

## ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ УДАРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ И ПЕРЕМЕННЫМИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ<sup>1</sup>

© 2007 В.В. Зуев, А.Г. Шмелева<sup>2</sup>

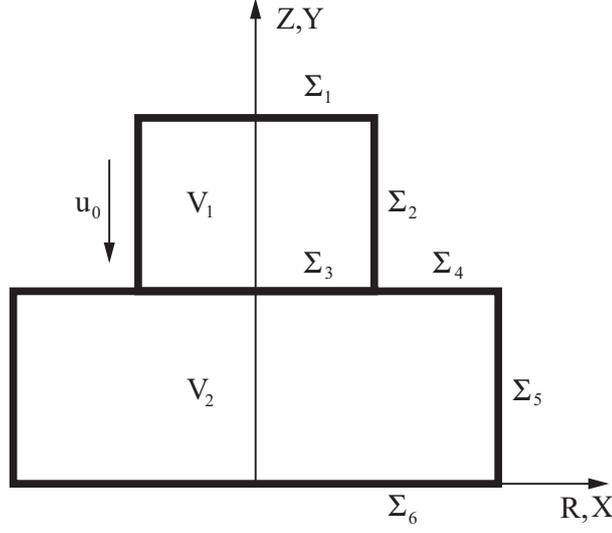
В данной работе рассматривается математическая модель волновых движений в упруго-пластических телах, обладающих рядом усложненных свойств: разупрочнение, переменные упругие модули, наличие необратимых объемных деформаций. Опираясь на определяющие соотношения, предложенные одним из авторов [1], получена замкнутая система разрешающих уравнений, описывающая динамические процессы в случае обобщенной модели Мизеса—Шлейхера с учетом разупрочнения и переменных упругих свойств. Проведено всестороннее численное исследование полученной системы с помощью модифицированной, полностью консервативной схемы метода конечных элементов, основанной на аппроксимации вектора скорости по треугольному элементу линейной функцией.

### 1. Постановка задачи осесимметричного ударного нагружения

Рис. 1 Рассмотрим в рамках осесимметричной постановки задачу о нормальном ударе бойка цилиндрической формы по преграде конечной толщины. Материалы преграды и ударника представляют собой деформируемые упруго-пластические среды с усложненными свойствами. Предположим, что ось  $z$  направлена вертикально вверх против направления скорости удара и является осью симметрии, начало отсчета  $z$  от тыльной поверхности преграды, ось  $r$  ей ортогональна (рис. 1). Тогда уравнения движения, соотношения, вытекающие из закона Гука и соотношения обобщенного ассоциированного закона [1], дают следующую систему для десяти дифференциальных уравнений, относительно десяти неизвестных функций  $u_r, u_z, S_r, S_z, S_{rz}, p, \varepsilon_r^p, \varepsilon_z^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_{rz}^p$ , описывающую динамическое поведение системы ударник-преграда:

<sup>1</sup>Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Ковалевым.

<sup>2</sup>Зуев Владимир Васильевич, Шмелева Анна Геннадьевна ([mgupi@mail.ru](mailto:mgupi@mail.ru)), кафедра прикладной математики и информатики Московского государственного университета приборостроения и информатики, 107996, Россия, Москва, ул.Стромынка, 20.



