УДК 517.956.4

ГЕЛЬДЕРОВСКАЯ ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МЕНЯЮЩИМСЯ НАПРАВЛЕНИЕМ ЭВОЛЮЦИИ

© 2007 Н.Р. Пинигина, С.В. Попов¹

В работе устанавливается разрешимость краевых задач для параболических уравнений второго порядка с меняющимся направлением эволюции в пространствах Гельдера. Для таких задач показано, что гельдеровские классы их решений существенно зависят как от форм условий склеивания, так и от нецелого показателя.

Введение

Краевые задачи для уравнений с меняющимся направлением времени стали предметом для исследования в теории уравнений в частных производных давно. Одним из первых работ, посвященных параболическим уравнениям с меняющимся направлением времени, были работы М. Жевре. Общая теория краевых задач для уравнений смешанного типа с произвольными коэффициентами и многообразием смены типа были предметом исследования М.А. Лаврентьева, А.В. Бицадзе, С.А. Терсенова, И.М. Петрушко, В.Н. Монахова, Т.И. Зеленьяка, А.И. Кожанова и многих других.

Большое число работ посвящено изучению линейных уравнений, простейшее из которых имеет вид

$$g(x)u_t + Lu = f, \quad g(x) = \operatorname{sgn} x, \quad (1)$$

где L — эллиптический оператор 2-го порядка. Теория разрешимости краевых задач для линейных моделей подобных уравнений была построена в работах С.А. Терсенова, А.М. Нахушева, И.Е. Егорова, А.А. Керефова, Н.В. Кислова, С.Г. Пяткова, С.В. Попова и многих других авторов. В монографии С.А. Терсенова [1], в частности, впервые было установлено, что гладкие решения этих задач существуют только при условиях выполнения конечного числа связей интегрального характера между данными задачи. Он изучал эти задачи в гельдеровских классах функций $H_{x,t}^{p,p/2}$ ($0 < p - [p] < 1/2$). Разрешимость сводил к разрешимости сингулярного интегрального уравнения и эти связи (условия разрешимости) выписывал в явном виде.

¹Пинигина Нюргяна Романовна, Попов С.В., кафедра высшей математики Якутского государственного университета им. М.К. Аммосова, 677000, Россия, г. Якутск, ул. Белинского, 58.

В данной работе устанавливается разрешимость краевых задач для некоторых классов уравнений вида (1). Как и в работе [2], здесь замечено, что при $p - [p] > 1/2$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных, которое, оказалось, существенно зависит от условий согласования (склеивания) при $x = 0$.

1. Непрерывные условия склеивания

В области $Q_1 = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \equiv \mathbb{R}$ рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} x u_t = u_{xx}. \quad (2)$$

Решение уравнения (2) ищется из пространства Гельдера $H_{xt}^{p,p/2}$, $p = 2l + \gamma$, l – целое, $0 < \gamma < 1$, удовлетворяющее следующим начальным условиям:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad x > 0, \quad u(x, T) = \varphi_2(x), \quad x < 0, \quad (3)$$

и условиям склеивания

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad u_x(-0, t) = u_x(+0, t). \quad (4)$$

В силу принципа максимума нетрудно видеть, что всякое ограниченное в Q и непрерывно дифференцируемое вплоть до $x = 0$ решение задачи (2)–(4) единственно. В самом деле, положительный максимум решения $u(x, t)$ однородной задачи может достигаться на линии $x = 0$. Причем в силу первого из условий склеивания эти максимумы достигаются в одной точке $(0, t)$. Тогда в силу известного свойства нормальной производной в этой точке имеем $u_{1x} - u_{2x} < 0$, что противоречит второму из условий склеивания. Аналогичное противоречие получим в случае отрицательного минимума. Отсюда следует единственность решения.

