

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН УПРУГИМИ ОБОЛОЧКАМИ

© 2006 В.А. Ковалев¹

Разработан асимптотический подход для решения стационарных задач рассеяния акустических волн упругими оболочками. Осуществлен синтез приближенного решения задачи на основе сращивания разложений для различных асимптотических моделей. В окрестности нулевой частоты применяется уточненная теория Кирхгофа–Лява. В окрестности частот толщинных резонансов применяются длинноволновые высокочастотные приближения. Вне этих окрестностей используется модель типа плоского слоя. Сравнение с точным решением для цилиндрической и сферической оболочек подтверждает высокую эффективность предложенного подхода при различных значениях параметров оболочки.

1. Постановка задачи

Асимптотические модели взаимодействия оболочки и жидкости базируются на методах, которые разработаны в динамике тонкостенных тел и изложены, например, в монографии [1]. Для тонких оболочек ключевую роль играет асимптотическая методология, основанная на использовании малого геометрического параметра, равного отношению толщины к характерному радиусу кривизны. В работах [1–5] предложены модели, использование которых позволяет с высокой точностью описать рассеянное давление и другие характеристики задачи рассеяния. Однако области применения указанных асимптотических моделей ограничены. Цель данной работы состоит в том, чтобы показать, что путем сращивания этих моделей приближенное решение задачи может быть построено в достаточно представительном частотном диапазоне для различных параметров материала оболочки и при различных характеристиках акустической среды.

При рассеянии акустического давления тонкой оболочкой большинство волн, возбуждаемых падающей акустической волной, соответствуют волнам в так называемой "сухой" оболочке, т.е. в случае отсутствия акустической среды. Используя принятые обозначения, будем в дальнейшем называть их симметричными S_l и антисимметричными A_l волнами Лэмба ($l = 0, 1, 2, \dots$). Взаимодействие с акустической средой приводит к образованию дополнительной волны A . Эта волна является аналогом поверхностной волны Стоунли.

Для аппроксимации решения в окрестности нулевой частоты можно использовать теорию Кирхгофа–Лява и ее уточнение. Необходимость использования уточ-

¹Ковалев Владимир Александрович (kovalev@migm.ru), кафедра математических и информационных основ управления Московского городского университета управления Правительства Москвы, 107045, Россия, г. Москва, ул. Сретенка, 28.

ненной модели вызвана тем, что широко распространенные двумерные теории (теория Кирхгофа–Лява, теория Тимошенко–Рейснера) недостаточно эффективны в задачах рассеяния (см. [1, 2, 5]). В случае оболочки не слишком малой толщины только применение уточненной теории Кирхгофа–Лява [2, 5], которая учитывает поперечное обжатие оболочки и некоторые другие явления, позволяет осуществить сращивание асимптотических моделей.

Длинноволновое высокочастотное приближение уравнений теории упругости [1, 3] описывает резонансы малых номеров волн типа Лэмба высших порядков. Оно может быть применено в окрестности частот толщинных резонансов. Вне окрестностей нулевой частоты и частот толщинных резонансов колебания оболочки являются коротковолновыми. В этом случае оболочка может быть приближенно заменена плоским слоем, поскольку влияние кривизны мало. Модель типа плоского слоя, описывающая взаимодействие оболочки с жидкостью, развита в работах [4, 6]. Она описывает резонансы периферических волн больших номеров. Упомянутые три модели имеют области согласования [7–9], следовательно, сращивая асимптотические решения, можно осуществить синтез рассеянного давления в широком частотном диапазоне при различных параметрах оболочки.

Пусть плоская акустическая волна

$$p_i = p_0 \exp[-i(k\xi + \omega t)]$$

падает на цилиндрическую или сферическую оболочку и рассеивается ей. Введем следующие параметры, характеризующие процесс рассеяния:

$$\kappa = \frac{\rho}{\rho_1}, \quad \beta_i = \frac{c_i}{c} \quad (i = 1, 2), \quad \gamma = \frac{c_2}{c_1}, \quad k = \frac{\omega}{c}. \quad (1.1)$$

Здесь c_1, c_2 — скорости волн расширения и сдвига в оболочке, соответственно, ρ_1 — плотность материала оболочки, c — скорость звука в жидкости, ρ — плотность жидкости, ω — круговая частота, p_i — давление в падающей волне, ось ξ направлена навстречу распространению волны, p_0 — постоянная, имеющая размерность давления.

Пусть (r, θ) — сферические координаты (решение задачи не зависит от осевой координаты в случае цилиндрической оболочки и от угловой координаты вдоль параллели в случае сферической оболочки), r — радиальный или сферический радиус, угол θ отсчитывается от положительного направления оси ξ , R — радиус срединной поверхности оболочки, h — полутолщина оболочки.

