

МЕТОД ВЕЙВЛЕТ-ГАЛЕРКИНА РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА В ДВУМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

© 2006 И.А. Блатов¹, Е.А. Алашеева²

Математическое моделирование задач электродинамики приводит к необходимости решения интегральных уравнений с неизвестной функцией двух переменных. Дискретизация таких уравнений стандартными численными методами приводит к СЛАУ с плотной матрицей, порядок которой неприемлемо велик. В настоящей статье предлагается подход с использованием сплайновых вейвлет. Показано, что большинство элементов матрицы СЛАУ очень малы по абсолютной величине, т.е. матрица псевдоразреженная [1]. Это свойство позволяет аппроксимировать её разреженной матрицей и, применяя разреженные технологии [2], значительно ускорить процесс вычислений и снизить требования к оперативной памяти компьютера. Аналогичные проблемы для одномерных задач антенного моделирования изучались в [5].

1. Построение сплайновых вейвлет на прямоугольнике

Пусть $\Omega = [a, b] \times [c, d]$ — произвольный прямоугольник, m — натуральное число и n_0 — такое целое число, что $2^{n_0} < 2m - 1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta_x = \{\Delta_{x_n}, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$ разбиений отрезка $[a, b]$ $\Delta_{x_n} : a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{2^n}^n = b$ с постоянным шагом $h = h_{x_n} = (b - a)/2^n$ и семейство $\Delta_y = \{\Delta_{y_n}, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$ разбиений отрезка $[c, d]$ $\Delta_{y_n} : c = y_0^n < y_1^n < \dots < y_{2^n}^n = d$ с постоянным шагом $h = h_{y_n} = (d - c)/2^n$. Получим сетку линий $\Delta = \Delta_x \times \Delta_y$. На каждом из разбиений Δ_x, Δ_y рассмотрим [3] пространство сплайнов степени $m - 1$ дефекта 1 $L_{x_n} = S(\Delta_{x_n, m-1, 1})$ и $L_{y_n} = S(\Delta_{y_n, m-1, 1})$ соответственно. Тогда для каждого $k \geq n_0$ пространство $S(\Delta_{x_k, m-1, 1})$ можно представить в виде прямой суммы $L_{x_k} = L_{x_{n_0}} \oplus W_{x_{n_0}} \oplus \dots \oplus W_{x_{k-1}}$, где через W_{x_n} обозначено ортогональное дополнение пространства L_{x_n} до пространства $L_{x_{n+1}}$. Искомый вейвлет-базис будем строить как объединение базиса в $L_{x_{n_0}}$ и всех базисов в пространствах $W_{x_n}, n_0 \leq n \leq k - 1$. Аналогично для пространства $S(\Delta_{y_k, m-1, 1})$ будем рассматривать представление $L_{y_k} = L_{y_{n_0}} \oplus W_{y_{n_0}} \oplus \dots \oplus W_{y_{k-1}}$.

¹Блатов Игорь Анатольевич (blatov@ssu.samara.ru), кафедра дифференциальных уравнений и теории управления Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

²Алашеева Елена Александровна (larisaisaeva@yandex.ru), кафедра высшей математики Поволжской государственной академии телекоммуникаций и информатики, 443090, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 77.

Вначале построим базис в W_{x_n} . Зафиксируем $n \geq n_0$. В случае необходимости будем считать, что разбиение Δ_{x_n} продолжено с тем же шагом на всю числовую ось узлами $x_i^n, -\infty < i < +\infty$. Пусть [3] $\psi_{i,n}(x)$ — полуортогональный сплайновый вейвлет m -го порядка. Известно [3], что $\text{supp}\psi_{i,n} = (x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1})$, $\psi_{i,n}(x) \in W_{x_n}$, $\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n_0}(2^{n-n_0}x - i(b-a)/2^{n_0-1})$ и $\psi_{i,n}(x)$ — функция с минимальной длиной носителя, удовлетворяющая этим свойствам.

