УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ[1]

© 2007 А.А. Абдрахманова[2] В.П. Павлов[3]

В работе разработаны методы построения уравнений равновесия для стержней с учетом геометрической нелинейности без ограничения на величину перемещений и линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений равновесия стержней. Сформулирована модельная задача, имеющая точное аналитическое решение, данная задача решена предлагаемым численным методом с учетом геометрической нелинейности, и на основе сопоставления точного и численного решений показано, что предлагаемый численный метод имеет достаточно высокую точность.

1. Постановка задачи

Традиционные методы сопротивления материалов достаточно точны лишь при малых перемещениях и не позволяют рассчитать напряженно-деформированное состояние стержня при больших перемещениях. Это связано с тем, что при больших перемещениях необходимо решать нелинейные относительно функций перемещения уравнения. В связи с этим в данной работе предлагается метод математического моделирования деформирования стержня, не имеющий ограничений на характер функций перемещений.

Для демонстрации сути метода рассматривается первоначально прямой стержень длиной l с прямоугольным поперечным сечением $b \times h$, с произвольными способами закрепления по концам. Стержень изготовлен из упругого материала с модулем упругости E и нагружен внешней распределенной нагрузкой, погонные составляющие которой q_τ и q_n направлены соответственно вдоль и поперек оси стержня.

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Л.С. Пулькиной.

[2]Абдрахманова Алия Айдаровна, кафедра математики Уфимского государственного авиационного технического университета, 450000, Россия, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

[3]Павлов Виктор Павлович, кафедра сопротивления материалов Уфимского государственного авиационного технического университета, 450000, Россия, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

2. Построение расчетных дифференциальных уравнений

Координатная система задана ортогональными осями X_1, X_2, X_3. Плоскости X_1, X_3 и X_1, X_2 совмещены соответственно с горизонтальной и вертикальной плоскостями симметрии недеформированного стержня.

Базовой линией стержня является первоначально прямая осевая линия стержня, совпадающая для недеформированного стержня с линией пересечения плоскостей X_1, X_3 и X_1, X_2. Точки базовой линии идентифицируются ее начальными координатами x_1. Деформация базовой линии описывается функциями перемещений

$$u = u(x_1, t), \quad v = v(x_1, t), \tag{1}$$

зависящими от начальной пространственной координаты x_1 и времени t.

Линейная деформация базовой линии определяется формулой

$$\varepsilon_1 = \sqrt{(1 + u^{(\partial 1)})^2 + (v^{(\partial 1)})^2} - 1, \tag{2}$$

где для выражения (2) и дальнейших соотношений применяются обозначения

$$u^{(\partial j)} = \frac{\partial^j u}{\partial x_1^j}, \quad v^{(\partial j)} = \frac{\partial^j v}{\partial x_1^j}, \quad j = 0, 1, ..., 5. \tag{3}$$

Для деформированной базовой линии определяются орты касательной τ и нормали $\mathbf{n}$

$$\tau = \tau_1 \mathbf{e}_1 + \tau_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2, \tag{4}$$

где

$$\begin{cases} \tau_1 = \dfrac{1 + u^{(\partial 1)}}{1 + \varepsilon_1}, \quad \tau_2 = \dfrac{1 + v^{(\partial 1)}}{1 + \varepsilon_1}, \\ n_1 = -\tau_2, \quad n_2 = \tau_1. \end{cases} \tag{5}$$

Дифференцированием (2) и (5) определяются частные производные

$$\begin{cases} \varepsilon_1^{(\partial j)} = \dfrac{\partial^j \varepsilon_1}{\partial x_1^j}, \quad \tau_1^{(\partial j)} = \dfrac{\partial^j \tau_1}{\partial x_1^j}, \quad \tau_2^{(\partial j)} = \dfrac{\partial^j \tau_2}{\partial x_1^j}, \\ n_1^{(\partial j)} = \dfrac{\partial^j n_1}{\partial x_1^j}, \quad n_2^{(\partial j)} = \dfrac{\partial^j n_2}{\partial x_1^j}, \quad j = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{6}$$