$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial S_r}{\partial r} - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial S_{rz}}{\partial z} &= \frac{2S_r + S_z}{r}, \\
 \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial S_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial S_z}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{S_{rz}}{r}, \\
 \frac{\partial S_r}{\partial t} + \frac{2}{3}G(B_r(2A_r - A_z - A_\theta) - 2) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{3}GB_{rz}(2A_r - A_z - A_\theta) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \\
 + \frac{2}{3}GB_{rz}(2A_r - A_z - A_\theta) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{2}{3}G(B_z(2A_r - A_z - A_\theta) + 1) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\
 - \frac{2}{3} \left[ 2(\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^p) - (\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^p) - (\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^p) \right] \frac{dG}{d\theta^p} &= \\
 = \frac{2}{3}G(B_\theta(-2A_r + A_z + A_\theta) - 1) \frac{u_r}{r}, \\
 \frac{\partial S_z}{\partial t} + \frac{2}{3}G(B_r(2A_z - A_r - A_\theta) + 1) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{2}{3}GB_{rz}(2A_z - A_r - A_\theta) \frac{\partial u_z}{\partial r} + \\
 + \frac{2}{3}GB_{rz}(2A_z - A_r - A_\theta) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{2}{3}G(B_z(2A_z - A_r - A_\theta) - 2) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\
 - \frac{2}{3} \left[ 2(\epsilon_{zz} - \epsilon_{zz}^p) - (\epsilon_{rr} - \epsilon_{rr}^p) - (\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{\theta\theta}^p) \right] \frac{dG}{d\theta^p} &= \\
 = \frac{2}{3}G(B_\theta(-2A_z + A_r + A_\theta) - 1) \frac{u_r}{r}, \\
 \frac{\partial S_{rz}}{\partial t} + 2GA_{rz}B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + G(2A_zB_{rz} - 1) \frac{\partial u_z}{\partial r} + G(2A_zB_{rz} - 1) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \\
 + 2GA_{rz}B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} - 2(\epsilon_{rz} - \epsilon_{rz}^p) \frac{dG}{d\theta^p} &= -2GA_{rz}B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
 \frac{\partial p}{\partial t} - 3K \frac{\partial u_r}{\partial r} - 3K \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 3K \frac{u_r}{p}, \tag{1.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} - A_r B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_r B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_r B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_r B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_r B_\theta \frac{u_r}{r}, \\ \frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial t} - A_z B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_z B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_z B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_z B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_z B_\theta \frac{u_r}{r}, \\ \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t} - A_\theta B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_\theta B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_\theta B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_\theta B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_\theta B_\theta \frac{u_r}{r}, \\ \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} - A_{rz} B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_{rz} B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_{rz} B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_{rz} B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_{rz} B_\theta \frac{u_r}{r}, \end{aligned}$$

где  $\rho$  — плотность среды,  $K$  — коэффициент объемного сжатия,  $G$  — модуль сдвига,

$$A_r = \frac{H}{H_\varepsilon} \left( \frac{S_r}{F} - \frac{F'}{3} - \frac{F' S_r}{2G^2} \frac{dG}{d\theta^p} \right), \quad B_r = \frac{2GS^r}{F} - KF',$$

$$A_z = \frac{H}{H_\varepsilon} \left( \frac{S_z}{F} - \frac{F'}{3} - \frac{F' S_z}{2G^2} \frac{dG}{d\theta^p} \right), \quad B_z = \frac{2GS^z}{F} - KF',$$

$$A_\theta = \frac{H}{H_\varepsilon} \left( \frac{-(S_r + S_z)}{F} - \frac{F'}{3} + \frac{F' (S_r + S_z)}{2G^2} \frac{dG}{d\theta^p} \right),$$

$$B_\theta = \frac{-2G(S_r + S_z)}{F} - KF',$$

$$A_{rz} = \frac{H}{H_\varepsilon} \left( \frac{S_{rz}}{F} - \frac{F' S_{rz}}{2G^2} \frac{dG}{d\theta^p} \right), \quad B_{rz} = \frac{2GS^{rz}}{F},$$

$$H = H_1 H_2, \quad H_1 = H_1(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi = 0, \\ 0, & \psi < 0, \end{cases} \quad H_2 = H_2(\dot{\psi}) = \begin{cases} 1, & \dot{\psi} > 0, \\ 0, & \dot{\psi} \leq 0, \end{cases}$$

$S_r, S_z, S_{rz}$  — компоненты дивергента тензора напряжений,

$F' \equiv \frac{\partial F}{\partial p}$ ,  $p$  — первый инвариант тензора напряжений (давление),

$$H = H_1 H_2, \quad H_1 = H_1(\psi) = \begin{cases} 1, & \psi = 0, \\ 0, & \psi < 0, \end{cases} \quad H_2 = H_2(\dot{\psi}) = \begin{cases} 1, & \dot{\psi} > 0, \\ 0, & \dot{\psi} \leq 0. \end{cases}$$

Здесь  $\psi = \sqrt{2(S_r^2 + S_z^2 + S_r S_z + S_{rz}^2)} - F$ ;  $\psi = 0$  является обобщенным условием Мизеса—Шлейхера,  $F$  — функция, определяющая актуальный предел текучести,  $\dot{\psi} = d'\psi/dt$  [1].