Носители функций $\psi_{i,n}, 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 2m + 1$ целиком содержатся в $[a, b]$ и они образуют группу базисных функций W_{x_n} . Однако, $\dim W_{x_n} = 2^{n-1}$, т.е. до базиса в W_{x_n} не хватает $2(m-1)$ функций. Построим недостающие вейвлет-функции. Для этого рассмотрим функции $\psi_{i,n}(x)$ при $-2m + 2 \leq i \leq 2^{n-1} - 1$ на расширенном разбиении Δ_{x_n} . Через $\psi_{i,n}(x)$ обозначим нормализованный В-сплайн степени $m-1$ на разбиении Δ_{x_n} с носителем (x_i^n, x_{i+m}^n) [3]. Первую группу из $m-1$ недостающих базисных функций будем искать в виде

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}, -m+1 \leq j \leq -1 \quad (1.1)$$

из условий

$$(\tilde{\psi}_{i,n}(x), \phi_{k,n}(x)) = 0, k = -m+1, -m+2, \dots, -1, \quad (1.2)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[a, b]$. Подставляя (1.1) в (1.2), получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для определения α_j . Матрица этой системы невырождена, так как в противном случае существовало бы нетривиальное решение соответствующей однородной системы, что означало бы, что функция $\sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}$ является ненулевой вейвлет-функцией на разбиении Δ_{x_n} с носителем $(x_0^{n-1}, x_{2m-2}^{n-1})$, что невозможно [3]. Решая систему (1.2), получаем, что функция (1.1) является искомой, так как ортогональность к В-сплайнам $\phi_{k,n}(x)$ при $k \geq 0$ имеет место в силу ортогональности им всех вейвлет из линейной комбинации (1.1), а при $-m+1 \leq i \leq -1$ в силу условий (1.2). Следующие $m-1$ базисных функций определим в виде:

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{i,2^{n-1}-2m-i+1}(x), 2^{n-1} - 2m + 2 \leq i \leq 2^{n-1} - m.$$

Функции

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{i,n}(x), & \quad -m+1 \leq i \leq -1, \quad 2^{n-1} - 2m + 2 \leq i \leq 2^{n-1} - m, \\ \psi_{i,n}(x), & \quad 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 2m + 1, \end{aligned} \quad (1.3)$$

линейно независимы, так как предположение противного вновь приводит нас к существованию ненулевой вейвлет-функции с носителем, содержащим менее $2m-1$ частичных интервалов. Их число совпадает с размерностью W_{x_n} . Значит, функции (1.3) образуют базис W_{x_n} .

Наконец, базис в $L_{x_{n_0}}$ образует совокупность В-сплайнов $\{\phi_{i,n_0}, m+1 \leq i \leq 2^{n_0} - 1\}$. Объединяя эту совокупность с наборами функций (1.3) при $n_0 \leq n \leq k-1$, получаем искомый базис в $S(\Delta_{x_k}, m-1, 1)$. Аналогично строится базис в $S(\Delta_{y_k}, m-1, 1)$.

Он будет представлять собой объединение совокупности В-сплайнов $\{\phi_{i,n_0}, m+1 \leq i \leq 2^{n_0} - 1\}$, образующей базис в $L_{x_{n_0}}$, с наборами функций $\tilde{\psi}_{i,n}(x), -m+1 \leq i \leq -1, 2^{n-1} - 2m + 2 \leq i \leq 2^{n-1} - m$, $\psi_{i,n}(x), 0 \leq i \leq 2^{n-1} - 2m + 1$, базисом W_{y_n} . Базис в пространстве $L_n = L_{x_n} \times L_{y_n}$ образуют тензорные произведения [3] базисных функций в L_{x_n} и L_{y_n} : $\phi_{i,j}^{n_0}(x, y) = \phi_{i,n_0}(x)\phi_{j,n_0}(y)$; $\chi_{i,j}^{n_0,s}(x, y) = \phi_{i,n_0}(x)\psi_{j,s}(y)$; $\chi_{i,j}^{t,n_0}(x, y) = \phi_{j,n_0}(y)\psi_{i,t}(x)$; $\psi_{i,j}^{t,s}(x, y) = \psi_{i,t}(x)\psi_{j,s}(y)$, где i, j, t, s меняются в ранее указанных пределах.

