УДК 517.929

О СТАБИЛИЗАЦИИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ УПРАВЛЯЕМОЙ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

© 2007 С.В. Павликов[1]

В этой работе исследуется асимптотическая устойчивость по части переменных нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа посредством функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную, при этом, не требуется ограниченность решений по неконтролируемым координатам. На основе полученной теоремы решается задача о стабилизации по части переменных управляемой механической системы с запаздывающей обратной связью.

1. Основные определения. Предельные уравнения

Пусть R^m и R^p есть линейные действительные пространства m- и p-векторов с нормами $|\mathbf{y}|$ и $|\mathbf{z}|$, R^n есть линейное действительное пространство n-векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) = (y_1, y_2, ..., y_m, z_1, z_2, ..., z_p) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ с нормой $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| + |\mathbf{z}|, n = m + p$; $h > 0$ – некоторое действительное число, $C^{(n)}$ – банахово пространство непрерывных функций $\boldsymbol{\varphi} : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\boldsymbol{\varphi}\| = \sup(|\boldsymbol{\varphi}(s)|, -h \leqslant s \leqslant 0)$, $C_H^{(m)} = \left\{\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} \in C^{(m)} : \|\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}\| = \sup(|\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}(s)|, -h \leqslant s \leqslant 0) < H < +\infty\right\}$, $\overline{C}_l^{(m)} = \left\{\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} \in C^{(m)} : \|\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}\| \leqslant l\right\}$, (для $\overline{C}_r^{(p)}$ аналогично). Обозначим: $\boldsymbol{\varphi} = (\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}, \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{z})})$. Для непрерывной функции $\mathbf{x} :]-\infty, +\infty[\to R^n$ и каждого $t \in R$ функция $\mathbf{x}_t \in C^{(n)}$ определяется равенством $\mathbf{x}_t(s) = \mathbf{x}(t + s)$ для $-h \leqslant s \leqslant 0$.

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение с конечным запаздыванием:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t), \qquad \mathbf{f}(t, 0) = 0 \tag{1.1}$$

где $\mathbf{f} : R^+ \times \Lambda \to R^n$, $\Lambda = C_H^{(m)} \times C^{(p)}$, есть непрерывное отображение, удовлетворяющее $\mathbf{z}$–продолжимости решений уравнения (1.1), т.е. каждое решение уравнения (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$, $\mathbf{x}_\alpha(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\varphi}$, определено для всех $t \geqslant \alpha$, для которых $|\mathbf{y}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})| \leqslant H_1 < H$. Это условие означает, что ни одна

[1]Павликов Сергей Владимирович (`sp@im.tbit.ru`), кафедра ММИТЭ Камской государственной инженерно-экономической академии, 432810, пр-т Мира, 68/19.

из координат $z_j(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ за конечное время не уходят в бесконечность [1], [2].

Для описания предельного поведения решений уравнения (1.1) при $t \to +\infty$ вводятся следующие определения.

Определение 1.1. Пусть $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ есть решение уравнения (1.1), определенное для всех $t \geqslant \alpha - h, \mathbf{x}_t^{(n)}(\alpha,\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{x}(t_n + s,\alpha,\boldsymbol{\varphi})(-h \leqslant s \leqslant 0)$. Положительное предельное множество $\Omega^+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ в пространстве C_H есть множество $\Omega^+ = \{\boldsymbol{\varphi}^* \in C_H : \exists t_n \to +\infty,\ n \to \infty,\ \mathbf{x}_t^{(n)}(\alpha,\boldsymbol{\varphi}) \to \boldsymbol{\varphi}^*$ при $n \to \infty\}$.

Определение 1.2. Точка $\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})} \in C_H^{(m)}$ называется y-предельной точкой решения (1.1) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$, определенного для всех $t \geqslant \alpha - h$, если существует последовательность $t_k \to +\infty$, такая что $\mathbf{y}_{t_n}(\alpha,\boldsymbol{\varphi}) \to \boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})}$ при $k \to \infty$. Множество таких точек образует положительное $\mathbf{y}-$предельное множество $\Omega_y^+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$.

