & t &= -\frac{\xi' - x'}{\mu}, & G(t) &= e^t \text{Ei}(t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

(штрихи у x' и ξ' далее опускаем). С учетом (2.3) интегральному уравнению (2.2) можно придать вид

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) \left[\frac{1}{\xi - x} - \frac{k}{\mu} G\left(\frac{\xi - x}{\mu}\right) \right] d\xi = 0. \quad (2.4)$$

К интегральному уравнению (2.1) нужно добавить еще условие квазистатики

$$P = \int_{-a}^a q(\xi) d\xi, \quad (2.5)$$

которое в безразмерных переменных примет вид

$$Q = \frac{P}{\theta a} = \int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi. \quad (2.6)$$

В [3] показано, что в общем случае решение интегрального уравнения (2.4) имеет вид

$$\varphi(x) = \Phi(x)(1 - x^2)^{-1/2}, \quad (2.7)$$

где $\Phi(x)$ — непрерывная функция.

3. Далее для построения приближенного решения интегрального уравнения (2.4) изложим модифицированный метод коллокации Мультонпа–Каландия [4]. Построим для функции $\Phi(x)$ интерполяционный полином Лагранжа по узлам

$$x_n = \cos \theta_n, \quad \theta_n = \pi \frac{2n-1}{2N} \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (3.1)$$

которые являются нулями полинома Чебышева $T_N(x)$. Такой многочлен имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \cos(m\theta_n) \cos(m\theta) \right), \quad \tilde{\Phi}(\theta) \equiv \Phi(\cos \theta). \quad (3.2)$$

Перейдем в интегральном уравнении (2.4) к новым переменным по формулам

$$x = \cos \theta, \quad \xi = \cos \psi \quad (3.3)$$

и перепишем уравнение (2.4) с учетом (3.3)

$$\int_0^\pi \tilde{\Phi}(\psi) \left[\frac{1}{\cos \psi - \cos \theta} - \frac{k}{\mu} G \left(\frac{\cos \psi - \cos \theta}{\mu} \right) \right] d\psi = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi). \quad (3.4)$$

Подставим выражение (3.2) в уравнение (3.4). Используя далее интеграл [2] (7.344(1))

$$\int_0^\pi \frac{\cos(m\psi)}{\cos \psi - \cos \theta} d\psi = \pi \frac{\sin(m\theta)}{\sin \theta} \quad (3.5)$$

и квадратурную формулу Гаусса

$$\int_0^\pi \chi(\psi) d\psi = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N \chi(\theta_n), \quad (3.6)$$

представим интегральное уравнение (3.4) в виде соотношения

$$\sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n) \left[2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{\cos(m\theta_n) \sin(m\theta)}{\sin \theta} - \frac{k}{\mu} G \left(\frac{\cos \theta_n - \cos \theta}{\mu} \right) \right] = 0. \quad (3.7)$$

Положим теперь в (3.7) переменную $\theta = \omega_k$, где

$$\omega_k = \frac{\pi(2k-1)}{2(N-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (3.8)$$

В результате получим систему из $N-1$ линейных алгебраических уравнений для определения N величин $\tilde{\Phi}(\theta_n)$. Чтобы замкнуть систему с тем чтобы получить еще одно уравнение, воспользуемся соотношением (2.6), которое с помощью представлений (2.7) и (3.2) преобразуем к виду

$$Q = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N \tilde{\Phi}(\theta_n). \quad (3.9)$$

Выпишем еще формулу для определения эксцентриситета e приложения силы P

$$M = \frac{Pe}{\theta_* a^2} = \int_{-1}^1 \xi \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.10)$$

С помощью квадратурной формулы (3.6) ее можно также представить в виде

$$M = \frac{\pi}{N} \sum_{n=1}^N \cos \theta_n \tilde{\Phi}(\theta_n). \quad (3.11)$$

Характер графиков зависимости $\varphi(x)/N$ при различных значениях k и μ на отрезке $x \in [-1, 1]$ таков: у левого края указанная величина, плавно возрастающая, стремится к бесконечности, у правого края эта же величина резко уменьшается, а затем вблизи точки $x = 1$ тоже стремится к бесконечности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 05-01-00002, 06-01-00022 и 06-08-01595).

Литература

- [1] Работнов, Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
- [2] Градштейн, И.С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматлит, 1962. – 1100 с.
- [3] Александров, В.М. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями / В.М. Александров, Е.В. Коваленко. – М.: Наука, 1986. – 335 с.
- [4] Каландия, А.И. Математические методы двумерной упругости / А.И. Каландия. – М.: Наука, 1973. – 304 с.

Поступила в редакцию 2/V/2007;
в окончательном варианте — 2/V/2007.

**FLAT INDENTOR MOTION WITH STEADY SPEED ON
THE BOUNDARY OF A VISCOELASTIC HALF-PLANE**© 2007 V.M. Alexandrov, A.V. Mark²

A Hertzian problem of interaction between a rigid flat indenter and the boundary of a viscoelastic half-plane is considered. It is proposed that the indenter have steady speed at the boundary and is indented by the constant pressure. Friction in the contact zone is neglected.

Paper received 2/V/2007.

Paper accepted 2/V/2007.

²Alexandrov Viktor Mikhailovich (alexand@ipmnet.ru), Mark Alexander Victorovich, Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119526, Russia.