

УДК 517.987.1

РАВНОМЕРНАЯ ИСЧЕРПЫВАЕМОСТЬ СЕМЕЙСТВА СЛАБО РЕГУЛЯРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ВНЕШНИХ МЕР¹

© 2007 Т.А. Срибная²

Доказаны условия, достаточные для равномерной исчерпываемости семейства слабо регулярных k -внешних мер, заданных на алгебре множеств, содержащей класс открытых множеств некоторого σ -топологического пространства (T, η) , и принимающих значения в топологической абелевой группе.

1. Постановка задачи. Основные обозначения и определения

В работе [1] доказано условие, при выполнении которого регулярная, непрерывная сверху в нуле векторная функция множества является исчерпывающей.

Задача данной работы состоит в нахождении условий, при выполнении которых семейство слабо регулярных векторных внешних мер является равномерно исчерпывающим.

Пусть T — некоторое множество, η — класс подмножеств множества T , замкнутый относительно счетных объединений и конечных пересечений, $\emptyset \in \eta$; $T \in \eta$.

Следуя А.Д. Александрову [2], пространство (T, η) будем называть σ -топологическим, множества из класса η — открытыми, а их дополнения — замкнутыми.

Пусть $\Sigma \supset \eta$ — некоторая алгебра подмножеств множества T ; $G = (G, +, \Theta)$ — топологическая абелева группа, $\mathcal{H}$ — фундаментальная система окрестностей Θ в G , nV — множество вида $\{v_1 + \dots + v_n; v_i \in V, i = 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение 1. Следуя [3], функцию множества $\varphi : \Sigma \rightarrow G$ будем называть k -внешней мерой, $k \in \mathbb{N}$, если $\varphi(\emptyset) = \Theta$ и для любой окрестности $V \in \mathcal{H}$ и для любых непересекающихся множеств $E, F \in \Sigma$

справедливо утверждение:

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

²Срибная Татьяна Аркадьевна (sribnaya@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

если $\varphi(E) \in V$, то $\varphi(E \cup F) - \varphi(F) \in kV$.

Пример 1. K -внешними мерами являются аддитивные функции множества; внешние числовые меры [4, с.149]; квазилиппшицевые функции множества [5, с.26], то есть функции, для которых выполняется следующее неравенство: $\|\varphi(E \cup F) - \varphi(F)\| \leq N \cdot \|\varphi(E)\|$, где N — число, $\varphi : \Sigma \rightarrow X$, X — нормированная группа; $E, F \in \Sigma$, $E \cap F = \emptyset$.

Для любой функции $\varphi : \Sigma \rightarrow G$ и для любого множества $E \in \Sigma$ положим

$$\widetilde{\varphi}(E) = \{\varphi(F), F \subset E, F \in \Sigma\}$$

Множество $E \in \Sigma$ назовем внутренне регулярным [6, с. 218] по отношению к семейству функций множества $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, если для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существует такое замкнутое множество F , что $F \subset E$ и

$$\{\widetilde{\varphi}(E \setminus F), \varphi \in \Phi\} \subset U.$$

Лемма 1. Если каждое открытое множество пространства (T, η) является внутренне регулярным по отношению к семейству $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, то для любого замкнутого множества $A \in \Sigma$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ существует такое открытое множество B , что

$$A \subset B \text{ и } \{\widetilde{\varphi}(B \setminus A), \varphi \in \Phi\} \subset U.$$

Доказательство. Пусть A замкнутое множество из Σ и $U \in \mathcal{H}$. Для множества $E = T \setminus A$ по условию леммы найдем замкнутое множество F , такое что

$$F \subset E \text{ и } \{\widetilde{\varphi}(E \setminus F), \varphi \in \Phi\} \subset U.$$

Множество $B = T \setminus F$ искомое. Лемма доказана.

Говорят, что функция множества $\varphi : \Sigma \rightarrow G$ слабо регулярная (регулярная) на классе множеств $\mathcal{M} \subset \Sigma$ относительно класса множеств $\mathcal{F} \subset \Sigma$, если для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любого множества $E \in \mathcal{M}$ существует такое множество $F \in \mathcal{F}$, что $F \subset E$ и $\varphi(E \setminus F) \in U$ (соответственно, $\widetilde{\varphi}(E \setminus F) \subset U$).