Для удобства вместо уравнения (2) будем рассматривать систему уравнений

$$u_t^1 = u_{xx}^1, \quad -u_t^2 = u_{xx}^2 \quad (5)$$

в области $Q^+ = \mathbb{R}^+ \times (0, T)$. При этом начальные условия и условия склеивания будут иметь вид:

$$u^1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u^2(x, T) = \varphi_2(x), \quad x > 0, \quad (6)$$

$$u^1(0, t) = u^2(0, t), \quad u_x^1(0, t) + u_x^2(0, t) = 0. \quad (7)$$

Предположим, что $\varphi_i(x) \in H^p(\mathbb{R})$ ($i = 1, 2$). Тогда функции

$$\omega_1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) \varphi_1(\xi) d\xi, \quad (8)$$

$$\omega_2(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(T-t)}\right) \varphi_2(\xi) d\xi$$

являются решениями уравнений (5), удовлетворяющими условиям (6) в $\mathbb{R}$. В силу метода исследования будем пользоваться интегральным представлением решения для системы уравнений (5):

$$u^1(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t x \exp\left(-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right) (t-\tau)^{-\frac{3}{2}} \alpha(\tau) d\tau + \omega_1(x, t),$$

$$u^2(x, t) = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_t^T x \exp\left(-\frac{x^2}{4(\tau-t)}\right) (\tau-t)^{-\frac{3}{2}} \beta(\tau) d\tau + \omega_2(x, t).$$
(9)

Функции, представленные формулами (9), удовлетворяют начальным условиям (6) и уравнениям (5) соответственно.

Покажем, что u^k принадлежат пространству $H_{xt}^{p,p/2}$, если введенные нами неизвестные плотности $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}(0, T)$, причем

$$\alpha^{(s)}(0) = \beta^{(s)}(T) = 0 \quad (s = 0, \dots, l). \tag{10}$$

В самом деле, в силу общих результатов [4], например, $u^1(x, t) \in H_{xt}^{p,p/2}(Q^+)$, если краевое условие $\Psi(t) = u^1(0, t) \in H^{p/2}(0, T)$ и выполнены условия согласования $\Psi^{(s)}(0) = \varphi_1^{(2s)}(0)$ ($s = 0, \dots, l$). Из представления u^1 по формуле (9) получим $\Psi(t) = u^1(0, t) = \alpha(t) + \omega_1(0, t)$ и, следовательно, $\Psi^{(s)}(t) = \alpha^{(s)}(t) + \omega_1^{(s)}(0, t)$ ($s = 0, \dots, l$). Отсюда получим, что при выполнении условий $\alpha^{(s)}(0) = 0$ ($s = 0, \dots, l$) следуют $\Psi^{(s)}(0) = \varphi_1^{(2s)}(0)$ ($s = 0, \dots, l$).

Из условий склеивания (7) получим систему уравнений относительно α , β

$$\begin{cases} \alpha(t) + \omega_1(0, t) = -\beta(t) + \omega_2(0, t), \\ -\frac{1}{\sqrt{\pi}} t^{-\frac{1}{2}} \alpha(0) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \omega_{1x}(0, t) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} (T-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(T) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \omega_{2x}(0, t) = 0, \end{cases} \tag{11}$$

или

$$\begin{cases} \alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\ \int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \int_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \\ + t^{-\frac{1}{2}} \alpha(0) - (T-t)^{-\frac{1}{2}} \beta(T) = \Phi_1(t), \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_0(t) &= \omega_2(0, t) - \omega_1(0, t), \\ \Phi_1(t) &= \sqrt{\pi}(\omega_{2x}(0, t) + \omega_{1x}(0, t)). \end{aligned}$$

При выполнении условий

$$\beta(0) = \Phi_0(0), \quad \beta(T) = 0 \quad (13)$$

систему уравнений (12) можно переписать так:

$$\begin{cases} \alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\ \int_0^t \frac{\alpha'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau + \int_t^T \frac{\beta'(\tau)}{(\tau-t)^{\frac{1}{2}}} d\tau = \Phi_1(t). \end{cases} \quad (14)$$

Отметим, что первое условие в (13) необходимо и достаточно для того, чтобы было выполнено условие $\alpha(0) = 0$.