2. Метод вейвлет-Галеркина для интегральных уравнений. Постановка задачи

В дальнейшем константы, не зависящие от разбиений $\Delta_{x_n}, \Delta_{y_n}$, (возможно, различные!) будем обозначать одним символом C . Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) J(u, v) du dv + J(x, y) = f(x, y) \quad (2.1)$$

с заданной функцией $f(x, y)$ и неизвестной функцией $u(x, y)$. Предположим, что ядро удовлетворяет оценкам

$$\left| \frac{\partial^l K(x, y, u, v)}{\partial x^{l_1} \partial y^{l_2} \partial u^{l_3} \partial v^{l_4}} \right| \leq C \frac{1}{\left(\sqrt{(x-u)^2 + (y-v)^2 + \alpha^2} \right)^l}, \quad l = l_1 + l_2 + l_3 + l_4. \quad (2.2)$$

Рассмотрим метод Бубнова-Галеркина на базе построенных вейвлет-функций. Решение уравнения будем искать в виде:

$$\begin{aligned} J(x, y) = & \sum_{i,j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{ij} \phi_{i,n_0}(x) \phi_{j,n_0}(y) + \sum_{i=-m+1}^{2^{n_0}-1} \sum_{s=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+s-1}-m} d_{ijs} \phi_{i,n_0}(x) \psi_{j,n_0+s}(y) + \\ & + \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} \sum_{q=1}^{k-n_0} \sum_{i=-m+1}^{2^{n_0+q-1}-m} d_{ijq} \phi_{j,n_0}(y) \psi_{i,n_0+q}(x) + \\ & + \sum_{s=1}^{k-n_0} \sum_{q=1}^{k-n_0} \sum_{i=-m+1}^{2^{n_0+q-1}-m} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+s-1}-m} c_{ijsq} \psi_{i,n_0+q}(x) \psi_{j,n_0+s}(y) \end{aligned} \quad (2.3)$$

из условий:

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) J(u, v) \phi_{r,n_0}(x) \phi_{t,n_0}(y) dx dy du dv + \\ & + \int_a^b \int_a^b J(x, y) \phi_{r,n_0}(x) \phi_{t,n_0}(y) dx dy = \\ & = \int_a^b \int_a^b f(x, y) \phi_{r,n_0}(x) \phi_{t,n_0}(y) dx dy, \\ & -m+1 \leq r, t \leq 2^{n_0}-1; \\ & \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) J(u, v) \phi_{r,n_0}(x) \psi_{t,n_0}(y) dx dy du dv + \\ & + \int_a^b \int_a^b J(x, y) \phi_{r,n_0}(x) \psi_{t,n_0}(y) dx dy = \\ & = \int_a^b \int_a^b f(x, y) \phi_{r,n_0}(x) \psi_{t,n_0}(y) dx dy, -m+1 \leq r \leq 2^{n_0}-1, \\ & -m+1 \leq t \leq 2^{n-1}-m, n_0+1 \leq n \leq k; \\ & \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) J(u, v) \psi_{r,n_0}(x) \phi_{t,n_0}(y) dx dy du dv + \\ & + \int_a^b \int_a^b J(x, y) \psi_{r,n_0}(x) \phi_{t,n_0}(y) dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \int_a^b f(x, y) \psi_{r, n_0}(x) \phi_{t, n_0}(y) dx dy, -m+1 \leq t \leq 2^{n_0} - 1, \\
&\quad -m+1 \leq r \leq 2^{n-1} - m, n_0+1 \leq n \leq k; \\
&\int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) J(u, v) \psi_{r, n_0}(x) \psi_{t, n_0}(y) dx dy du dv + \\
&\quad + \int_a^b \int_a^b J(x, y) \psi_{r, n_0}(x) \psi_{t, n_0}(y) dx dy = \\
&\quad = \int_a^b \int_a^b f(x, y) \psi_{r, n_0}(x) \psi_{t, n_0}(y) dx dy, \\
&\quad -m+1 \leq r, t \leq 2^{n-1} - m, n_0+1 \leq n \leq k
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Из общей теории проекционных методов [4] и аппроксимационных свойств пространств сплайнов [5] вытекает

Теорема 1. Пусть уравнение (2.1) имеет единственное решение при любой непрерывной $f(x, y)$. Тогда найдется такой номер $k_0 > n_0$, что для любого $k > k_0$ система (2.4) имеет единственное решение и справедливы оценки погрешности

$$\|u(x, y) - u_k(x, y)\|_{C([a, b] \times [c, d])} \leq C \inf_{v \in L_m} \|u(x, y) - v(x, y)\|_{C([a, b] \times [c, d])}.$$