Последовательность попарно непересекающихся множеств будем называть спектром, убывающую последовательность множеств с пустым пересечением — локализатором.

Говорят, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, равномерно исчерпывающие (равностепенно непрерывные сверху в нуле) на классе множеств $\mathcal{M} \subset \Sigma$, если для любого спектра (соответственно, локализатора) $\{E_n\} \subset \mathcal{M}$ соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(E_n) = \Theta$$

выполняется равномерно относительно $\varphi \in \Phi$.

Если семейство функций $\Phi = \{\varphi\}$ состоит из одной функции множества φ , то будем говорить, соответственно, что функция φ исчерпывающая и непрерывная сверху в нуле на $\mathcal{M}$.

2. Теоремы о равномерной исчерпываемости семейства слабо регулярных векторных внешних мер

Теорема 1. Пусть (T, η) — некоторое σ -топологическое пространство; G — топологическая абелева группа; пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T , причем $\Sigma \supset \eta$; пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η) , пусть $\mathcal{M} \subset \Sigma$ — некоторый класс множеств.

Пусть $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, — семейство слабо регулярных на классе множеств $\mathcal{M}$ относительно класса $\mathcal{F}$ k -внешних мер.

Если функций множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывны сверху в нуле на Σ и каждое открытое множество пространства (T, η) является внутренне регулярным по отношению к семейству $\Phi = \{\varphi\}$, то функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на классе множеств $\mathcal{M} \cup \eta$.

Доказательство. Покажем сначала, что функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно исчерпывающие на классе замкнутых множеств $\mathcal{F}$.

Пусть $U \in \mathcal{H}$. Найдем окрестности нуля $U_0, U_1 \in \mathcal{H}$, такие что $U_0 = -U_0$, $(k+1)U_0 \subset U$; $U_1 = -U_1$, $(k+1)U_1 \subset U_0$.

Пусть $\{A_n\}$ — некоторый спектр из $\mathcal{F}$. Положим $C_1 = A_1$. В силу леммы 1 существует такое открытое множество B_1 , что $C_1 \subset B_1$ и

$$\{\widetilde{\varphi}(B_1 \setminus C_1), \varphi \in \Phi\} \subset U_1.$$

Пусть $C_2 = A_2 \setminus B_1$, $U_2 \in \mathcal{H}$ и $(k+1)U_2 \subset U_1$. В силу леммы 1 существует такое открытое множество B_2 , что

$$C_2 \subset B_2 \text{ и } \{\widetilde{\varphi}(B_2 \setminus C_2), \varphi \in \Phi\} \subset U_2.$$

Так как

$$A_2 \subset C_2 \cup (B_1 \setminus C_1),$$

то

$$A_2 = C_2 \cup ((B_1 \setminus C_1) \cap A_2)$$

и

$$\{\widetilde{\varphi}((B_1 \setminus C_1) \cap A_2), \varphi \in \Phi\} \subset U_1.$$

Для окрестности $U_3 \in \mathcal{H}$, $(k+1)U_3 \subset U_2$ и множества $C_3 = A_3 \setminus (B_1 \cup B_2)$ по лемме 1 найдем открытое множество B_3 такое, что и

$$C_3 \subset B_3 \text{ и } \{\widetilde{\varphi}(B_3 \setminus C_3), \varphi \in \Phi\} \subset U_3.$$

Так как

$$A_3 \subset C_3 \cup (B_1 \setminus C_1) \cup (B_2 \setminus C_2),$$

то множество A_3 можно представить в виде объединения попарно непересекающихся множеств

$$A_3 = C_3 \cup \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2,$$

где

$$\mathcal{D}_1 = (B_1 \setminus C_1) \cap A_3, \mathcal{D}_2 = ((B_2 \setminus C_2) \cap A_3) \setminus \mathcal{D}_1, \\ \{\tilde{\varphi}(\mathcal{D}_1), \varphi \in \Phi\} \subset U_1, \{\tilde{\varphi}(\mathcal{D}_2), \varphi \in \Phi\} \subset U_2.$$

Пусть $C \subset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $C \in \Sigma$; $\varphi \in \Phi$.