В рамках гипотезы Бернулли определяется продольная деформация ε_{11} волокна стержня с координатой $\widetilde{x}_2$

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(\partial 0)} = \sqrt{(1 + u^{(\partial 1)} - \widetilde{x}_2 \tau_2^{(\partial 1)})^2 + (v^{(\partial 1)} - \widetilde{x}_2 \tau_1^{(\partial 1)})^2} - 1. \tag{7}$$

На основе (7) определяются производные от ε_{11}

$$\varepsilon_{11}^{(\partial j)} = \frac{\partial^j \varepsilon_{11}}{\partial x_1^j}, \quad j = 0, 1, 2. \tag{8}$$

При деформации стержня в нем возникают нормальные напряжения

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}(x_1, x_2, t), \tag{9}$$

связанные с деформациями законом Гука

$$\sigma_{11} = E\varepsilon_{11}. \tag{10}$$

По нормальным напряжениям σ_{11} определяются внутренняя продольная сила N_τ и внутренний изгибающий момент M_{x3}

$$\begin{cases} N_\tau = N_\tau^{(\partial 0)} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} b\sigma_{11} d\widetilde{x_2} = bE\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{11} d\widetilde{x_2}, \\ M_{x3} = M_{x3}^{(\partial 0)} = \displaystyle\int_{-h/2}^{h/2} b\sigma_{11}\widetilde{x_2} d\widetilde{x_2} = bE\int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_{11}\widetilde{x_2} d\widetilde{x_2}. \end{cases} \tag{11}$$

В (11) и дальнейших соотношениях применяются обозначения

$$\begin{cases} N_\tau^{(\partial 0)} = N_\tau, \quad N_\tau^{(\partial 1)} = \dfrac{\partial N_\tau}{\partial x_1}, \\ M_{x3}^{(\partial 0)} = M_{x3}, \quad M_{x3}^{(\partial 1)} = \dfrac{\partial M_{x3}}{\partial x_1}, \quad M_{x3}^{(\partial 2)} = \dfrac{\partial^2 M_{x3}}{\partial x_1^2}. \end{cases} \tag{12}$$

Система уравнений равновесия включает два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\tau_2\tau_1^{(\partial 1)} - \tau_1\tau_2^{(\partial 1)}}{(1+\varepsilon_1)^2}\dfrac{\partial M_{x3}}{\partial x_1} - \dfrac{1}{1+\varepsilon_1}\dfrac{\partial N_\tau}{\partial x_1} - \dfrac{\tau_1\tau_1^{(\partial 1)} + \tau_2\tau_2^{(\partial 1)}}{1+\varepsilon_1} N_\tau = q_\tau, \\ \dfrac{1}{(1+\varepsilon_1)^2}\dfrac{\partial^2 M_{x3}}{\partial x_1^2} + \left(\dfrac{\tau_1\tau_1^{(\partial 1)} + \tau_2\tau_2^{(\partial 1)}}{(1+\varepsilon_1)^2} - \dfrac{\varepsilon_1^{(\partial 1)}}{(1+\varepsilon_1)^3}\right)\dfrac{\partial M_{x3}}{\partial x_1} + \\ \quad + \dfrac{\tau_2\tau_1^{(\partial 1)} - \tau_1\tau_2^{(\partial 1)}}{1+\varepsilon_1} N_\tau = q_n. \end{cases} \tag{13}$$