Совокупность условий (2.4) представляет собой СЛАУ с квадратной матрицей:

$$\begin{pmatrix}
A_{11}^{11} & A_{12}^{11} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{11} & A_{11}^{12} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{12} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{1k-n_0+1} \\
A_{11}^{21} & A_{12}^{21} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{21} & A_{11}^{22} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{22} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{2k-n_0+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{11}^{k-n_0+11} & A_{12}^{k-n_0+11} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{k-n_0+11} & A_{11}^{k-n_0+12} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{k-n_0+12} & \cdots & A_{1k-n_0+1}^{k-n_0+1k-n_0+1} \\
A_{21}^{11} & A_{22}^{11} & \cdots & A_{2k-n_0+1}^{11} & A_{21}^{12} & \cdots & A_{2k-n_0+1}^{12} & \cdots & A_{2k-n_0+1}^{1k-n_0+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{21}^{k-n_0+11} & A_{22}^{k-n_0+11} & \cdots & A_{2k-n_0+1}^{k-n_0+11} & A_{21}^{k-n_0+12} & \cdots & A_{2k-n_0+1}^{k-n_0+12} & \cdots & A_{2k-n_0+1}^{k-n_0+1k-n_0+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{k-n_0+11}^{11} & A_{k-n_0+12}^{11} & \cdots & A_{k-n_0+1k-n_0+1}^{11} & A_{k-n_0+11}^{12} & \cdots & A_{k-n_0+1k-n_0+1}^{12} & \cdots & A_{k-n_0+1k-n_0+1}^{1k-n_0+1}
\end{pmatrix}$$

Получим оценки элементов матрицы этой СЛАУ и докажем, что она псевдодоразреженная [1]. Пусть

$$\begin{aligned}
A_{pq}^{ts} &= \{a_{ijrf}^{pqts}\}, 1 \leq p, q, t, s \leq k - n_0 + 1, \\
A_{11}^{11} &= \{a_{ijrf}^{1111}\}, m+1 \leq i, j, r, f \leq 2^{n_0} - 1, \\
A_{pp}^{pp} &= \{a_{ijrf}^{pppp}\}, 2^{n_0+p-2} \leq i, j, r, f \leq 2^{n_0+p-1} - 1, \\
a_{ijrf}^{pqts} &= \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) \psi_{ij}^{pt}(u, v) \psi_{rf}^{qs}(x, y) dx dy du dv + \\
&\quad + \int_a^b \int_a^b \psi_{ij}^{pt}(x, y) \psi_{rf}^{qs}(x, y) dx dy.
\end{aligned}$$

Рассмотрим только те элементы матрицы, носители вейвлет которых не пересекаются. Слагаемое

$$\int_a^b \int_a^b \psi_{ij}^{pt}(x, y) \psi_{rf}^{qs}(x, y) dx dy$$

у данных элементов равно нулю.

Теорема 2. Справедливы оценки

$$|a_{ijrf}^{pqts}| \leq \frac{C(2^{-4p} + 2^{-4s})}{(\rho^2(\text{supp}\Psi_{ij}^{pt}, \Psi_{rf}^{qs}) + \alpha^2)^2} 2^{-\frac{q+s}{2}},$$

где $\rho(A, B)$ — евклидово расстояние между множествами A, B на плоскости.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g(x, y) = \int \int_{\text{supp}\Psi_{ij}^{pt}} K(x, y, u, v) \Psi_{ij}^{pt}(u, v) dudv.$$

Пусть $x \in [x_{i+14}^p, x_r^q], y \in [y_{f+14}^s, y_j^t]$. Пусть $p = q, s = t$. Если $p \neq q, s \neq t$, то следует выбрать $\max(p, q)$ и $\max(s, t)$. В силу аппроксимационных свойств сплайнов [5] и оценок (2.2) найдется такая функция $N(x, y) \in L_n$, что

$$\begin{aligned} |g(x, y) - N(x, y)| &\leq \frac{C(\sqrt{2^{-2p} + 2^{-2s}})^4}{(\sqrt{(r-i)^2 2^{2p} + (f-j)^2 2^{2s} + \alpha^2})^4} \leq \\ &\leq \frac{C(2^{-4p} + 2^{-4s})}{((r-i)^2 2^{2p} + (f-j)^2 2^{2s} + \alpha^2)^2} = \frac{C(2^{-4p} + 2^{-4s})}{(\rho^2(\text{supp}\Psi_{ij}^{pt}, \Psi_{rf}^{qs}) + \alpha^2)^2}. \end{aligned}$$