Функция упрочнения в пространстве деформаций  $H_\varepsilon$  в рассматриваемом случае имеет вид:

$$H_\varepsilon = 2G + K(F')^2 - \frac{F'}{3} \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r^p} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_z^p} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta^p} \right) + \left( \frac{1}{F} - \frac{F'}{2G^2} \frac{dG}{d\theta^p} \right) \left[ S_r \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_r^p} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta^p} \right) + S_z \left( \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_z^p} - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\theta^p} \right) + 2S_{rz} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{rz}^p} \right]. \quad (1.2)$$

Используя экспериментальные данные [2], можно предложить зависимость модуля сдвига от объемной деформации  $\theta^p$  в виде:

$$G = G_0 e^{-L(\theta^p)^2}, \quad (1.3)$$

где  $G_0$  — начальный модуль сдвига;  $L$  — некоторая константа, определяющая интенсивность изменения модуля сдвига; для рассматриваемого материала  $G_0 = 7,7$  ГПа,  $L = 1 \cdot 10^4$  [3].

Функцию  $F$  будем задавать в виде [1]:

$$F = kp + C_0 - \alpha \sqrt{I_2^p} \quad (1.4)$$

где  $p = K(\theta - \theta^p)$ ,  $\theta = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}$  — полная объемная деформация,  $\theta^p = \varepsilon_{rr}^p + \varepsilon_{zz}^p + \varepsilon_{\theta\theta}^p$  — объемная пластическая деформация,  $C_0$  — предел текучести в случае идеальной пластичности Мизеса.

Положительным значениям  $\alpha$  соответствует разупрочнение, отрицательным  $\alpha$  — упрочнение, а при  $\alpha = 0$  имеет место идеальная пластичность. Коэффициент  $k$  принимается равным 0.3 (см. работу [4]).

## 2. Результаты численного моделирования

Решение поставленной задачи проводилось с помощью метода конечных элементов. Введем следующие обозначения в плоскости симметрии (рис. 1):  $V_1$  — область ударника с границей  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ ;  $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$  — свободная от усилий граница,  $\Sigma_3$  — контактная граница ударника и мишени;  $V_2$  — область, занятая мишенью с границей  $\Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6$  — свободной от усилий.

В качестве начальных условий принимается:

$$u_r(r, z) = S_r(r, z) = S_z(r, z) = S_{rz}(r, z) = p(r, z) = \varepsilon_r^p(r, z) = \varepsilon_z^p(r, z) = \varepsilon_{rz}^p(r, z) = 0$$

при  $(r, z) \in V$ ,

$$\begin{aligned} u_z(r, z) &= u_0 \quad \text{при } (r, z) \in V_1, \\ u_z(r, z) &= 0 \quad \text{при } (r, z) \in V_2, \end{aligned}$$

где  $V = V_1 \cup V_2$  — область, занятая ударником и преградой,  $u_0$  — начальная скорость удара. Граничные условия:

$$\begin{aligned} \sigma_{nn} = \sigma_{n\tau} &= 0 \quad \text{при } (r, z) \in \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5 \cup \Sigma_6 \\ [u_n] = [u_\tau] &= 0 \quad \text{при } (r, z) \in \Sigma_3. \end{aligned}$$

Здесь индекс  $n$  обозначает проекцию на нормаль,  $\tau$  — проекцию на направление касательной к границе, на которой ставятся граничные условия. Квадратные скобки обозначают скачок заключенной в них величины.

Рассмотрим результаты численных расчетов различных вариантов удара с  $u_0 = 100$  м/с стальным ударником по однородной преграде. Материал ударника идеально-пластический ( $\alpha = 0$ ),  $\rho_{yd} = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $G_{0yd} = 81$  ГПа,  $K_{yd} = 175$  ГПа, предел текучести  $S_{0yd} = 1,7$  ГПа. Положим, что преграда выполнена из упруго-пластического материала с разупрочнением ( $\alpha = 1$  ГПа) с плотностью  $\rho_{np} = 2500$  кг/м<sup>3</sup>,  $G_{0np} = 7,7$  ГПа,  $K_{np} = 8,4$  ГПа,  $S_{0np} = 40$  МПа.

На рис. 2–5 приведены результаты численных экспериментов для случаев, когда:

- 1) Материал преграды обладает постоянным модулем сдвига  $G_{0np} = 7,7$  ГПа (рис. 2–3);
- 2) Модуль сдвига материала преграды, уменьшается согласно (3) (рис. 4–5).