При обозначениях

$$\begin{cases} A_{Mx3}^{(\partial 1)} = \dfrac{\tau_2\tau_1^{(\partial 1)} - \tau_1\tau_2^{(\partial 1)}}{(1+\varepsilon_1)^2}, \\ A_{N\tau}^{(\partial 1)} = -\dfrac{1}{1+\varepsilon_1}, \\ A_{N\tau}^{(\partial 0)} = -\dfrac{\tau_1\tau_1^{(\partial 1)} + \tau_2\tau_2^{(\partial 1)}}{1+\varepsilon_1}, \\ B_{Mx3}^{(\partial 2)} = \dfrac{1}{(1+\varepsilon_1)^2}, \\ B_{Mx3}^{(\partial 1)} = \dfrac{\tau_1\tau_1^{(\partial 1)} + \tau_2\tau_2^{(\partial 1)}}{(1+\varepsilon_1)^2} - \dfrac{\varepsilon_1^{(\partial 1)}}{(1+\varepsilon_1)^3}, \\ B_{N\tau}^{(\partial 0)} = \dfrac{\tau_2\tau_1^{(\partial 1)} - \tau_1\tau_2^{(\partial 1)}}{1+\varepsilon_1} \end{cases} \tag{14}$$

система (13) принимает вид

$$
\left\{
\begin{aligned}
& A^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + A^{(\partial 1)}_{N\tau} N^{(\partial 1)}_{\tau} + A^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} = q_\tau, \\
& B^{(\partial 2)}_{Mx3} M^{(\partial 2)}_{x3} + B^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + B^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} = q_n.
\end{aligned}
\right. \tag{15}
$$

Система уравнений (15) является нелинейной, так как все величины, входящие в левую часть системы уравнений (15), определяются нелинейными выражениями от производных $u^{(\partial j)}, v^{(\partial j)}$, $j = 1, ..., 4$.

3. Метод численного решения

При решении системы (15) деформированное состояние стержня рассчитывается в последовательные моменты времени $t_i, i = 1, 2, ...$ В этом случае для каждого отрезка времени $[t_i, t_{i+1}]$ из предыдущих расчетов определены все компоненты напряженно-деформированного состояния в момент времени t_i и, следовательно, левые части уравнений из системы (15) известны.

При разложении в ряд Тейлора левых частей уравнений системы (15) вблизи момента времени t_i система (15) приводится к виду

$$
\left\{
\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} \left(A^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + A^{(\partial 1)}_{N\tau} N^{(\partial 1)}_{\tau} + A^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} \right)_i u^{(\partial j)}_{i+1} + \\
& + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} \left(A^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + A^{(\partial 1)}_{N\tau} N^{(\partial 1)}_{\tau} + A^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} \right)_i v^{(\partial j)}_{i+1} = \\
& = q_\tau(t_{i+1}) - \left(A^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + A^{(\partial 1)}_{N\tau} N^{(\partial 1)}_{\tau} + A^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} \right)_i + \\
& + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} \left(A^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + A^{(\partial 1)}_{N\tau} N^{(\partial 1)}_{\tau} + A^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} \right)_i u^{(\partial j)}_{i} + \\
& + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} \left(A^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + A^{(\partial 1)}_{N\tau} N^{(\partial 1)}_{\tau} + A^{(\partial 0)}_{N\tau} N^{(\partial 0)}_{\tau} \right)_i v^{(\partial j)}_{i}, \\
& \\
& \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} \left(B^{(\partial 2)}_{Mx3} M^{(\partial 2)}_{x3} + B^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + B^{(\partial 0)}_{N\tau} N_{\tau} \right)_i u^{(\partial j)}_{i+1} + \\
& + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} \left(B^{(\partial 2)}_{Mx3} M^{(\partial 2)}_{x3} + B^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + B^{(\partial 0)}_{N\tau} N_{\tau} \right)_i v^{(\partial j)}_{i+1} = \\
& = q_n(t_{i+1}) - \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} \left(B^{(\partial 2)}_{Mx3} M^{(\partial 2)}_{x3} + B^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + B^{(\partial 0)}_{N\tau} N_{\tau} \right)_i + \\
& + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial u^{(\partial j)}} \left(B^{(\partial 2)}_{Mx3} M^{(\partial 2)}_{x3} + B^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + B^{(\partial 0)}_{N\tau} N_{\tau} \right)_i u^{(\partial j)}_{i} + \\
& + \sum_{j=1}^{4} \frac{\partial}{\partial v^{(\partial j)}} \left(B^{(\partial 2)}_{Mx3} M^{(\partial 2)}_{x3} + B^{(\partial 1)}_{Mx3} M^{(\partial 1)}_{x3} + B^{(\partial 0)}_{N\tau} N_{\tau} \right)_i v^{(\partial j)}_{i}.
\end{aligned}
\right. \tag{16}
$$

В правой части системы линейных дифференциальных уравнений (16) находятся величины, известные для момента времени t_i.