Если второе уравнение в (14) обратить при помощи известных формул обращения оператора Абеля, то

$$\begin{cases} \alpha(t) + \beta(t) = \Phi_0(t), \\ \alpha'(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{\tau}{t}\right)^{1/2} \frac{\beta'(\tau)}{\tau-t} d\tau = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_1(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau. \end{cases} \quad (15)$$

Введем обозначения $F_0^s(t) = \Phi_0^{(s)}(t) - \Phi_0^{(s)}(0)$,

$$F_1^s(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\Phi_1^{(s-1)}(\tau) - \Phi_1^{(s-1)}(0)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \quad (s = 1, \dots, l).$$

Легко видеть, что $F_0^l(t)$, $F_1^l(t)$ принадлежат пространству Гельдера с показателем $\gamma/2$, причем $F_0^l(t) = F_1^l(t) = O(t^{\gamma/2})$ для малых t .

Предположим, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ принадлежат пространству $H^{p/2}(0, T)$. Тогда из системы (15) следует, что

$$\int_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau = \Phi_1(0). \quad (16)$$

При выполнении (16) систему (15) можно переписать так:

$$\begin{cases} \alpha'(t) + \beta'(t) = \Phi_0'(0) + F_0^1(t), \\ \alpha'(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta'(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_1^1(t). \end{cases} \quad (17)$$

Пусть выполнены условия

$$\beta'(0) = \Phi_0'(0), \quad \beta'(T) = 0, \quad (18)$$

и введем в системе (17) новые искомые функции $\bar{\beta}'(t) = \beta'(t) - \beta'(0) \frac{T-t}{T}$. Тогда систему (17), воспользовавшись формулой [4. С. 177]

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{\tau^{\rho-1} (T-\tau)^{\sigma-1}}{\tau-t} d\tau = t^{\rho-1} (T-t)^{\sigma-1} \cot(\sigma\pi) -$$

$$-\frac{\Gamma(\rho)\Gamma(\sigma-1)}{\pi\Gamma(\rho+\sigma-1)}T^{\rho+\sigma-2}F\left(2-\rho-\sigma, 1, 2-\sigma; \frac{T-t}{T}\right),$$

представим в виде:

$$\begin{cases} \alpha'(t) + \bar{\beta}'(t) = \beta'(0)\frac{t}{T} + F_0^1(t), \\ \alpha'(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau-t} d\tau = \\ = \frac{4}{\pi}\beta'(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}} + F_1^1(t), \end{cases} \quad (19)$$

где

$$\frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{T-\tau}{T(\tau-t)} d\tau = -\frac{4}{\pi}F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, если $l > 1$, то возьмем первые производные в полученной системе уравнений (19). Имея в виду формулу [5. С. 12]

$$\frac{d}{dt}[F(a, b, c; t)t^{c-1}] = (c-1)t^{c-2}F(a, b, c-1; t),$$

получим

$$\begin{cases} \alpha''(t) + \bar{\beta}''(t) = \Phi_0''(t), \\ \alpha''(t) + \frac{1}{2\pi} \left(t^{-\frac{1}{2}} \int_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau + t^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} \int_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{1/2}(\tau-t)} d\tau \right) = \\ = \frac{2}{T\pi} \beta'(0)F\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}; \frac{t}{T}\right)\left(\frac{t}{T}\right)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\pi} \Phi_1'(0)t^{-\frac{1}{2}} + F_1^2(t). \end{cases} \quad (20)$$

Из этой системы следует, что

$$\frac{1}{2} \int_0^T \frac{\bar{\beta}'(\tau)}{\tau^{3/2}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{T}} \beta'(0) + \Phi_1'(0). \quad (21)$$

В силу формулы [6. С. 254]

$$\frac{d}{dt} \int_0^T \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t} d\tau = -\frac{\varphi(0)}{T} - \frac{\varphi(T)}{T-t} + \int_0^T \frac{\varphi'(\tau)}{\tau-t} d\tau.$$

Систему (20) при выполнении условия (21) и того, что $\beta'(T) = 0$, можно переписать в виде

$$\begin{cases} \alpha''(t) + \beta''(t) = \Phi_0''(0) + F_0^2(t), \\ \alpha''(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\bar{\beta}''(\tau)}{\tau-t} d\tau = F_1^2(t). \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, мы получили уравнения (22), имеющие точно такой же вид, как и уравнения (17). Легко видеть, что при выполнении условий

$$\begin{cases} \beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0), \quad \beta^{(s)}(T) = 0, \\ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \beta^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = 2\sqrt{\frac{1}{T}}\beta^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \\ s = 2, \dots, l-1 \end{cases} \quad (23)$$