Теперь оценим:

$$\begin{aligned} |a_{ijrf}^{pqts}| &= \left| \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_a^b K(x, y, u, v) \Psi_{ij}^{pt}(u, v) \Psi_{rf}^{qs}(x, y) dx dy dudv \right| = \\ &= \left| \int \int_{\text{supp}\Psi_{rf}^{qs}} \left(\int \int_{\text{supp}\Psi_{ij}^{pt}} K(x, y, u, v) \Psi_{ij}^{pt}(u, v) dudv \right) \Psi_{rf}^{qs} dx dy \right| \leq \\ &\leq \frac{C(2^{-4p} + 2^{-4s})}{(\rho^2(\text{supp}\Psi_{ij}^{pt}, \Psi_{rf}^{qs}) + \alpha^2)^2} \int \int_{\text{supp}\Psi_{rf}^{qs}} \Psi_{rf}^{qs} dx dy = \\ &= \frac{C(2^{-4p} + 2^{-4s})}{(\rho^2(\text{supp}\Psi_{ij}^{pt}, \Psi_{rf}^{qs}) + \alpha^2)^2} 2^{-\frac{q+s}{2}}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что при больших значениях почти все элементы матрицы малы по абсолютной величине, т.е. матрица псевдоразреженная [1].

Ниже для модельной задачи $K(x, y, u, v) = 1, f(x, y) = x$ приведена таблица:

$$n_0 = 2, k = 4$$

ϵ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$N(\epsilon)$	345	4761	7221	54213	83521
$\frac{N(\epsilon)}{N}$	0.004	0.06	0.08	0.6	1

Литература

- [1] Блатов, И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразреженными матрицами и их приложениях / И.А. Блатов // Сибирский мат. журнал. – 1996. – Т. 37. – №1. – С. 36–59.
- [2] Писсанецки, С. Технология разреженных матриц / С. Писсанецки. – М.: Мир, 1988. – 412 с.

- [3] Чуи, К. Введение в вейвлеты / К. Чуи. – М.: Мир, 2001. – 412 с.
- [4] Электродинамические методы анализа тонкопроволочных антенн / А.Л. Бузов [и др.]. – М.: Радио и связь, 2000.
- [5] Блатов, И.А. Применение сплайновых вейвлет-функций к численному моделированию тонкопроволочных антенн / И.А. Блатов, А.С. Пименов, В.В. Юдин // Инфокоммуникационные технологии. – Т. 1. – №4. – 2003.
- [6] Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 31/X/2006;
в окончательном варианте — 31/X/2006.

THE WAVELET-GALERKIN METHOD FOR A FREDGOLM INTEGRAL EQUATION IN TWO-DIMENSIONAL DOMAINS

© 2006 I.A. Blatov³ E.A. Alasheeva⁴

Mathematical modelling of electrodynamic problems leads to necessity of a integral equations solution with unknown function of two variables. The discretization of such equations by the standard numerical methods gives systems of simple equations with dense matrix of unacceptable large order. In the paper an approach of spline wavelet usage is proposed. It is shown that majority of matrix elements of systems of simple equations is very small on an absolute value, i.e. matrix is pseudo-air-break. This property allows to approximate it by an air-break matrix and, applying air-break process technique, considerably speed up process of evaluations and to lower the requirements to a random access memory of a computer.

Поступила в редакцию 31/X/2006;
в окончательном варианте — 31/X/2006.

³Blatov Igor Anatolevich (blatov@ssu.samara.ru), Dept. of Differential Equations and Theory of Control, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁴Alasheeva Elena Aleksandrovna (alasheeva@mail.ru), Dept. of Higher Mathematics, Povolzhskaya State Academy of Telecommunications and Computer Science, Samara, 443090, Russia.