МАТЕМАТИКА

УДК 539.3

ВАРИАНТ МЕТОДА СПЛАЙНА ДЛЯ РАСЧЕТА ИЗГИБА БАЛОК[1]

© 2007 А.А. Абдрахманова[2]

В работе представлен численный метод решения дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего изгиб балки, — метод сплайнов в интегральной форме, базирующийся на сплайн-функциях пятой степени и обеспечивающий шестой порядок сходимости. Для изучения точности рассматриваемого метода использована модельная задача, имеющая точное аналитическое решение.

1. Постановка задачи

Многие элементы конструкций при расчетах на прочность, жесткость и устойчивость рассматриваются как балки, работающие на изгиб. В рамках технической теории изгиб балки описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка [1]

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI_y\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)=q_z(x), \tag{1}$$

где $\omega=\omega(x)$ — функции перемещения точек осевой линии вдоль оси Z, E — модуль упругости материала балки, I_y — осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно оси Y, $q_z=q_z(x)$ — интенсивность поперечной распределенной нагрузки, действую-щей в плоскости осей X,Z и направленной вдоль оси Z.

Производные от функции перемещения $\omega=\omega(x)$ определяют деформацию стержня и действующие в нем внутренние силовые факторы ([1]): первая производная от функции перемещения — это угол поворота поперечного сечения; вторая производная определяет изгибающий момент и возникающие в балке нормальные напряжения; третья производная характеризует поперечную силу и касательные напряжения; четвертая производная тесно

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором Л.С. Пулькиной.

[2]Абдрахманова Алия Айдаровна , кафедра математики Уфимского государственного авиационного технического университета, 450000, Россия, Уфа, ул. К. Маркса, 12.

связана с внешней распределенной нагрузкой. Поэтому при численном решении дифференциального уравнения (1) необходимо применять функции без разрывов производных до четвертого порядка включительно.

Такому требованию удовлетворяют сплайны пятой степени дефекта 1, методика построения и применения которых для решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел изложена в работе [2].

В работе [2] изложены варианты метода сплайнов, обеспечивающие от второго до четвертого порядка сходимости решений уравнения вида (1).

В предлагаемой работе представлена новая схема применения метода сплайнов, обеспечивающая шестой порядок сходимости.

2. Основные положения метода сплайнов пятой степени

При построении сплайна пятой степени дефекта 1 на отрезке $[a, b]$ формируется сетка $\triangle$, имеющая N узлов

$$\triangle : a = x_1 < x_2 < \ldots < x_N = b.$$

На сетке $\triangle$ по методике, изложенной в [2], строится сплайн-функция $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ степени 5 дефекта 1, имеющая

$$N_s = N + 4$$

степеней свободы, равных минимальному числу параметров, однозначно определяющих сплайн-функцию $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$.

В пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}], i = 1, \ldots, N-1$ функция $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ является многочленом пятой степени

$$\boldsymbol{W}_{5,1}(x) = \sum_{\alpha=0}^{5} a_\alpha^i (x - x_i)^\alpha, x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{2}$$

и, кроме этого, во внутренних узлах сетки $\triangle$ выполняются условия непрерывности по производным до четвертого порядка включительно

$$\frac{d^s\, \boldsymbol{W}_{5,1}(x_j - 0)}{dx^s} = \frac{d^s\, \boldsymbol{W}_{5,1}(x_j + 0)}{dx^s}, \quad s = 0, 1, \ldots, 4, \quad j = 2, \ldots, N-1.$$

В работе [2] параметры, определяющие сплайн, сведены в вектор-столбец параметров сплайна

$$\boldsymbol{Q} = (q_k, k = 1, 2, \ldots, N+4)^T ,$$

где

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{d^4\,\boldsymbol{W}_{5,1}(x_1)}{dx^4}, \\ q_2 = \dfrac{d^2\,\boldsymbol{W}_{5,1}(x_1)}{dx^2}, \\ q_{i+2} = \boldsymbol{W}_{5,1}(x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N, \\ q_{N+3} = \dfrac{d^2\,\boldsymbol{W}_{5,1}(x_N)}{dx^2}, \\ q_{N+4} = \dfrac{d^4\,\boldsymbol{W}_{5,1}(x_N)}{dx^4}. \end{cases}$$

Число компонент вектора $\boldsymbol{Q}$ точно соответствует числу степеней свободы сплайна $N_S = N + 4$.