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \beta^{(l)}(t) = \Phi_0^{(l)}(0) + F_0^l(t), \\ \alpha^{(l)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\beta^{(l)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = F_1^l(t). \end{cases} \quad (24)$$

Потребуем выполнения условий

$$\beta^{(l)}(0) = \Phi_0^{(l)}(0), \quad \beta^{(l)}(T) = 0 \quad (25)$$

и введем новую искомую функцию $\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \beta^{(l)}(t) - \beta^{(l)}(0)\frac{T-t}{T}$, тогда систему (24) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \alpha^{(l)}(t) + \tilde{\beta}^{(l)}(t) = \bar{F}_0^l(t), \\ \alpha^{(l)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = \bar{F}_1^l(t), \end{cases} \quad (26)$$

где $\bar{F}_0^l(t) = \beta^{(l)}(0)\frac{t}{T} + F_0^l(t)$, $\bar{F}_1^l(t) = \frac{4}{\pi}\beta^{(l)}(0)F(-\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; \frac{t}{T})(\frac{t}{T})^{\frac{1}{2}} + F_1^l(t)$ принадлежат пространству $H^{1/2}(0, T)$, причем $\bar{F}_0^l(t) = \bar{F}_1^l(t) = O(t^{1/2})$ для малых t .

Исключая $\alpha^{(l)}(t)$ в системе (26), получим сингулярное уравнение относительно $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = Q(t), \quad (27)$$

где

$$Q(t) = \bar{F}_0^l(t) - \bar{F}_1^l(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (27) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_0(t) = \tilde{\beta}^{(l)}t^{-\frac{1}{2}}$. Найдем решения $\beta_0(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t = T$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Тогда на основании формул Сохоцкого-Племеля уравнение (27) эквивалентно решению задачи сопряжения

$$\Psi^+(t) = \frac{1+i}{1-i}\Psi^-(t) + \frac{Q(t)}{t^{\frac{1}{2}}(1-i)}, \quad t \in (0, T), \quad (28)$$

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

при дополнительном условии $\Psi(\infty) = 0$. Так как $G = \frac{1+i}{1-i}$ и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\ln G}{\tau - z} d\tau\right) = (z - T)^{\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{4}},$$

то в указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(z) = (z-T)^{\frac{1}{4}}z^{-\frac{1}{4}}$, индекс $\varkappa = 0$.

Согласно общей теории [7, 8]

$$\Psi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{t^{\frac{1}{2}}(1-i)\chi^+(\tau)(\tau-z)} d\tau.$$

Тогда

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) = t^{\frac{1}{2}}(\Psi^+(t) - \Psi^-(t)) = \frac{Q(t)}{2} + \frac{(T-t)^{\frac{1}{4}}t^{\frac{1}{4}}}{2\pi} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\frac{1}{4}}\tau^{\frac{1}{4}}(\tau-t)} d\tau. \quad (29)$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{1/2}(0, T)$, то функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$, представленная формулой (29), удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0, T)$, отличных от концов. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [8. С. 76], легко видеть, что $\tilde{\beta}^{(l)}(0) = \tilde{\beta}^{(l)}(T) = 0$. Для дальнейшего исследования поведения их на концах контура воспользуемся леммой Мусхелишвили—Терсенова [1. С. 14-17; 8. С. 82-86].

В силу этой леммы получаем, что в формуле (29) функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < \frac{1}{2}$, условию Гельдера с показателем $\frac{1}{4}$ при $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ и условию Гельдера с показателем $\frac{1}{4} - \varepsilon$ при $\gamma = \frac{1}{2}$.