Локализация множеств $\Omega^+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ и $\Omega^+{}_y[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ позволяет установить свойство устойчивости решения $\mathbf{x} = 0$ по переменным $\mathbf{y}$.

Для решения задачи о локализации множеств $\Omega^+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ и $\Omega_y^+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ на основе функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную, проведем следующие построения.

Предположим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующим предположениям.

Предположение 1.1. Для каждой пары r, l, $0 < r < H$, $l > 0$, существует $M = M(r,l)$, такое, что для $(t,\boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \overline{C}_r \times \overline{C}_l$ выполняется неравенство:

$$|\mathbf{f}(t,\boldsymbol{\varphi})| \leqslant M \tag{1.2}$$

Предположение 1.2. Функция $\mathbf{f}(t,\boldsymbol{\varphi})$ удовлетворяет условию Липшица по $\boldsymbol{\varphi}$ на каждом компактном множестве $K \subset \Lambda$, т. е. существует $l = l(K)$, такое что для любых $\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2 \in K$ выполняется неравенство:

$$|\mathbf{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{f}(t,\boldsymbol{\varphi}_1)| \leqslant l\|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\| \tag{1.3}$$

При условиях (1.2) и (1.3) решение уравнения (1.1) для каждой начальной точки $(\alpha,\boldsymbol{\varphi}) \in R^+ \times \Lambda$ $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ существует, единственно и непрерывно зависит от начальных данных [3].

Предположение 1.3. Функция $\mathbf{f}(t,\boldsymbol{\varphi})$ равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+ \times K$, где $K \subset \Lambda$ - произвольное компактное множество из Λ, так что $\forall K \subset \Lambda, \forall \varepsilon > 0$ $\exists m = m(K)$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, т.ч. $\forall$ $(t_1,\boldsymbol{\varphi}_1),(t_2,\boldsymbol{\varphi}_2) \in R^+ \times K, |t_2 - t_1| \leqslant \delta, \|\boldsymbol{\varphi}_2 - \boldsymbol{\varphi}_1\| \leqslant \delta$ имеют место соотношения:

$$|\mathbf{f}(t_2,\boldsymbol{\varphi}_2) - \mathbf{f}(t_1,\boldsymbol{\varphi}_1)| < \varepsilon,$$

При этом уравнение (1.1) будет предкомпактным в некотором пространстве F непрерывных функций $\mathbf{f} : R^+ \times \Gamma \to R^n$, где $\Gamma-$ некоторое множество в

Λ, содержащее $\{\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi}\in\Lambda, t\geqslant \alpha+h\}$ каждого решения (1.1) $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ [4].

Функция $\mathbf{f}^*: R^+\times\Gamma\to R^n$ называется предельной к $\mathbf{f}$, если существует последовательность $t_n\to+\infty$, такая что $\{\mathbf{f}(t+t_n,\boldsymbol{\varphi})\}$ равномерно сходится к $\mathbf{f}^*(t,\boldsymbol{\varphi})$ в F. Уравнение

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}^*(t,\mathbf{x}_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1).

Введение предельных уравнений позволяет выявить свойство квазиинвариантности положительного предельного множества $\Omega^+(\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi}))$ решения $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ уравнения (1.1) [4].

Теорема 1.1. Пусть $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ есть решение уравнения (1.1), определенное для всех $t\geqslant\alpha-h$. Тогда для каждой предельной точки $\boldsymbol{\varphi}^*\in\Omega^+$ $+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ существует предельное уравнение $\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}^*(t,\mathbf{x}_t)$, такое, что его решение $\mathbf{x}=\mathbf{x}^*(t,0,\boldsymbol{\varphi}^*)$ определено на некотором интервале $[-h,\beta)$, $\beta>0$, при этом, $\{\mathbf{x}^*_t(0,\boldsymbol{\varphi}^*), t\in[0,\beta)\}\subset\Omega^+[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$.