Согласно (2), в пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, N-1$ функция $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ однозначно определяется коэффициентами

$$a_\alpha^{(i)}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 5, \quad i = 1, \ldots, N-1,$$

которые сведены в векторы-столбцы

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \left(a_\alpha^{(i)}, \quad i = 1, \ldots, N-1\right)^T, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 5.$$

Векторы $\boldsymbol{A}_\alpha$ однозначно определяются [2] через вектор параметров сплайна $\boldsymbol{Q}$ матричными выражениями

$$\boldsymbol{A}_\alpha = \boldsymbol{C}_\alpha \boldsymbol{Q}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 5. \tag{3}$$

Матрицы $\boldsymbol{C}_\alpha$, $\alpha = 0, 1, \ldots, 5$

$$\boldsymbol{C}_\alpha = \left\| C_{i,j}^{(\alpha)}, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 1, \ldots, N+4 \right\|, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 5$$

зависят от вида сетки узлов Δ . Методика построения данных матриц изложена в работе [2].

На основе (2) определяются производные от сплайн-функции $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ в любой точке с координатой x из области определения $[a, b]$

$$\begin{cases} \dfrac{d^s\,\boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^s} = \displaystyle\sum_{\alpha=s}^{5} \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!}\, a_\alpha^{(i)} (x - x_i)^{\alpha - s}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad s = 0, \ldots, 5. \end{cases} \tag{4}$$

В пределах каждого отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ функция $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ является многочленом пятой степени с коэффициентами, определяемыми в соответствии с (3) следующими выражениями:

$$a_\alpha^{(i)} = \sum_{j=1}^{N+4} C_{i,j}^{(\alpha)} q_j, \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, 5. \tag{5}$$

При подстановке (5) в (4) получено

$$\begin{cases} \dfrac{d^s\,\boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^s} = \displaystyle\sum_{\alpha=s}^{5} \frac{\alpha!}{(\alpha-s)!} \left(\sum_{j=1}^{N+4} C_{i,j}^{(\alpha)} q_j \right) (x - x_i)^{\alpha - s}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad s = 0, \ldots, 5. \end{cases} \tag{6}$$

При изменении порядка суммирования в (6) получено

$$\begin{cases} \dfrac{d^s\, \boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^s} = \sum\limits_{j=1}^{N+4} \left(\sum\limits_{\alpha=s}^{5} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-s)!}\, C_{i,j}^{(\alpha)} (x-x_i)^{\alpha-s} \right) q_j, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad s = 0, \ldots, 5. \end{cases} \tag{7}$$

В соответствии с (7) введена вектор-строка

$$\boldsymbol{R}_S(x) = \left(R_j^S(x), \quad j = 1, \ldots, N+4 \right), \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad s = 0, \ldots, 5, \tag{8}$$

компоненты которой определяются следующими выражениями

$$\begin{cases} R_j^S(x) = \sum\limits_{\alpha=s}^{5} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-s)!}\, C_{i,j}^{(\alpha)} (x-x_i)^{\alpha-s}, \\ x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad s = 0, \ldots, 5, \quad j = 1, \ldots, N+4. \end{cases} \tag{9}$$

С учетом (8) выражение (7) приняло вид

$$\frac{d^s\, \boldsymbol{W}_{5,1}(x)}{dx^s} = \boldsymbol{R}_S(x) \boldsymbol{Q}, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad s = 0, \ldots, 5. \tag{10}$$

Соотношения (10) позволяют определять значения сплайна $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ и его производных в произвольной точке с координатой x из области определения.