Таким образом, при выполнении условий (13), (16), (18), (21), (23), (25), которые имеют вид

$$\begin{cases} \int_0^T \frac{\beta'(\tau)}{\tau^{1/2}} d\tau = \Phi_1(0), \\ \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\beta^{(s)}(\tau) - \Phi_0^{(s)}(0)\frac{T-\tau}{T}}{\tau^{3/2}} d\tau = \frac{2}{\sqrt{T}}\Phi_0^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \\ s = 1, \dots, l-1, \\ \beta^{(k)}(T) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, l-1, \end{cases} \quad (30)$$

мы получили функцию $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{p/2}(0, T)$, удовлетворяющее условиям

$$\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0), \quad s = 0, 1, \dots, l-1, \quad \beta^{(l)}(T) = 0.$$

Значения $\beta^{(s)}(t)$ определяются по формуле Тейлора

$$\beta^{(s)}(t) = \sum_{k=s}^{l-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} t^{k-s} + \frac{1}{(l-1-s)!} \int_0^t (t-\tau)^{l-1-s} \beta^{(l)}(\tau) d\tau, \quad s = 0, 1, \dots, l-1.$$

Тогда для выполнения условий $\beta^{(k)}(T) = 0$ при $k = 0, 1, \dots, l-1$ необходимо и достаточно, чтобы

$$0 = \sum_{k=s}^{l-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0)}{(k-s)!} T^{k-s} + \frac{1}{(l-1-s)!} \int_0^T (T-\tau)^{l-1-s} \beta^{(l)}(\tau) d\tau, \quad (31)$$

$s = 0, 1, \dots, l-1.$

Подставив найденные значения функций $\beta^{(s)}(t)$ в первые l условий (30), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2(l-1-s)!} \int_0^T \tau^{l-s-3/2} d\tau \int_0^1 (1-\sigma)^{l-1-s} \beta^{(l)}(\sigma\tau) d\sigma = \\ = -\frac{1}{2} \sum_{k=s+1}^{l-1} \frac{\Phi_0^{(k)}(0) T^{k-s-1/2}}{(k-s)!(k-s-1/2)} + \frac{1}{\sqrt{T}} \Phi_0^{(s)}(0) + \Phi_1^{(s)}(0), \\ s = 0, \dots, l-1. \end{array} \right. \quad (32)$$

Отметим, что функция $\beta^{(l)}(t)$ дана формулой (29). Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$. Тогда при выполнении $2l$ условий (31), (32) существует единственное решение уравнений (2), удовлетворяющее условиям (3), (4) из пространства

- 1) $H_{x,t}^{p,p/2}$, если $0 < \gamma < \frac{1}{2}$;
- 2) $H_{x,t}^{q,q/2}$, $q = 2l + \frac{1}{2}$, если $\frac{1}{2} < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x,t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/2}$, если $\gamma = \frac{1}{2}$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

2. Частный случай

Для уравнений (5), удовлетворяющих начальным условиям (6), рассмотрим следующие условия склеивания:

$$u(-0, t) = u(+0, t), \quad u_x(-0, t) = u_x(+0, t). \quad (33)$$

В этом случае сингулярное уравнение относительно $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$ будет иметь вид

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) + \frac{1}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau-t} d\tau = Q(t), \quad (34)$$

где

$$Q(t) = \overline{F}_1^l(t) - \overline{F}_0^l(t).$$

Сингулярное интегральное уравнение (34) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_1(t) = \tilde{\beta}^{(l)} t^{-\frac{1}{2}}$ и найдем решения $\beta_1(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные

при $t = T$. В этом случае $G = \frac{1-i}{1+i}$ и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\ln G}{\tau - z} d\tau\right) = (z - T)^{-\frac{1}{4}} z^{\frac{1}{4}},$$

в указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(z) = (z - T)^{\frac{3}{4}} z^{-\frac{3}{4}}$, индекс $\varkappa = 0$.

Имеем

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \frac{Q(t)}{2} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{4}} t^{-\frac{3}{4}}}{2\pi} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\frac{3}{4}} \tau^{-\frac{1}{4}} (\tau-t)} d\tau. \quad (35)$$

Из формулы (35) следует, что $\tilde{\beta}^{(l)}(0) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\frac{3}{4}} \tau^{\frac{3}{4}}} d\tau = 0. \quad (36)$$

При выполнении (36) формула (35) примет вид

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \frac{Q(t)}{2} - \frac{(T-t)^{\frac{3}{4}} t^{\frac{3}{4}}}{2\pi} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T-\tau)^{\frac{3}{4}} \tau^{\frac{3}{4}} (\tau-t)} d\tau. \quad (37)$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{\nu/2}(0, T)$, то функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$, представленная формулой (37), удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\nu}{2}$ во всех точках контура $(0, T)$, отличных от концов. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [8. С. 76], как и выше, легко видеть, что $\tilde{\beta}^{(l)}(0) = \tilde{\beta}^{(l)}(T) = 0$. Далее, в силу леммы и неравенства $\frac{\nu}{2} < \frac{3}{4}$ при $0 < \nu < 1$ получим, что в формуле (37) функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\nu}{2}$.