В левой части системы линейных дифференциальных уравнений (16) находятся неизвестные производные $u_{i+1}^{(\partial j)}, v_{i+1}^{(\partial j)}$, $j = 1, ..., 4$ от функций перемещения $u_{i+1} = u(x_1, t_{i+1}), v_{i+1} = v(x_1, t_{i+1})$ в момент времени t_{i+1}.

Полученная система линейных дифференциальных уравнений (16) дополняется уравнениями, учитывающими конкретные граничные условия, а затем решается численным методом сплайнов пятой степени.

4. Оценка точности метода

В качестве эталонной задачи для оценки точности разрабатываемого численного метода рассматривается первоначально прямой стержень длиной l и прямоугольным поперечным сечением с размерами $b \times h$ при $b = 0,003$ м, $h = 0,006$ м. Его положение и деформация рассматриваются относительно неподвижной координатной системы, задаваемой тремя ортогональными координатными осями X_1, X_2, X_3. Плоскость осей X_1, X_3 совмещается с горизонтальной плоскостью симметрии образца, а плоскость X_1, X_2 — с вертикальной плоскостью симметрии. Левый конец стержня защемлен, а к правому приложен изменяющийся во времени t изгибающий момент M. Погонные касательная q_τ и нормальная q_n распределен-ной нагрузки равны нулю.

В начальном состоянии ось стержня является отрезком прямой BC длиной l. Точки оси идентифицируются их координатами x_1 на начальной недеформированной оси BC.

В результате действия изгибающего момента M ось стержня изогнется по дуге окружности радиуса ρ, имеющей кривизну $k = \dfrac{1}{\rho}$ [1], и ее точки получают перемещения u и v соответственно вдоль координатных осей X_1, X_2, которые определяются по формулам

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{1}{k}\sin kx_1 - x_1, \\
v &= \frac{1}{k}(1 - \cos kx_1).
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Осевой момент инерции поперечного сечения стержня относительно координатной оси X_3 равен $I_{X3} = \dfrac{bh^3}{12} = 5,4 \cdot 10^{-10}$ м^4 , модуль упругости материала $E = 3 \cdot 10^9$ Па, максимальный изгибающий момент M_{max} при заданном конечном моменте времени $t_{\max} = 1000$ с, приложенный на правом конце стержня, равен $M_{\max} = 76,3$ Н·м, максимальная кривизна изогнутой оси $k_{\max}$ стержня определяется согласно [1]

$$
k_{\max} = \frac{M_{\max}}{EI_{X3}} = 15\pi. \tag{18}
$$

При реализации численной схемы расчета внешний изгибающий момент описывается линейным во времени t законом изменения

$$M = \frac{M_{max} t}{t_{max}}, \tag{19}$$

расчеты выполняются для последовательных моментов времени t_i

$$t_i = (i-1)\Delta t, \quad \Delta t = \frac{t_{max}}{N-1}, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{20}$$

число узловых точек во времени принимается равным $N = 1001$.

Нормальное напряжение σ_{11} вдоль оси X_1 в слое стержня, имеющем координату $\widetilde{x}_2$, определяется [1] по формуле

$$\sigma_{11} = \frac{M_{X3}\widetilde{x}_2}{I_{X3}}, \tag{21}$$

где M_{X3} — внутренний изгибающий момент относительно оси X_3, I_{X3} — осевой момент инерции поперечного сечения стержня относительно оси X_3.

На основе предлагаемого численного метода с применением для решения линейных дифференциальных уравнений метода сплайнов [2] найдено численное решение для сформулированной выше задачи о деформировании стержня изгибающим моментом, приложенным к его концу. Результаты численных расчетов представлены на рис. 1,2.