3. Дискретный аналог уравнения равновесия

Дифференциальное уравнение равновесия (1) записано в развернутой форме

$$EI_y \frac{d^4\omega}{dx^4} + 2\frac{d\left(EI_y\right)}{dx} \frac{d^3\omega}{dx^3} + \frac{d^2\left(EI_y\right)}{dx^2} \frac{d^2\omega}{dx^2} = q_z(x). \tag{11}$$

Заменой искомой функции перемещения осевой линии $\omega = \omega(x)$ на ее сплайновую аппроксимацию $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ определена поперечная нагрузка $\widetilde{q}_z = \widetilde{q}_z(x)$, при которой сплайн $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$ является точным решением дифференциального уравнения (11). При этом подстановкой (10) в (11) получен сплайновый аналог дифференциального уравнения равновесия.

$$\widetilde{q}_z(x) = \left(EI_y \boldsymbol{R}_4(x) + 2\frac{d\left(EI_y\right)}{dx} \boldsymbol{R}_3(x) + \frac{d^2\left(EI_y\right)}{dx^2} \boldsymbol{R}_2(x) \right) \boldsymbol{Q}. \tag{12}$$

На основе (12) введена вектор-строка

$$\boldsymbol{K}(x) = EI_y \boldsymbol{R}_4(x) + 2\frac{d\left(EI_y\right)}{dx} \boldsymbol{R}_3(x) + \frac{d^2\left(EI_y\right)}{dx^2} \boldsymbol{R}_2(x), \tag{13}$$

и уравнению (12) придан более лаконичный вид

$$\widetilde{q}_z(x) = \boldsymbol{K}(x) \boldsymbol{Q}. \tag{14}$$

При построении дискретного аналога дифференциального уравнения (11) использован полученный в теоретической механике результат [3]: *силы,* *произвольно расположенные в пространстве, можно привести к одной силе, равной их главному вектору и приложенной в центре приведения, и к паре сил с моментом, равным главному моменту всех сил относительно центра приведения.*

Базируясь на этом положении, была выбрана сетка узлов Δ с четным числом отрезков $[x_i, x_{i+1}], i = 1, ..., N{-}1$ при $N = 2M{+}1$, $M = 1, 2, \ldots$ В пределах этой сетки рассмотрены узлы с номерами n:

$$n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \text{ при } M = (N-1)/2.$$

Данные узлы, имеющие координаты x_n , выбраны в качестве центров приведения для заданной $q_z = q_z(x)$ и приближенной $\widetilde{q}_z = \widetilde{q}_z(x)$ распределенных нагрузок.

Для определения сплайн-функции $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$, близкой к искомому решению $\omega = \omega(x)$, использовалось условие эквивалентности внешних действующих на балку нагрузок, заключающееся в том, что в пределах каждой пары отрезков $[x_{n-1}, x_n]$ и $[x_n, x_{n+1}]$ распределенные нагрузки $q_z = q_z(x)$ и $\widetilde{q}_z = \widetilde{q}_z(x)$ приводились к центру приведения, имеющему координату x_n. Получаемые при этом на основе точной $q_z = q_z(x)$ и приближенной $\widetilde{q}_z = \widetilde{q}_z(x)$ нагрузок главный вектор сил и главный момент приравнивались. В итоге получалась система из $N-1$ уравнений, имеющая следующий вид:

$$\begin{cases} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \widetilde{q}_z(x)dx = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} q_z(x)dx, \\ \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \widetilde{q}_z(x)(x-x_n)dx = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} q_z(x)(x-x_n)dx, \\ n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2. \end{cases} \tag{15}$$

При подстановке (14) в (15) получена система из $N-1$ алгебраических линейных уравнений

$$\begin{cases} \left(\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \boldsymbol{K}(x)dx\right)\boldsymbol{Q} = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} q_z(x)dx, \\ \left(\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \boldsymbol{K}(x)(x-x_n)dx\right)\boldsymbol{Q} = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} q_z(x)(x-x_n)dx, \\ n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2. \end{cases} \tag{16}$$

Вектор параметров сплайна $\boldsymbol{Q}$ имеет $N+4$ компонент, для определения которых необходимо иметь $N+4$ уравнений.