Таким образом, при выполнении условий, аналогичных (13), (16), (18), (21), (23), (25) и (36), получим функцию $\beta(t)$ из искомого пространства $H^{\nu/2}(0, T)$, удовлетворяющего условиям: $\beta^{(s)}(0) = \Phi_0^{(s)}(0)$ $s = 0, 1, \dots, l-1$, $\beta^{(l)}(T) = 0$.

Итак, справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$. Тогда при выполнении $2l + 1$ условий вида (31), (32) и (36) существует хотя бы одно решение уравнения (2) из пространства $H_{x,t}^{p,p/2}$, удовлетворяющее условиям (3), (33).

Замечание 1. В теореме 1 показано, что при $p - [p] \geq \frac{1}{2}$ гладкость решения не повышается с увеличением гладкости входных данных, которое в случае теоремы 2 не выполняется. Таким образом, гладкость решения существенно зависит от условий склеивания при $x = 0$.

3. Общий случай

Для уравнений (5) с начальными условиями (6) рассмотрим общие условия склеивания

$$u^1(0, t) = u^2(0, t), \quad u_x^1(0, t) + z \cdot u_x^2(0, t) = 0, \quad (38)$$

где $z = r \exp(i\varphi)$ — комплексное число.

В этом случае получим сингулярное уравнение вида

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) - \frac{z}{\pi} \int_0^T \left(\frac{t}{\tau}\right)^{1/2} \frac{\tilde{\beta}^{(l)}(\tau)}{\tau - t} d\tau = Q(t). \quad (39)$$

Сингулярное интегральное уравнение (39) будем рассматривать как уравнение относительно $\beta_0(t) = \tilde{\beta}^{(l)} t^{-\frac{1}{2}}$. Найдем решения $\beta_0(t)$, неограниченные при $t = 0$ (допускающие особенность меньше единицы) и ограниченные при $t = T$. Для этого введем кусочно-голоморфную функцию (см. [7, 8])

$$\Psi(\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\beta_0(\tau)}{\tau - \eta} d\tau.$$

Тогда на основании формул Сохоцкого—Племеля уравнение (39) эквивалентно решению краевой задачи Римана

$$\Psi^+(t) = \frac{1 + i \cdot z}{1 - i \cdot z} \Psi^-(t) + \frac{Q(t)}{t^{\frac{1}{2}}(1 - i \cdot z)}, \quad t \in (0, T), \quad (40)$$

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t), \quad t \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

при дополнительном условии $\Psi(\infty) = 0$. Отметим, что $G = \frac{1 + i \cdot z}{1 - i \cdot z} = \frac{(1 - r \sin \varphi) + i \cdot r \cos \varphi}{(1 + r \sin \varphi) - i \cdot r \cos \varphi}$ и

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\ln G}{\tau - \eta} d\tau\right) = (\eta - T)^{\theta - \theta_1 \cdot i} \eta^{-\theta + \theta_1 \cdot i}, \quad \theta_1 = \frac{\ln |G|}{2\pi},$$

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{arctg} \frac{r \cos \varphi}{1 - r \sin \varphi} + \operatorname{arctg} \frac{r \cos \varphi}{1 + r \sin \varphi} \right),$$

$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ при $|r \sin \varphi| \leq 1$; $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$ при $|r \sin \varphi| > 1$. Кроме того,

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_0^T \frac{\ln G}{\tau - \eta} d\tau\right) = (\eta - T)^{-\theta - \theta_1 \cdot i} \eta^{\theta + \theta_1 \cdot i},$$

$\varphi \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$ при $|r \sin \varphi| \leq 1$; $\varphi \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (0; \frac{\pi}{2})$ при $|r \sin \varphi| > 1$. В указанном выше классе каноническая функция равна $\chi(\eta) = (\eta - T)^\theta \eta^{-\theta} \omega(\eta)$ или $\chi(\eta) = (\eta - T)^{1-\theta} \eta^{-1+\theta} \omega(\eta)$, индекс $\varkappa = 0$, где $\omega(\eta) = (\eta - T)^{-\theta_1 \cdot i} \eta^{\theta_1 \cdot i}$.