Из этой теоремы следует, что если $\boldsymbol{\varphi}^*=(\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})},\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{z})})$, то для $\mathbf{y}$ — составляющей $\mathbf{y}^*(t,0,\boldsymbol{\varphi}^*)$ решения $\mathbf{x}^*(t,0,\boldsymbol{\varphi}^*)$ уравнения (1.4) имеет место свойство $\mathbf{y}^*_0=\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})}$, $\{\mathbf{y}^*_t(0,\boldsymbol{\varphi}^*), t\in[0,\beta)\}\subset\Omega^+{}_{(\mathbf{y})}[\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$.

2. Теорема об асимптотической устойчивости по части переменных

Пусть $V(t,\boldsymbol{\varphi}): R^+\times\Lambda\to R$ – некоторый функционал, определенный и непрерывный по совокупности аргументов [3]. Пусть $\mathbf{x}=\mathbf{x}(t,\alpha,\boldsymbol{\varphi})$ – некоторое решение (1.1), определенное для всех $t\geqslant\alpha-h$. Тогда для $V[t]=$ $=V[t,\mathbf{x}_t(\alpha,\boldsymbol{\varphi})]$ можно определить верхнюю правостороннюю производную:

$$\dot V(\alpha,\boldsymbol{\varphi})=\lim_{h\to0^+}\sup\frac{1}{h}[V(\alpha+h)-V(\alpha)].$$

Допустим, что для производной $\dot V$ имеет место следующая оценка:

$$\dot V(t,\boldsymbol{\varphi})\leqslant -W(t,\boldsymbol{\varphi})\leqslant 0,\qquad \forall(t,\boldsymbol{\varphi})\in R\times\Lambda,$$

где непрерывная функция $W=W(t,\boldsymbol{\varphi})$ ограничена и равномерно непрерывна на каждом множестве $R^+\times K$, K – компакт из Λ.

Определение 2.1. Пусть $t_n\to+\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t\in R$ и $c\in R$ определим множество $V^{-1}_\infty(t,c)\subset\Lambda$ следующим образом: точка $\boldsymbol{\varphi}\in V^{-1}_\infty(t,c)$, если существует последовательность $\{\boldsymbol{\varphi}_n\in\Gamma,\boldsymbol{\varphi}_n\to\boldsymbol{\varphi}\}$ такая, что: $\lim_{n\to+\infty}V(t+t_n,\boldsymbol{\varphi}_n)=c$.

Как и в случае $\mathbf{f}(t,\boldsymbol{\varphi})$, при условии относительно $W(t,\boldsymbol{\varphi})$ семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\boldsymbol{\varphi}),\tau\in R^+\}$ предкомпактно в некотором функциональном пространстве непрерывных функций $F=\{G: R\times\Gamma\to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией [5].

Определение 2.2. Функция $W^* \in F_G$ называется предельной к W, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая что $\{W^{(n)}(t, \boldsymbol{\varphi}) = W(t_n + t, \boldsymbol{\varphi})\}$ сходится к $W^*(t, \boldsymbol{\varphi})$ в F_G.

Определение 2.3. Функции $\mathbf{f}^*$, предельная к $\mathbf{f}$, и W^*, предельная к W, образуют предельную пару $(\mathbf{f}^*, W^*)$, если они определяются для одной и той же последовательности.

Пусть $\omega : R^+ \to R^+$ есть строго монотонно возрастающая функция, $\omega(0) = 0$, то есть, функция типа Хана [1]– [3].

Теорема 2.1. Предположим, что существует непрерывный функционал $V : R^+ \times \Lambda \to R^+$, такой что:

1) существует число $Q > 0$, такое, что для каждого числа $\delta > 0$ $\underline{\lim} V(t, \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}, \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{z})}) \geqslant Q$ при $\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{z})} \to \infty$ равномерно по $t \in R^+, \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} \in \{\delta \leqslant \|\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}\| \leqslant H_1 < H\}$;

2) $V(t, 0) \equiv 0, V(t, \boldsymbol{\varphi}) \geqslant \omega(|\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})}(0)|)$, $\dot{V}(t, \boldsymbol{\varphi}) \leqslant -W(t, \boldsymbol{\varphi}) \leqslant 0$ для всех $(t, \boldsymbol{\varphi}) \in R^+ + \times \Omega$;

3) для каждой предельной пары $(\mathbf{f}^*, W^*)$ максимально инвариантное подмножество множества $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = const\} \bigcap \{W^*(t, \boldsymbol{\varphi}) = 0\}$ содержится во множестве $\{\boldsymbol{\varphi} \in C_H : \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} = 0\}$.