В связи с этим дополнительно к системе (16) записывается уравнение, требующее равенство заданной q_z и приближенной $\widetilde{q}_z$ поперечных нагрузок в первой узловой точке с координатой x_1:

$$\widetilde{q}_z(x_1) = q_z(x_1). \tag{17}$$

С учетом (14) уравнение (17) принимает вид

$$\boldsymbol{K}(x)\boldsymbol{Q} = q_z(x_1).$$

Недостающие еще 4 уравнения должны формироваться на основе учета краевых условий.

В итоге получается система из $N+4$ алгебраических уравнений, однозначно определяющая вектор $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, саму сплайн-функцию $\boldsymbol{W}_{5,1}(x)$.

4. Модельная задача, имеющая точное решение

При изучении точности метода сплайнов рассматривалась частная по отношению к дифференциальному уравнению (1) модельная задача об изгибе нагруженного распреде-ленной нагрузкой q_z, защемленного на концах стержня длиной $\ell = 2$ м. Балка считалась стальной и имеющей постоянный по ее объему модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11}$Па$= const$. Поперечное сечение имело прямоугольную форму высотой $h = 0,02$ м и шириной $b = 0,03$ м. При этих данных, согласно [1], рассчитан осевой момент инерции поперечного сечения

$$I_y = \frac{bh^3}{12} = 2 \cdot 10^{-8}\text{м}^4 = \text{const}.$$

При постоянных модуле упругости $E = const$ и осевом моменте инерции сечения $I_y = const$ уравнение (1) приняло вид

$$EI_y \frac{d^4\omega}{dx^4} = q_z(x). \tag{18}$$

Для защемленной по концам балки краевые условия имеют вид [1]

$$\omega = \frac{d\omega}{dx} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \ell. \tag{19}$$

Рассмотрен случай изменения поперечной нагрузки по степенному закону $q_z = Ax^k$,
$k = 0, 1, \ldots$, где величина коэффициента A определялась по формуле $A = 6 \cdot$ $\cdot\, 10^2 \dfrac{1}{\ell^k}$.

При совместном рассмотрении (18) и (19) записана система расчетных уравнений

$$\begin{cases} EI_y \dfrac{d^4\omega}{dx^4} = Ax^k, k = 0, 1, \ldots \\ \text{при} \quad \omega = \dfrac{d\omega}{dx} = 0 \quad \text{для} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = \ell, \end{cases}$$

имеющая точное аналитическое решение следующего вида:

$$\omega = \frac{x^{k+4} - (k+2)\ell^{k+1}x^3 + (k+1)\ell^{k+2}x^2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}, \quad k = 0, 1, \ldots \ . \tag{20}$$

На основе (20) определяются производные от ω по x

$$\begin{cases} \dfrac{d\omega}{dx} = \dfrac{A}{EI_y}\dfrac{(k+4)x^{k+3} - 3(k+2)\ell^{k+1}x^2 + 2(k+1)\ell^{k+2}x}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}, \\ \dfrac{d^2\omega}{dx^2} = \dfrac{A}{EI_y}\dfrac{(k+3)(k+4)x^{k+2} - 6(k+2)\ell^{k+1}x + 2(k+1)\ell^{k+2}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}, \\ \dfrac{d^3\omega}{dx^3} = \dfrac{A}{EI_y}\dfrac{(k+2)(k+3)(k+4)x^{k+1} - 6(k+2)\ell^{k+1}}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}, \\ \dfrac{d^4\omega}{dx^4} = \dfrac{A}{EI_y}x^k, \quad k = 0, 1, \ldots \ . \end{cases}$$