Рис. 2

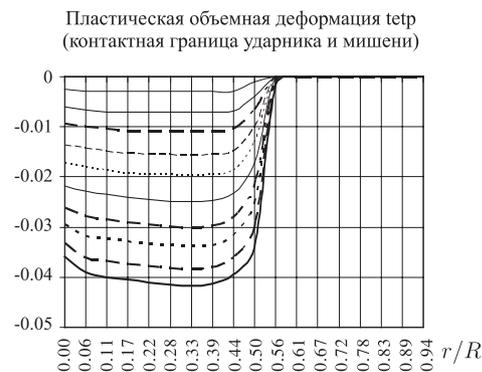


Рис. 3



Рис. 4

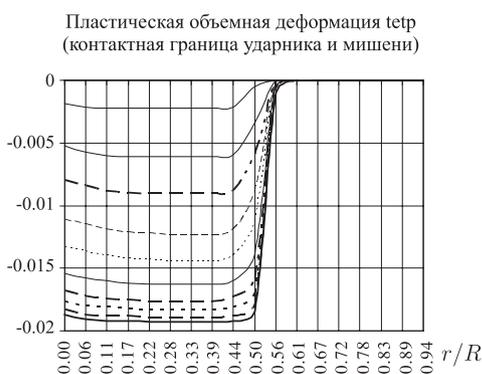


Рис. 5

На рис. 2–3 приведены зависимости интенсивности пластических деформаций сдвига и пластической объемной деформации от безразмерной переменной  $r_1 = r/R$ , где  $R$  — радиус мишени, в области контактной границы

ударника и мишени для первого случая ( $G = \text{const}$ ) в различные моменты времени ( $t_0 = 0, t_1 = 0.1, t_2 = 0.2, \dots, t_9 = 0.9, t_{10} = 1$  мкс). На рис. 4–5 приведены аналогичные результаты для второго случая.

Как показывает анализ результатов численного моделирования, учет изменения упругого модуля, позволяет выявить существенное уменьшение интенсивности пластических деформаций сдвига и объемной пластической деформации. Так, сравнение графиков рис. 2 и рис. 4 показывает, что интенсивность пластических деформаций сдвига уменьшилась на 80%, а объемная пластическая деформация (рис. 3 и 5) уменьшается на 55%.

Разработанная математическая модель и соответствующий пакет программ позволил учесть и описать существенные механические эффекты, среди которых отметим значительное влияние уменьшения модуля сдвига на интенсивность пластических деформаций сдвига и объемную пластическую деформацию. Предложенный пакет программ дает возможность всесторонне исследовать напряженно-деформированное состояние и разрушение разнообразных материалов при различных динамических воздействиях.

## Литература

- [1] Bieniawski, Z.T. Deformational behavior of fractured rock under multiaxial compression / Z.T. Bieniawski // Proc. Struct. Solid Mech. Engng. Design. Southampton. Part 1. – 1969. – P. 589-598.
- [2] Зуев, В.В. Определяющие соотношения и динамические задачи для упруго-пластических сред с усложненными свойствами / В.В. Зуев. – М.: ФМ, 2006. – 174 с.
- [3] Зуев, В.В. Волновые движения в средах с разупрочнением и переменными упругими свойствами / В.В. Зуев, А.Г.Шмелева // IX Всероссийский съезд по теор. и прикл. механике. Аннотации докладов. – Т. III, – Нижний Новгород, 2006. – С. 98.
- [4] Шмелева, А.Г. Динамическое нагружение дилатантных сред с переменным упругим модулем / А.Г. Шмелева // Сборник трудов молодых ученых и специалистов МГАПИ. – М.: МГАПИ, 2005. – № 7. – С. 108–112.

Поступила в редакцию 26/VIII/2006;  
в окончательном варианте — 26/VIII/2006.

**AXISYMMETRIC SHOCK LOADING ELASTIC-PLASTIC MEDIUM WITH WORK-SOFTENING AND VARIABLE ELASTIC PROPERTIES<sup>3</sup>**© 2007 V.V. Zuev, A.G. Shmeleva<sup>4</sup>

In the paper a mathematical model of wave motion in elastic-plastic bodies complicated properties (work-softening, variable elastic modules, presence of irreversible volume strains) is considered. Supporting by the constitutive proposed by one of the authors [1], the closed system of the allowing equations presenting dynamic processes in case of generalized model Mises–Schleikher due to work-softening and variable elastic properties is obtained. In view of specified above features of deformation behaviour of materials the two-dimensional axisymmetric problem on a shock loading of a plate is numerically resolved. It is shown, that the proposed model allows to reveal peculiarities of mechanical behaviour of elastic-plastic bodies at dynamic processes.

Paper received 26/*VIII*/2006.Paper accepted 26/*VIII*/2006.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Kovalev.

<sup>4</sup>Zuev Vladimir Vasiljevich, Shmeleva Anna Genadievna ([mgupi@mail.ru](mailto:mgupi@mail.ru)), Dept. of Applied Mathematics and Informatics, Moscow State University of Instrumental Design and Informatics, Moscow, 107996, Russia.