Тогда решение (1.1) $\mathbf{x} = 0$ асимптотически y-устойчиво.

Доказательство.

Для каждого $\alpha \in R^+$ и любого малого $\varepsilon > 0$ по непрерывности $V(t, \boldsymbol{\varphi})$ и из условия $V(t, 0) \equiv 0$ выберем число $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha) > 0$, такое что $\sup(V(\alpha, \boldsymbol{\varphi}), \|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta) < \omega(\varepsilon)$.

Для каждого решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$, $\|\boldsymbol{\varphi}\| < \delta$, из условия 2) теоремы имеем при всех $t \geqslant \alpha$

$$\omega(|\mathbf{y}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})|) \leqslant V[t, \mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})] \leqslant V(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) < \omega(\varepsilon) \tag{2.1}$$

и соответственно, $|\mathbf{y}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant \alpha$, т. е. y–устойчивость $\mathbf{x} = 0$ [6].

Покажем, что для каждого такого решения множество $\Omega^+{}_y[\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})] \subset \{\boldsymbol{\varphi} \in C^{(n)} : \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} = 0\}$.

Пусть точка $\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})} \in \Omega^+{}_y[\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})]$ определяется некоторой последовательностью $t_k \to +\infty$, $\mathbf{y}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \to \boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})}$. Если последовательность точек $\mathbf{x}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ ограничена, $\|\mathbf{x}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})\| \leqslant l = const$, тогда можно выбрать подпоследовательность $k_j \to +\infty$, такую, что

$$\mathbf{x}_{t_{k_j}}(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \to \boldsymbol{\varphi}^*, \quad \boldsymbol{\varphi}^* = (\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})}, \boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{z})}), \quad \|\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})}\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{z})}\| \leqslant l.$$

По теореме 1.1 для точки $\boldsymbol{\varphi}^*$ существует предельное уравнение (1.4), такое, что для его решения $\mathbf{x}^*(t, 0, \boldsymbol{\varphi}^*)$ множество $\{\mathbf{x}^*_t(0, \boldsymbol{\varphi}^*), t \in [0, \beta)\} \subset \Omega^+[\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})]$. Из условия 2) теоремы, как в теореме 2.1 из работы [5], находим, что $\Omega^+[\mathbf{x}_t(\alpha, \boldsymbol{\varphi})] \subset \{\boldsymbol{\varphi} : \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} = 0\}$. Следовательно, $\{\mathbf{y}^*_t(0, \boldsymbol{\varphi}^*), t \in [0, \beta)\} \subset \{\boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} \in C_{(\mathbf{y})} : \boldsymbol{\varphi}_{(\mathbf{y})} = 0\}$.

Пусть последовательность $\mathbf{x}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})$ неограничена, $\|\mathbf{x}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})\| \to \infty$ при $k \to \infty$. В силу ограниченности решения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \alpha, \boldsymbol{\varphi})$ по $\mathbf{y}$ это значит, что $\|\mathbf{z}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi})\| \to \infty$ при $k \to \infty$. Можем считать, что в соотношениях (2.1) число

$\omega(\varepsilon) < Q$. Тогда это соотношение совместимо с условием 1) теоремы если только $\mathbf{y}_{t_k}(\alpha, \boldsymbol{\varphi}) \to 0$ при $k \to \infty$. Соответственно, вновь имеем $\boldsymbol{\varphi}^*_{(\mathbf{y})} = 0$.

Теорема доказана.

3. Стабилизация положения равновесия механической системы

Рассмотрим управляемую механическую систему с голономными стационарными связями, описываемую n обобщенными координатами и соответственно следующими уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = U_i \qquad (i = \overline{1,n}) \tag{3.1}$$

где T – кинетическая энергия системы, U_i – обобщенные управляющие силы.