Определение главных векторов сил и главных моментов

Главный вектор сил F_n от распределенной нагрузки $q_z = Ax^k$, действующей на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, определяется выражением

$$\begin{cases} F_n = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} Ax^k dx = A\dfrac{1}{k+1}\left((x_{n+1})^{k+1} - (x_{n-1})^{k+1}\right) \\ \text{при} \quad n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2. \end{cases}$$

Главный момент сил M_n от распределенной нагрузки $q_z = Ax^k$, действующей на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$, при приведении к центру с координатой x_n определяется выражением

$$\begin{cases} M_n = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} Ax^k(x - x_n)dx = \\ = A\dfrac{1}{k+2}\left((x_{n+1})^{k+2} - (x_{n-1})^{k+2}\right) - A\dfrac{x_n}{k+1}\left((x_{n+1})^{k+1} - (x_{n-1})^{k+1}\right) \\ \text{при} \quad n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2. \end{cases}$$

Для уравнения (18) с постоянными коэффициентами $E = \mathrm{const}$ и $I_y = \mathrm{const}$ согласно (13), получается

$$\boldsymbol{K}(x) = EI_y\boldsymbol{R}_4(x). \tag{21}$$

Согласно (9), определяются компоненты вектора $\boldsymbol{R}_4(x)$

$$\begin{cases} R_j^4(x) = \sum\limits_{\alpha=4}^{5} \dfrac{\alpha!}{(\alpha-4)!}\, C_{i,j}^{(\alpha)}(x - x_i)^{\alpha-4}, \\ \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 1, \ldots, N+4, \end{cases} \tag{22}$$

или

$$\begin{cases} R_j^4(x) = 4!C_{i,j}^{(4)} + 5!C_{i,j}^{(5)}(x - x_i), \\ \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, \ldots, N-1, \quad j = 1, \ldots, N+4. \end{cases} \tag{23}$$

В соответствии с (16) формулируются векторы-строки $\boldsymbol{J}_n^{(F)}$ и $\boldsymbol{J}_n^{(M)}$

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_n^{(F)} = \left(J_j^{(F,n)}, \quad j = 1, \ldots, N+4\right), \\ \boldsymbol{J}_n^{(M)} = \left(J_j^{(M,n)}, \quad j = 1, \ldots, N+4\right) \\ \text{при} \quad n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2, \end{cases} \tag{24}$$

которые определяются интегралами

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_n^{(F)} = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \boldsymbol{K}(x)dx, \\ \boldsymbol{J}_n^{(M)} = \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \boldsymbol{K}(x)(x - x_n)dx \\ \text{при} \quad n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2. \end{cases} \tag{25}$$

В соответствии с (21) – (25) определяются выражения для вычисления значений компо-нентов векторов $\boldsymbol{J}_n^{(F)}$ и $\boldsymbol{J}_n^{(M)}$

$$\begin{cases} J_j^{(F,n)} = EI_y \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \left(4!C_{n-1,j}^{(4)} + 5!C_{n-1,j}^{(5)}(x - x_{n-1})\right) dx + \\ + EI_y \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \left(4!C_{n,j}^{(4)} + 5!C_{n,j}^{(5)}(x - x_n)\right) dx, \quad j = 1, \ldots, N+4, \\ J_j^{(M,n)} = EI_y \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} \left(4!C_{n-1,j}^{(4)} + 5!C_{n-1,j}^{(5)}(x - x_{n-1})\right)(x - x_n)dx + \\ + EI_y \int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} \left(4!C_{n,j}^{(4)} + 5!C_{n,j}^{(5)}(x - x_n)\right)(x - x_n)dx, \quad j = 1, \ldots, N+4 \\ \text{при} \quad n = 2m, \quad m = 1, \ldots, M, \quad M = (N-1)/2. \end{cases}$$

5. Методика оценки точности результатов численных расчетов

Численное решение уравнения (18) строилось на сетке D_h постоянного шага h с N узлами

$$D_h = \{x_i = ih, \quad h = \ell/(N-1), \quad i = 1, 2, \ldots, N\}.$$

Расчеты выполнены при числе узлов сетки $N = 5, 11, 21, 31, 51, 101$ для значений коэффициентов $k = 0, 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100$.