Согласно общей теории [7, 8]

$$\Psi(\eta) = \frac{\chi(\eta)}{2\pi i} \int_0^T \frac{Q(\tau)}{\tau^{\frac{1}{2}}(1 + r \sin \varphi - ir \cos \varphi)\chi^+(\tau)(\tau - \eta)} d\tau.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^{(l)}(t) &= t^{\frac{1}{2}}(\Psi^+(t) - \Psi^-(t)) = \\ &= \frac{Q(t)}{1 + z^2} + \frac{z}{\pi(1 + z^2)}(T - t)^{\theta} t^{\frac{1}{2} - \theta} \omega(t) \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T - \tau)^{\theta} \tau^{\frac{1}{2} - \theta} \omega(\tau)(\tau - t)} d\tau \end{aligned} \quad (41)$$

или

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \frac{Q(t)}{1 + z^2} + \frac{\bar{z}}{\pi(1 + z^2)}(T - t)^{1 - \theta} t^{-\frac{1}{2} + \theta} \omega(t) \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T - \tau)^{1 - \theta} \tau^{-\frac{1}{2} + \theta} \omega(\tau)(\tau - t)} d\tau. \quad (42)$$

Из формулы (42) следует, что $\tilde{\beta}^{(l)}(0) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T - \tau)^{1 - \theta} \tau^{\frac{1}{2} + \theta} \omega(\tau)} d\tau = 0. \quad (43)$$

При выполнении (43) формула (42) примет вид

$$\tilde{\beta}^{(l)}(t) = \frac{Q(t)}{1 + z^2} + \frac{z}{\pi(1 + z^2)}(T - t)^{1 - \theta} t^{\frac{1}{2} + \theta} \omega(t) \int_0^T \frac{Q(\tau)}{(T - \tau)^{1 - \theta} \tau^{\frac{1}{2} + \theta} \omega(\tau)(\tau - t)} d\tau. \quad (44)$$

Так как $Q(t)$ принадлежит пространству $H^{\nu/2}(0, T)$, то функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$, представленная формулами (41), (44), удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ во всех точках контура $(0, T)$, отличных от концов. Рассмотрим его поведение на концах. Согласно формуле поведения интеграла типа Коши на концах контура интегрирования [8. С. 76] легко видеть, что $\tilde{\beta}^{(l)}(0) = \tilde{\beta}^{(l)}(T) = 0$. Для дальнейшего исследования поведения их на концах контура также воспользуемся леммой Мусхелишвили–Терсенова.

В силу этой леммы получаем, что если $\theta \geq \frac{1}{4}$, то в формуле (41) функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < 1 - 2\theta$, условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} - \theta$ при $1 - 2\theta < \gamma < 1$ и условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2} - \theta - \varepsilon$ при $\gamma = 1 - 2\theta$. Кроме того, заметим, что если $\theta \leq \frac{1}{4}$, то функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$ при $0 < \gamma < 2\theta$, условию Гельдера с показателем θ при $2\theta < \gamma < 1$ и условию Гельдера с показателем $\theta - \varepsilon$ при $\gamma = 2\theta$.

В формуле (44) в силу леммы Мусхелишвили–Терсенова и неравенства $\frac{\gamma}{2} < \min\{1 - \theta, \frac{1}{2} + \theta\}$ при $0 < \gamma < 1$ функция $\tilde{\beta}^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{\gamma}{2}$.

Таким образом, при выполнении 2l условий, имеющих вид (31), (32), получим функцию $\beta(t)$ по формуле (41) из искомого пространства $H^{p/2}(0, T)$.