Допустим, что в силу выбора некоторой системы координат кинетическая энергия системы

$$T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j$$

не является определенно-положительной по всем скоростям, а именно это свойство теряется при $q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0$ $(1 < m < n)$ (см. пример ниже), тем не менее, T определенно-положительна по $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ при любых $\mathbf{q} \in R^n$, при $|\mathbf{q}^1|^2_m = \sum\limits_{j=1}^{m} q_j^2 > 0$ функция T определенно-положительна по $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n$, и значит $T \to \infty$ при $|\dot{\mathbf{q}}| = \sum\limits_{j=1}^{n} \dot{q}_j^2 \to +\infty$, если $|\mathbf{q}^1|_m \geqslant \delta > 0$.

При $U_i = 0$ система (3.1) имеет положение равновесия

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q} = \mathbf{0}. \tag{3.2}$$

Предположим, что координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ разделяются на координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ и $q_{m+1}, \ldots, q_n$, при этом, последние являются угловыми (по $mod 2\pi$).

Исследуем задачу об определении управляющих воздействий U_i, обеспечивающих стабилизацию положения равновесия по $q_1, \ldots, q_m$, в следующих двух постановках.

1. Пусть координаты $q_1, \ldots, q_m$ измеряются в цепи обратной связи управления системы с некоторым запаздыванием, а соответствующие обобщенные скорости $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m$ непосредственно, либо на систему действуют также линейные диссипативные силы с полной диссипацией. Таким образом, можно принять, что силы U_i определяются посредством равенства

$$U_k = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k}[q_1(t - \tau_1(t)), \ldots, q_m(t - \tau_m(t))] - \sum_{j=1}^{n} f_{kj}(\mathbf{q})\dot{q}_j(t) \quad (k = \overline{1,n}), \tag{3.3}$$

где $\Pi = \Pi(q_1, \ldots, q_m)$ есть дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

при $q_1 = q_2 = \ldots = q_m = 0$, а при $0 \leqslant |\mathbf{q}^1|_m \leqslant \delta > 0$

$$\Pi(\mathbf{q}) \geqslant \omega_2(|\mathbf{q}^1|_m), \qquad \left|\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}^1}\right|_m \geqslant \omega_3(|\mathbf{q}^1|_m), \tag{3.4}$$

$\tau_1(t),\ \tau_2(t), \ldots, \tau_m(t)$ есть коэффициенты запаздывания в цепи обратной связи, предполагаемые равномерно непрерывными, ограниченными функциями по $t \in R^+$, $|\tau_i(t)| \leqslant h, i = 1, ..., m$, $h = \mathrm{const} > 0$, матрица F коэффициентов $f_{kj}(q)$ представима в виде

$$F = \begin{pmatrix} F^1 & 0 \\ 0 & F^2 \end{pmatrix},$$

где $F^1 \in R^{m\times m}$ и $F^2 \in R^{n-m} \times R^{n-m}$, таковы, что минимальное собственное значение $\lambda_{F^1}(\mathbf{q})$ матрицы F^1 больше в h раз максимального собственного значения $\lambda_\Pi(q)$ матрицы

$$\left\|\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j}\right\|,$$

$\lambda_{F^1(\mathbf{q})} \geqslant h\lambda_\Pi(\mathbf{q}) + \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, $(\dot{\mathbf{q}}^2)' F^2 \dot{\mathbf{q}}^2 \geqslant \omega_4(|\dot{\mathbf{q}}^2|_{n-m})$ при $|\mathbf{q}^1|_m \geqslant \delta > 0$.

Функционал Ляпунова

$$V(\boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}^2, \boldsymbol{\varphi}^1, \boldsymbol{\varphi}^2) = T[\boldsymbol{\psi}^1(0), \boldsymbol{\psi}^2(0), \boldsymbol{\varphi}^1(0), \boldsymbol{\varphi}^2(0)] +$$
$$+\Pi(\boldsymbol{\varphi}^1(0)) + \frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{0}\int\limits_{s}^{0}\sum_{i,j=1}^{m} f_{ij}(\boldsymbol{\varphi}(0))\psi_i^1(u)\psi_j^1(u)du ds,$$