Точность оценивалась по максимальным относительным ошибкам $\delta^s, s = 0, 1, 2, 3$ значений функции $\omega = d^0\omega/dx^0$ и ее производных $d^s\omega/dx^s$, $s = 1, 2, 3$ в узловых точках x_i, $i = 1, \ldots, N$, вычисляемых по формуле

$$\delta^{(s)} = \max_{i=1,\ldots,N} \left| \frac{\dfrac{d^s\omega_i}{dx^s} - \dfrac{d^s\omega_{T_i}}{dx^s}}{\left|\dfrac{d^s\omega_T}{dx^s}\right|_{\max}} \right|, \quad s = 0, 1, 2, 3,$$

где $\dfrac{d^S\omega_{T_i}}{dx^S}$ — точное значение производной порядка s от функции ω в рассматриваемой точке с координатой x_i, $\dfrac{d^S\omega_i}{dx^S}$ — расчетное значение производной порядка s от функции ω в рассматриваемой точке с координатой x_i, $\left|\dfrac{d^S\omega_T}{dx^S}\right|_{\max} = \max\limits_{i=1,\ldots,N}\left|\dfrac{d^S\omega_{T_i}}{dx^S}\right|$ — максимальное по модулю точное значение производной порядка s от функции ω, выбранное на множестве D_h всех узловых точек.

6. Обсуждение результатов

На рис. 1–4 в координатах $\lg\left(\delta^S\right) \sim \lg(N-1)$, $s = 0, 1, 2, 3$ представлены зависимости ошибки расчетов от размерности сетки узлов N и показателя степени k для функции перемещения $\omega = \omega(x)$ и производных от нее.

Из рис. 1 видно, что при $k = 0$ и $k = 1$ для сетки с числом узлов $N = 5$ относительная погрешность расчетов для функции перемещений $\omega = \omega(x)$ характеризуется величиной $\delta^{(0)} < 1 \cdot 10^{-13}$, то есть в данном случае метод дает практически абсолютно точные результаты. В дальнейшем при росте N для случаев $k = 0$ и $k = 1$ погрешность расчетов возрастает, и это связано с накоплением арифметической ошибки расчетов. Чтобы эта ошибка увеличивалась менее интенсивно, необходимо более тщательно прорабатывать алгоритм арифметических вычислений.

В случае $k > 1$ погрешность расчетов с увеличением числа узлов сетки N монотонно уменьшается, что свидетельствует о сходимости метода. Из рис.1 видно, что при определении функции перемещения $\omega = \omega(x)$ наблюдается шестой порядок сходимости. В случае $N > 51$ для $k = 2, 5, 10$ имеет место уменьшение точности результатов расчетов. Это связано с влиянием ошибки арифметических расчетов. Таким образом, для повышения точности расчетов при высоких значениях N необходимо повышать точность вычислительной процедуры, что можно сделать, например, вычислениями с большим числом значащих цифр.

На рис. 2 представлены результаты расчетов для первой производной $d\omega/dx$ от функции перемещения $\omega = \omega(x)$. Наблюдается тот же шестой порядок сходимости метода.

На рис. 3 представлены результаты расчетов для второй производной $d^2\omega/dx^2$ от функции перемещения $\omega = \omega(x)$. В данном случае метод имеет четвертый порядок сходимости.

На рис. 4 представлены результаты расчетов для третьей производной $d^3\omega/dx^3$ от функции перемещения $\omega = \omega(x)$. Для третьей производной метод обеспечил четвертый порядок сходимости.