Во втором случае при выполнении $2l+1$ условий, имеющих вид (31), (32) и (43), получим функцию $\beta(t)$ по формуле (44) из искомого пространства $H^{p/2}(0, T)$.

Таким образом доказаны:

Теорема 3. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$, и $|r \sin \varphi| \leq 1$ при $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, $|r \sin \varphi| > 1$ при $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$. Тогда при выполнении $2l$ условий вида (31), (32) существует хотя бы одно решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), (38) из пространства

- 1) $H_{x,t}^{p,p/2}$, если $0 < \gamma < \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$;
- 2) $H_{x,t}^{q,q/2}$, $q = 2l + \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$, если $\min\{2\theta, 1 - 2\theta\} < \gamma < 1$;
- 3) $H_{x,t}^{q-\varepsilon, (q-\varepsilon)/2}$, если $\gamma = \min\{2\theta, 1 - 2\theta\}$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Теорема 4. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in H^p$, $p = 2l + \gamma$ и пусть при $|r \sin \varphi| \leq 1$, $\varphi \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}; \pi)$, при $|r \sin \varphi| > 1$, $\varphi \in (-\pi; -\frac{\pi}{2}) \cup (0; \frac{\pi}{2})$.

Тогда при выполнении $2l+1$ условий вида (31), (32) и (43) существует хотя бы одно решение уравнения (2) из пространства $H_{x,t}^{p,p/2}$, удовлетворяющее условиям (3), (38).

Замечание 2. Случаи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ были рассмотрены в работах [2, 9]. При $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ имеем $G = \frac{1 \mp r}{1 \pm r}$, следовательно, каноническая функция $\chi(\eta) = (\eta - T)^{1-\theta_1-i} \eta^{-1+\theta_1 i}$, $\theta_1 = \frac{\ln|G|}{2\pi}$ при $0 < r < 1$ или $\chi(\eta) = (\eta - T)^{\frac{1}{2}-\theta_1 i} \eta^{-\frac{1}{2}+\theta_1 i}$ при $r > 1$. При этом, очевидно, мы находимся в условиях теоремы, аналогичной 4.

Литература

- [1] Терсенов, С.А. Параболические уравнения с меняющимся направлением времени / С.А. Терсенов. — Новосибирск: Наука, 1985. — 105 с.
- [2] Пинигина, Н.Р. Разрешимость краевых задач для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / Н.Р. Пинигина, С.В.Попов // Мат. заметки ЯГУ. — 2002. — Т.9. — №1. — С. 71–82.
- [3] Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
- [4] Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М.:Наука, 1970. — 327 с.
- [5] Смирнов, М.М. Уравнения смешанного типа / М.М. Смирнов // Учеб. пособие для вузов. — М.:ВШ, 1985. — 304 с.
- [6] Пресдорф, З. Некоторые классы сингулярных уравнений / З. Пресдорф. — М.:Наука. 1979. — 496 с.
- [7] Гахов, Ф.Д. Краевые задачи / Ф.Д. Гахов. — М.: Наука, 1977. — 640 с.
- [8] Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения / Н.И. Мухелишвили. — М.: Наука, 1968. — 512 с.

- [9] Попов, С.В. О первой краевой задаче для параболического уравнения с меняющимся направлением времени / С.В. Попов // *Динамика сплошной среды*. – Новосибирск, 1991. – Вып. 102. – С. 100–113.

Поступила в редакцию 13/*XII*/2006;
в окончательном варианте — 13/*XII*/2006.

**HOLDER SMOOTHNESS OF SOLUTIONS OF BOUNDARY
VALUE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATIONS WITH
VARIABLE TIME DIRECTION**

© 2007 N.R. Pinigina, S.V. Popov²

The solvability of the boundary-value problem for the second order parabolic equations with various time conditions in Holder spaces is considered. We show that the Holder classes of the solutions depend significantly on the form of the gluing conditions and non-integral Hölder exponent.

Paper received 13/*XII*/2006.

Paper accepted 13/*XII*/2006.

²Pinigina Nyurguyana Romanovna, Popov S.V., Dept. of Higher Mathematics, Yakutsk State University, Yakutsk, 667000, Russia.