где $\boldsymbol{\psi}' = [(\boldsymbol{\psi}^1)', (\boldsymbol{\psi}^2)'] = [(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_m), (\dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n)]'$, $\boldsymbol{\varphi}' = [(\boldsymbol{\varphi}^1)', (\boldsymbol{\varphi}^2)'] = [(q_1, q_2, \ldots, q_m), (q_{m+1}, \ldots q_n)]'$ удовлетворяет условию:

$$V \geqslant \omega_1(|\boldsymbol{\psi}^1(0)|) + \omega_2(|\boldsymbol{\varphi}^1(0)|).$$

Для его производной в силу (3.1) при управлении (3.2) можно найти

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\varphi}) \leqslant -W(\boldsymbol{\psi}^1) - \omega_4(|\boldsymbol{\psi}^2(0)|_{n-m}) \equiv$$
$$\equiv -\frac{1}{2h}\int\limits_{-h}^{0}(\lambda_{F^1} - \lambda_\Pi)(|\boldsymbol{\psi}^1(0)|_m^2 + |\boldsymbol{\psi}^1(s)|_m^2)ds - \omega_4(|\boldsymbol{\psi}^2(0)|_{n-m}) \leqslant 0.$$

Уравнения, предельные к уравнениям (3.1) и (3.3), будут им аналогичны, но с функциями $\tau_k^*(t)$, предельными к $\tau_k(t)$ $(k = \overline{1, m})$.

Множество $\{W(\boldsymbol{\psi}^1) + \omega_4(|\boldsymbol{\psi}^2(0)|_{n-m}) = 0\} \equiv \{\boldsymbol{\psi}^1 = 0, \boldsymbol{\psi}^2(0) = 0\}$ в силу второго условия (3.4) не содержит положений равновесия вне множества $\{q_1 = \ldots = q_m = 0\}$.

По теореме 2.1 находим, что управляющее воздействие (3.3) обеспечивает асимптотическую устойчивость положения равновесия по $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m, q_1, \ldots, q_m$.

2. Пусть в цепи обратной связи координаты $q_1, q_2, \dots, q_m$ измеряются непрерывно, так что может быть образовано управляющее воздействие $U = (U^1, U^2)$,

$$U^1 = -C_1(t)\mathbf{q}^1(t) + \int_{-h}^{0} F_1(t,s)\mathbf{q}^1(t+s)ds, \quad U^2 = 0, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{q}^1 = (q_1, \dots, q_m)'$, матрицы C_1, F_1 ограничены и равномерно непрерывны вместе со своими производными по $t \in R^+$ и $s \in [-h, 0]$.

Уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = -M(t)\mathbf{q}^1(t) + \int_{-h}^{0} F_1(t,s)(\mathbf{q}^1(t+s) - \mathbf{q}^1(t))ds, \tag{3.6}$$

$$M(t) = C_1(t) - \int_{-h}^{0} F_1(t,s)ds.$$

Допустим, что коэффициенты усиления выбраны так, что для $t \in R^+$, $s \in [-h, 0]$

$$\dot{M}(t) \leqslant 0, \quad F_1(t,s) \geqslant 0, \quad \frac{\partial F_1(t,s)}{\partial s} - \frac{\partial F_1(t,s)}{\partial t} \geqslant 2a_0 E, a_0 > 0.$$

Тогда для производной функционала в

$$V(t, \psi^1, \varphi^1) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varphi}^1(0))' M(t)\boldsymbol{\varphi}^1(0) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\psi}^1(0))' A(\boldsymbol{\psi}^1(0)) +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-h}^{0} (\boldsymbol{\varphi}^1(s) - \boldsymbol{\varphi}^1(0)) F(t,s)(\boldsymbol{\varphi}^1(s) - \boldsymbol{\varphi}^1(0))ds$$

в силу (3.6) можно вывести оценку

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\varphi}^1) \leqslant -W(\boldsymbol{\varphi}^1) \leqslant -a_0 \int_{-h}^{0} (\boldsymbol{\varphi}^1(s) - \boldsymbol{\varphi}^1(0))'(\boldsymbol{\varphi}^1(s) - \boldsymbol{\varphi}^1(0))ds \leqslant 0.$$

Применяя теорему 2.1 можно найти, что под действием управляющего воздействия (3.5) положение равновесия (3.2) системы (3.1) будет асимптотически устойчиво по $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_m, q_1, \dots, q_m$.