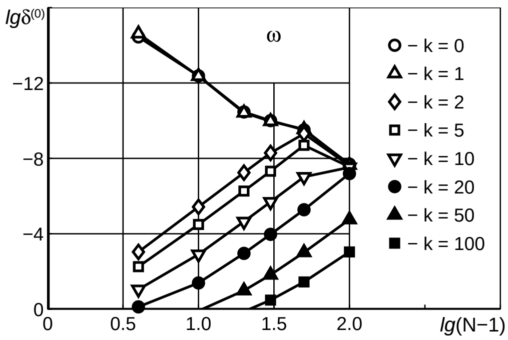

Рис. 1

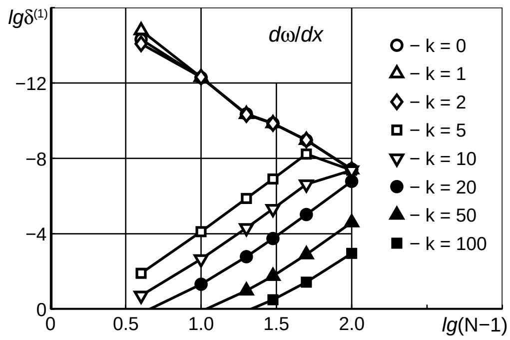

Рис. 2

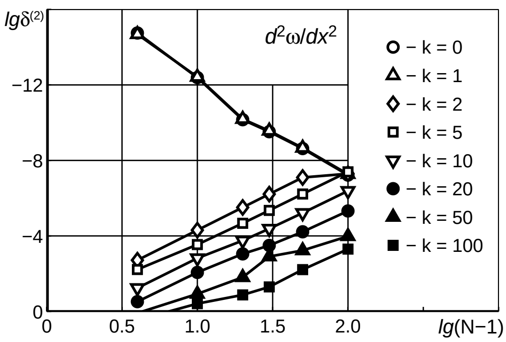

Рис. 4

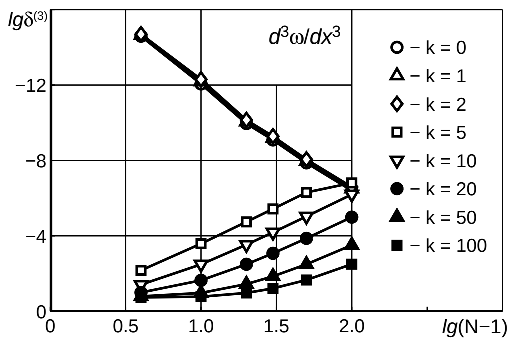

Рис. 3

Таким образом, результаты численного эксперимента показали, что предлагаемый в работе метод численного решения дифференциального уравнения четвертого порядка, описывающего изгиб балки, обеспечивает при вычислении самой функции $\omega = \omega(x)$ и первой производной от нее $d\omega/dx$ шестой порядок сходимости, а при расчете второй $d^2\omega/dx^2$ и третьей $d^3\omega/dx^3$ производных — четвертый порядок сходимости.

Литература

[1] Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. – М., Наука, 1979.

[2] Павлов, В.П. Метод сплайнов и другие численные методы решения одномерных задач механики деформируемых твердых тел / В.П. Павлов. – Уфа, Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т, 2003.

[3] Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Ч.1. Статика. Кинематика / А.А. Яблонский , В.М. Никифорова. – М., Высшая школа, 1977.

Поступила в редакцию 13/*XII*/2006;
в окончательном варианте — 13/*XII*/2006.

A SPLINE METHOD VARIANT FOR BEAMS BENDING[3]

© 2007 A.A. Abdrakhmanova[4]

A numerical solution method for differential equation of the fourth order is considered, describing a bending of a beam. A spline-method in the integrated form, basing on spline-functions of the fifth degree and providing sixth order of convergence, is discussed. For estimation of accuracy of the considered method a modelling problem having the exact analytical solution is used.

Paper received 13/*XII*/2006.
Paper accepted 13/*XII*/2006.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.
[4]Abdrakhmanova Aliya Aidarovna, Dept. of Mathematics, Ufa State Aviation Technical University (USATU), Ufa, 450000, Russia.