Тогда

$$\varphi(C) = \varphi(C\mathcal{D}_1 \cup C\mathcal{D}_2) \in \varphi(C\mathcal{D}_2) + kU_1 \subset U_2 + kU_1 \subset U_1 + kU_1 \subset U_0.$$

Отсюда, в силу произвольности множества $C \subset \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, $C \in \Sigma$, следует

$$\{\tilde{\varphi}(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2), \varphi \in \Phi\} \subset U_0.$$

Продолжив процесс неограниченно, построим последовательность окрестностей

$$\{U_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{H}, (k+1)U_n \subset U_{n-1},$$

последовательность замкнутых множеств

$$\{C_n\} : C_1 = A_1, C_n = A_n \setminus (B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}), n = 2, 3, \dots,$$

и последовательность открытых множеств $\{B_n\}$:

$$C_n \subset B_n, \{\tilde{\varphi}(B_n \setminus C_n), \varphi \in \Phi\} \subset U_n, n = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Так как

$$A_n \subset C_n \cup \left(\bigcup_{p=1}^{n-1} (B_p \setminus C_p) \right), n = 2, 3, \dots,$$

то положив для каждого номера $n = 2, 3, \dots$, $\mathcal{D}_1^n = (B_1 \setminus C_1) \cap A_n$,

$$\mathcal{D}_p^n = ((B_p \setminus C_p) \cap A_n) \setminus \bigcup_{i=1}^{p-1} \mathcal{D}_i^n, p = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad (2.2)$$

представим каждое множество A_n , $n = 2, 3, \dots$, как объединение попарно непересекающихся множеств

$$A_n = C_n \cup \mathcal{D}_1^n \cup \mathcal{D}_2^n \cup \dots \cup \mathcal{D}_{n-1}^n.$$

Из (2.1) и (2.2) следует для $n = 2, 3, \dots$

$$\{\tilde{\varphi}(\mathcal{D}_p^n), \varphi \in \Phi\} \subset U_k, p = 1, n-1. \quad (2.3)$$

Так как $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, семейство k -внешних мер, то из (2.3) следует

$$\tilde{\varphi}\left(\bigcup_{p=1}^{n-1} \mathcal{D}_p^n\right) \subset U_0, n = 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

Положим

$$H_1 = B_1, H_n = B_n \setminus \bigcup_{p=1}^{n-1} B_p, n = 2, 3, \dots$$

Тогда

$$C_n \subset H_n, H_n \setminus C_n \subset B_n \setminus C_n, n = 1, 2, \dots$$

Отсюда, из (2.1) и свойств последовательности $\{U_n\} \subset \mathcal{H}$ следует

$$\{\varphi(H_n \setminus C_n), \varphi \in \Phi\} \subset U_1, n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Положим

$$F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} H_k, n = 1, 2, \dots$$

Тогда $F_n = H_n \cup F_{n+1}$, $H_n \cap F_{n+1} = \emptyset$, $n = 1, 2, \dots$,

$$F_n \supset F_{n+1}, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset, \quad (2.6)$$

Так как семейство k -внешних мер $\Phi = \{\varphi\}$ равномерно непрерывно сверху в нуле, то существует такой номер n_0 , что для всех $n > n_0$ справедливо

$$\{\varphi(F_n), \varphi \in \Phi\} \subset U_2.$$

Так как каждая функция $\varphi \in \Phi$ является k -внешней мерой, то

$$\varphi(H_n \cup F_{n+1}) - \varphi(H_n) \in kU_2,$$

а

$$\varphi(H_n) - \varphi(H_n \cup F_{n+1}) \in -kU_2.$$

Отсюда и из (2.6) для всех $n > n_0$ следует

$$\varphi(H_n) \in \varphi(F_n) - kU_2 \subset U_2 + kU_2 \subset U_1, \varphi \in \Phi. \quad (2.7)$$

Из (2.5), (2.7) и соотношения $H_n = C_n \cup (H_n \setminus C_n)$, $n = 1, 2, \dots$ следует

$$\{\varphi(C_n), \varphi \in \Phi\} \subset U_0, n > n_0. \quad (2.8)$$

Из (2.3), (2.4) и (2.8) следует

$$\{\varphi(A_n), \varphi \in \Phi\} \subset U, n > n_0.$$

Таким образом равномерная исчерпываемость функций множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ на классе множеств $\mathcal{F}$ доказана.