Пример. Задача об одноосной ориентации твердого тела при помощи управляющих моментов.

Рассматривается твердое тело, имеющее неподвижную точку O. Пусть $OXYZ$ – инерциальная система координат, $Oxyz$ – система координат, жестко связанная с телом, ψ – угол прецессии, θ – угол нутации, φ – угол собственного вращения. Движение такого тела можно описать в углах Эйлера уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} = u_\psi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = u_\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = u_\varphi,$$

$$T = \frac{1}{2}\Big(A(\dot\psi\sin\theta\sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi)^2 +$$
$$+B(\dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi)^2 + C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta)^2\Big).$$

Определим управление $u = (u_\theta, u_\psi, u_\varphi)'$ таким образом, чтобы ось Oz была ориентирована по оси OZ. Заметим при этом, что в этом положении $\dot\theta = \theta = 0$, а из-за неопределенности в знаках φ и ψ при $\theta = 0$ кинетическая энергия T определенно- положительна при $\theta = 0$ лишь по $\dot\theta$ и $(\dot\varphi+\dot\psi)$. На основании предыдущих результатов получаем, что управляющие воздействия

$$u_\psi = u_\varphi = 0, \quad u_\theta = -k\dot\theta(t) - a\sin\theta(t - r(t)), \quad 0 \leqslant r(t) \leqslant h, 2ah < k,$$

или

$$u_\psi = u_\varphi = 0, \quad u_\theta = -k\theta(t) + \int\limits_{-h}^{0} f(s)\theta(t+s)ds,$$

$$k - \int\limits_{-h}^{0} f(s)ds > 0, \quad f(s) > 0, \quad \dot f(s) > 0$$

решают задачу о стабилизации оси Oz тела вдоль OZ по переменным θ и $\dot\theta$, т.е. по углу отклонения Oz от OZ и ее скорости. При этом, любое возмущение будет стремиться к стационарному вращению вокруг OZ.

Полученные результаты развивают результаты работы [2].

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант N 05-01-000765).

Литература

[1] Румянцев, В.В. Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных / В.В. Румянцев, А.С. Озиранер. – М: Наука, 1987. – 253 с.

[2] Андреев, А.С. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения / А.С. Андреев, А.С. Павликов // ПММ. – 1999. – Т. 63. Вып. 1. – С. 5.

[3] Хейл, Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений / Дж. Хейл . – М.: Мир, 1984. – 421 с.

[4] Андреев, А.С. Предельные уравнения в задаче об устойчивости ФДУ / А.С. Андреев, Д.Х. Хусанов // Диф. урав. – 1998. – Т. 34. – № 4. – С. 435-440.

[5] Андреев, А.С. К методу функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости и неустойчивости / А.С. Андреев, Д.Х. Хусанов // Диф.урав. – 1998. – Т. 34. – № 7. – С. 876–885.

[6] Калистратова, Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием / Т.А. Калистратова // Авт. и телемех. – 1986. – № 5. – С. 32–37.

Поступила в редакцию 25/*IV*/2006;
в окончательном варианте — 25/*V*/2006.

STABILITY TO PART OF THE VARIABLES MECANICAL CONTROL SYSTEM WITH DELAYED FEEDBACK

© 2006 S.V. Pavlikov[2]

In the paper the asymptotic stability of the trivial solution of a functional-differential equation of delay type relative to part of the variables is studied. The Lyapunov functional whose derivative is sign-definite is used. There is no need the assumption of the solutions to be bounded as functions of the non-controllable coordinates. The obtained theorem is used to solve the problem of stabilizing mechanical control system with delayed feedback.

Paper received 25/*IV*/2006.
Paper accepted 25/*V*/2006.

[2]Pavlikov Sergey Vladimirovich (`sp@im.tbit.ru`), Dept. of MMITE, Kama State Academy of Engineering and Economy, Naberezhnye Chelny, 423810, Russia.