На рис. 1 сплошной линией изображены точные деформированные оси стержня при различных значениях времени t_n, определяемых величинами индекса $n = 1; 251; 751; 1001$, а точками показаны деформированные оси, рассчитанные по предлагаемому методу.

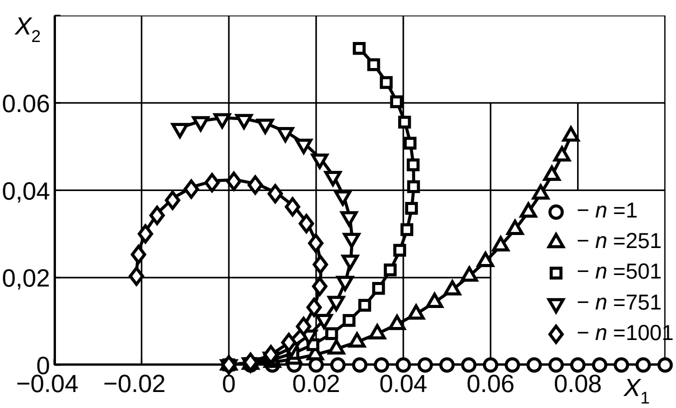

Рис. 1. Деформированная ось стержня

На рис. 2 сплошными линиями показаны точные нормальные напряжения в слоях с координатами $\widetilde{x}_2 = -0,003; -0,0015; 0; 0,0015; 0,003$ м при действии максимального изгибающего момента $M_{max} = 76,3$ Н·м. Точками на рис. 2 показаны результаты численных методов.

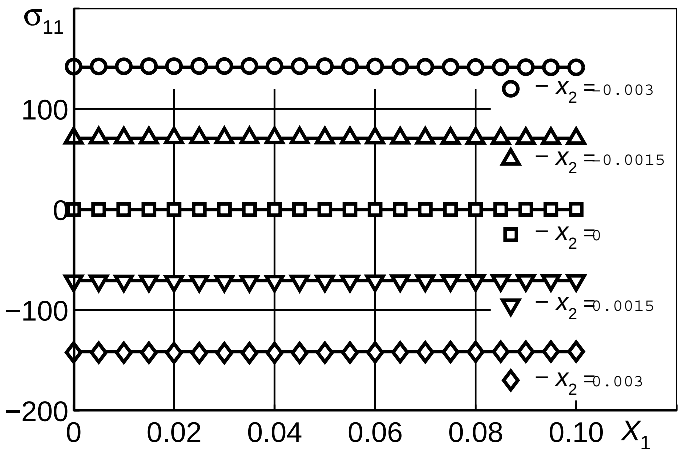

Рис. 2. Напряжения в слоях стержня

Из рис. 1 и 2 видно, что результаты численных расчетов достаточно хорошо совпадают с точными решениями.

Литература

[1] Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[2] Павлов, В.П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / В.П. Павлов. – Уфа: УГАТУ, 2003. – 197 с.

Поступила в редакцию 13/*XII*/2006;
в окончательном варианте — 13/*XII*/2006.

Paper received 13/*XII*/2006.
Paper accepted 13/*XII*/2006.

MATHEMATICAL MODELLING OF STRESS-STRAIN STATE OF A ROD AT LARGE DEFORMATIONS[4]

© 2007 A.A. Abdrakhmanova,[5] V.P. Pavlov[6]

In this paper a method of deriving equilibrium equations for the case of geometrical nonlinearity without restrictions on a magnitude of deformations is developed. Numerical method of finding approximate solution is worked out. Model problem which has exact solution is formulated and above procedure is used for approximate solving the problem. Comparison of exact and approximate solutions shows high accuracy of the proposed numerical method.

[4]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

[5]Abdrakhmanova Aliya Idarovna, Dept. of Mathematics, Ufa State Aviation Technical University (USATU), Ufa, 450000, Russia.

[6]Pavlov Viktor Pavlovich, Dept. of Strength of Materials, Ufa State Aviation Technical University (USATU), Ufa, 450000, Russia.