Предположим, что семейство $\Phi = \{\varphi\}$ не является равномерно исчерпывающим на классе множеств $\mathcal{M} \cup \eta$. Тогда существуют спектр $\{E_n\} \subset \mathcal{M} \cup \eta$, окрестность $U \in \mathcal{H}$ и последовательность функций $\{\varphi_n\} \subset \Phi$, для которых

$$\varphi_n(E_n) \notin U, n = 1, 2, \dots$$

Пусть $U_0 \in \mathcal{H}$, $(k+1)U_0 \subset U$. Так как каждая функция φ_n , $n = 1, 2, \dots$ слабо регулярна на классе множеств $\mathcal{M}$ относительно класса F , а каждое открытое множество пространства (T, η) является внутренне регулярным по отношению к семейству $\Phi = \{\varphi\}$, то найдутся множества $F_n \in \mathcal{F}$ такие, что

$$F_n \subset E_n \text{ и } \varphi_n(E_n \setminus F_n) \in U_0, n = 1, 2, \dots$$

Отсюда, по определению k -внешней меры, получим

$$\varphi_n(F_n \cup (E_n \setminus F_n)) \in \varphi_n(F_n) + kU_0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

В силу равномерной исчерпываемости семейства $\Phi = \{\varphi\}$ на классе $\mathcal{F}$ существует номер n_0 такой, что

$$\varphi_n(F_n) \in U_0 \text{ при всех } n > n_0. \quad (2.10)$$

Из (2.9) и (2.10), в силу выбора окрестности $U_0 \in \mathcal{H}$, следует

$$\varphi_n(E_n) \in U, \quad n > n_0,$$

что противоречит предположению.

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть (T, η) — некоторое σ -топологическое пространство, пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T , причем $\Sigma \supset \eta$; пусть $\mathcal{F}$ — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η) ; пусть $\mathcal{M} \subset \Sigma$ — некоторый класс множеств.

Если φ — непрерывная сверху в нуле k -внешняя мера, заданная на алгебре Σ , принимающая значения в топологической абелевой группе G , регулярная на классе множеств $\mathcal{M} \cup \eta$ относительно класса $\mathcal{F}$, то φ — исчерпывающая на классе множеств $\mathcal{M} \cup \eta$.

Замечание 1. Известно [2], что в любом некомпактном нормальном σ -топологическом пространстве существует регулярная (относительно класса всех замкнутых множеств) аддитивная исчерпывающая скалярная функция множества, которая не является непрерывной сверху в нуле. Следовательно, утверждение, обратное следствию 1, не верно.

Определение 2. Пусть $\mathcal{L}$ — класс всех замкнутых множеств σ -топологического пространства (T, η) , $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$. Будем говорить, что классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы, если для любых непересекающихся множеств $F \in \mathcal{F}$ и $L \in \mathcal{L}$ существуют такие открытые непересекающиеся множества $W, V \in \eta$, что $F \subset W, L \subset V$.

Пример 2. Если (T, η) — регулярное топологическое пространство, $\mathcal{L}$ — класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) , $\mathcal{F}$ — некоторый класс замкнутых компактных множеств пространства (T, η) , то классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы.

Если (T, η) — регулярное хаусдорфово топологическое пространство $\mathcal{L}$ — класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) , $\mathcal{F}$ — некоторый класс компактных множеств пространства (T, η) , то классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы.

Если (T, η) — нормальное топологическое пространство $\mathcal{L}$ — класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) , $\mathcal{F}$ — некоторый класс замкнутых множеств пространства (T, η) , то классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы.

Теорема 2. Пусть (T, η) — некоторое σ -топологическое пространство, G — топологическая абелева группа; Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T , причем $\Sigma \supset \eta$. Пусть $\mathcal{L}$ — класс всех замкнутых множеств пространства (T, η) , $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ и классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы. Пусть

$\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$ — семейство слабо регулярных на классе множеств Σ относительно класса $\mathcal{F}$ k -внешних мер.

Если функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ равностепенно непрерывны сверху в нуле на Σ , то они равномерно исчерпывающие на Σ .

Доказательство теоремы 2 опирается на следующие леммы, которые формулируются в предположении, что выполнены условия теоремы.

Лемма 2.1. Если $\varphi \in \Phi$, то для любого открытого множества $H \in \eta$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$, для которых $\widetilde{\varphi}(H) \not\subset U$, существует открытое множество $A \in \eta$ такое, что $A \subset H$, $\varphi(A) \notin U_1$, где

$$U_1 \in \mathcal{H}, U_1 = -U_1, (k+1)U_1 \subset U.$$

Доказательство. Пусть множество $H \in \eta$ и окрестность $U \in \mathcal{H}$ такие, что $\widetilde{\varphi}(H) \not\subset U$. Тогда существует множество $E \in \Sigma$, такое что $E \subset H$ и $\varphi(E) \notin U$. Так как функция φ слабо регулярная на классе множеств Σ относительно класса $\mathcal{F}$, то существует такое множество $C \in \mathcal{F}$, что $C \subset H \setminus E$, $\varphi((H \setminus E) \setminus C) \in U_1$.

Положим $A = H \setminus C$. Так как $A = (A \setminus E) \cup E$ и $\varphi(A \setminus E) \in U_1$, то $\varphi(A) - \varphi(E) \in kU_1$.

Предположим, что $\varphi(A) \in U_1$. Тогда $-\varphi(E) \in (k+1)U_1$; следовательно $\varphi(E) \in U$.

Полученное противоречие показывает, что множество A искомое.

Лемма 2.2. Если $\varphi \in \Phi$, то для любого множества $E \in \Sigma$ и для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$, для которых $\widetilde{\varphi}(E) \not\subset U$ существует замкнутое множество $F \in \mathcal{F}$ такое, что $F \subset E$, $\varphi(F) \notin U_1$.

Лемма 2.2 доказывается аналогично лемме 2.1.

Лемма 2.3. Функции множества семейства Φ равномерно исчерпывающие на классе открытых множеств.

Доказательство. Пусть $U \in \mathcal{H}$, $\{\mathcal{H}_n\}$ — некоторый спектр из η . Положим

$$E_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} H_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Так как последовательность множеств $\{E_n\}$ является локализатором из η , а $\eta \subset \Sigma$, то существует номер n_0 такой, что для всех номеров $n > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\varphi(E_n) \in U_1,$$

где $U_1 \in \mathcal{H}$, $U_1 = -U_1$, $(k+1)U_1 \subset U$. Отсюда и из соотношения

$$E_n = H_n \cup E_{n+1},$$

в силу выбора окрестности $U_1 \in \mathcal{H}$, следует, что для любого номера $n > n_0$ и для любой функции $\varphi \in \Phi$ справедливо

$$\varphi(H_n) \in U_1.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Покажем сначала, что каждое открытое множество пространства (T, η) является внутренне регулярным по отношению к семейству $\Phi = \{\varphi\}$.

Для этого достаточно показать, что для любой окрестности $U \in \mathcal{H}$ и для любого множества $F \in \mathcal{L}$ существует такое открытое множество $H \in \eta$, что

$$F \subset H, \{\widetilde{\varphi}(H \setminus F), \varphi \in \Phi\} \subset U.$$

Предположим противное. Тогда существуют окрестность $U \in \mathcal{H}$ и множество $F_0 \in \mathcal{L}$ такие, что для любого открытого множества $H \supset F_0$ найдется такая функция $\varphi \in \Phi$, для которой $\widetilde{\varphi}(H \setminus F_0) \not\subset U$.

Так как $T \in \eta$, то существует такая функция $\varphi_{n_1} \in \Phi$, что

$$\widetilde{\varphi_{n_1}}(H \setminus F_0) \not\subset U.$$

По лемме 2.2 найдем такое множество $F_1 \in \mathcal{F}$, что

$$F_1 \subset T \setminus F_0, \varphi_{n_1}(F_1) \in U_1. \quad (2.11)$$

Так как классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы, то существуют такие открытые множества A_0 и A_1 , что

$$F_0 \subset A_0, F_1 \subset A_1, A_0 \cap A_1 = \emptyset. \quad (2.12)$$

В силу (2.11), (2.12) и леммы 2.1 существует такое открытое множество $B_1 \subset A_1$, что

$$\varphi_{n_1}(B_1) \notin U_2,$$

где $U_2 \in \mathcal{H}$, $U_2 = -U_2$, $(k+1)U_2 \subset U_1$.

По предположению для открытого множества A_0 существует такая функция $\varphi_{n_2} \in \Phi$, что

$$\widetilde{\varphi_{n_2}}(A_0 \setminus F_0) \not\subset U.$$

По лемме 2.2 найдем такое множество $F_2 \in \mathcal{F}$, что

$$F_2 \subset A_0 \setminus F_0, \varphi_{n_2}(F_2) \notin U_1. \quad (2.13)$$

Так как классы множеств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{L}$ η -отделимы, то существуют такие открытые множества A'_0 и A'_1 , что

$$F_0 \subset A'_0 \subset A_0, F_2 \subset A'_1 \subset A_0, A'_0 \cap A'_1 = \emptyset. \quad (2.14)$$

В силу (2.13), (2.14) и леммы 1.1 существует такое открытое множество $B_2 \subset A'_1$, что

$$\varphi_{n_2}(B_2) \notin U_2.$$

Продолжив процесс по индукции, построим спектр $\{B_k\}$ открытых множеств и подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\} \subset \Phi$, для которых

$$\varphi_{n_k}(B_k) \notin U_2, k \in N,$$

что противоречит равномерной исчерпываемости на η семейства функций множества $\Phi = \{\varphi\}$.

Таким образом, если положить $\mathcal{M} = \Sigma$, то функции множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и, следовательно, являются равномерно исчерпывающими на Σ .

Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть (T, η) — регулярное хаусдорфово топологическое пространство; G — топологическая абелева группа, пусть Σ — некоторая алгебра подмножеств множества T , причем $\Sigma \supset \eta$; пусть $\mathcal{F}$ — класс компактных множеств пространства (T, η) .

Если $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, — семейство слабо регулярных на алгебре Σ относительно класса $\mathcal{F}$ аддитивных функций множества, то из равномерной непрерывности сверху в нуле на Σ функций множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$ следует их равномерная исчерпываемость на Σ .

3. Заключение

В данной работе основной результат работы [1] (теорема 1, с.44) распространен на семейство векторных внешних мер. При этом свойство "сильной" регулярности функции множества из работы [1] заменено на свойство слабой регулярности функций множества семейства $\Phi = \{\varphi\}$, $\varphi : \Sigma \rightarrow G$, и условие внутренней регулярности открытых множеств σ -топологического пространства (T, η) по отношению к семейству $\Phi = \{\varphi\}$.

Кроме этого в работе показано, что если (T, η) — одно из указанных в приводимой ниже таблице топологических пространств, $\mathcal{F}$ — соответствующий класс множеств, то для равномерной исчерпываемости семейства векторных внешних мер, заданных на алгебре множеств Σ , $\Sigma \supset \eta$, достаточно слабой регулярности каждой функции $\varphi \in \Phi$ относительно класса $\mathcal{F}$ и равномерной непрерывности сверху в нуле семейства $\Phi = \{\varphi\}$.

Таблица

(T, η)	$\mathcal{F}$
Регулярное пространство	Класс замкнутых компактных множеств
Регулярное хаусдорфово пространство	Класс компактных множеств
Нормальное пространство	Класс замкнутых множеств

Литература

- [1] Климкин, В.М. Исчерпываемость регулярной функции множества в топологическом пространстве / В.М. Климкин, Т.А. Срибная // Матем. заметки. — 1991. — Т. 50. — № 5. — С. 43–47.
- [2] Александров, А.Д. Аддитивные функции множества в абстрактных пространствах / А.Д. Александров // Мат. сб. — Т. 9(51). — С. 563–628.

- [3] Саженков, А.Н. Ограниченность векторных внешних мер / А.Н. Саженков // Матем. заметки. – 1979. – Т. 25. – № 6. – С. 913–917.
- [4] Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, ДЖ. Шварц. – М.: ИИЛ, 1962. – 895 с.
- [5] Гусельников, Н.С. О продолжении квазилипшицевых функций множества / Н.С. Гусельников // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 21–31.
- [6] Халмош, П. Теория меры / П. Халмош. – М.: ИИЛ, 1953. – 291 с.

Поступила в редакцию 18/XI/2006;
в окончательном варианте — 19/XII/2006.

UNIFORM EXHAUSTION OF A FAMILY OF WEAKLY REGULAR OUTER VEKTOR MEASURES³

© 2007 Т.А. Sribnaya⁴

Conditions for the unifom exhaustion of a family of weakly regular k -outer measures defined on an algebra of sets containing the class of open subsets of some σ -topological space (T, η) and taking values in topological abelian group are found.

Paper received 18/XI/2006.

Paper accepted 19/XII/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin

⁴Sribnaya Tatyana Arkadjevna (sribnaya@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.