Давление в падающей волне p_i и рассеянное давление p_s должны удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\Delta p + k^2 p = 0, \quad (1.2)$$

где оператор Лапласа Δ соответственно в цилиндрической или сферической системе координат имеет вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right). \quad (1.3)$$

Кроме того, давление p_s удовлетворяет условию излучения на бесконечности

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial p_s}{\partial r} - ik p_s \right) = 0. \quad (1.4)$$

Давление в падающей волне p_i можно представить в виде

$$p_i = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n(-i)^n f_n(kr) F_n(\theta). \quad (1.5)$$

Здесь для цилиндрической оболочки имеем $E_0 = 1$, $E_n = 2$ ($n \geq 1$), $f_n = J_n$, $g_n^{(1)} = H_n^{(1)}$, $F_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$, $N = n$, J_n — функция Бесселя, $H_n^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода; для сферической оболочки получаем $E_n = 2n + 1$, $f_n = j_n$, $g_n^{(1)} = h_n^{(1)}$, $F_n = P_n(\cos \theta)$, $N = n + \frac{1}{2}$, j_n — сферическая функция Бесселя, P_n — полином Лежандра, $h_n^{(1)}$ — сферическая функция Ханкеля первого рода. Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен.

Рассеянное давление p_s в случае нормального падения плоской акустической волны будем искать в виде [10]

$$p_s = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} E_n (-i)^n B_n g_n^{(1)}(kr) F_n(\theta) \quad (1.6)$$

Представленное таким образом рассеянное давление p_s автоматически удовлетворяет уравнению Гельмгольца (1.2)–(1.3) и условию излучения на бесконечности (1.4). Коэффициенты B_n определяются из контактной задачи для уравнений, описывающих движение оболочки. Если для описания движения оболочки применяются трехмерные уравнения теории упругости, то контактные условия можно записать следующим образом:

$$u_r|_{r=a} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a}, \quad \sigma_r|_{r=a} = -(p_i + p_s)|_{r=a}, \quad (1.7)$$

$$\sigma_{r\theta}|_{r=a} = \sigma_r|_{r=b} = \sigma_{r\theta}|_{r=b} = 0,$$

где σ_r , $\sigma_{r\theta}$ — напряжения, u_r — радиальное перемещение точек оболочки (здесь внутренняя поверхность оболочки свободна от напряжений), a и b — внешний и внутренний радиусы оболочки, соответственно. Решения, соответствующие трехмерным уравнениям теории упругости, получены в работах [11] (цилиндрическая оболочка) и [12] (сферическая оболочка).

Относительную толщину оболочки будем характеризовать малым безразмерным параметром относительной толщины μ , величина которого связана с параметром тонкостенности η соотношением

$$\mu = \frac{a-b}{a} = \frac{2\eta}{1+\eta}, \quad \eta = \frac{h}{R} = \frac{a-b}{a+b}. \quad (1.8)$$

Рассмотрим далее три базовые асимптотические модели взаимодействия оболочки с жидкостью.

2. Теория Кирхгофа–Лява и ее уточнение

Как известно [10], при рассеянии акустического давления тонкой оболочкой основной вклад в рассеянное давление вносят периферические волны типа Лэмба. В окрестности нулевой частоты существует всего две таких волны — это волна типа Лэмба S_0 и порожденная жидкостью волна A (начиная с так называемой частоты совпадения, она сменяется волной типа Лэмба A_0). В работе [1] показано, что они могут быть описаны теорией оболочек Кирхгофа–Лява. Но в случае оболочки не слишком малой толщины области применения теории Кирхгофа–Лява может оказаться недостаточно для того, чтобы осуществить сращивание. В этом случае можно использовать уточненную теорию Кирхгофа–Лява [2, 5], которая учитывает поперечное обжатие оболочки и некоторые другие явления. Эта теория применима вплоть до частоты первого толщинного резонанса.

Следовательно, теория Кирхгофа–Лява и ее уточнение могут рассматриваться как низкочастотные приближения трехмерных уравнений теории упругости [1, 2]. Запишем уравнения уточненной асимптотической модели (уточненная теория Кирхгофа–Лява) в перемещениях.

Для цилиндрической оболочки они имеют вид [2, 9]

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{3}\eta^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + \\ + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{lg}}^2}{c_2^2} u + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \frac{\partial m}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^3} + w + \frac{1}{3}\eta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tr}}^2}{c_2^2} w + \\ + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} m + \frac{(1-\nu^2)R^2}{2Eh} Z = 0. \end{aligned}$$

Для сферической оболочки получаем [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(u) + (1-\nu) u + (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{1}{3}\eta^2 \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \Phi(\gamma_1) + (1-\nu) \gamma_1 \right] + \\ + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{lg}}^2}{c_2^2} u + \frac{\nu(1+\nu)R}{2E} \frac{\partial m}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (1+\nu)(\Phi(u) + 2w) + \frac{1}{3}\eta^2 [\Delta_0 \Phi(\gamma_1) + (1-\nu) \Phi(\gamma_1)] - \\ - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{tr}}^2}{c_2^2} w + \frac{\nu(1+\nu)R}{E} m + \frac{(1-\nu^2)R^2}{2Eh} Z = 0, \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - u, \quad k_0 = \text{ctg } \theta, \quad \Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_0 \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \Phi(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + k_0 f.$$

В уравнениях (2.1)–(2.2) E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, u — тангенциальное перемещение в направлении оси θ , w — нормальное перемещение (прогиб),

$$D_1 u = \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad D_2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad \text{для цилиндрической оболочки и}$$

$$D_1 u = \Phi(u), \quad D_2 = \Delta_0 \quad \text{для сферической оболочки.}$$

Величины Z , m , z и приведенные частоты ω_{lg} , ω_{tr} определяются следующим образом:

$$Z = \left(1 - \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 D_2\right) (p_i + p_s) \Big|_{r=a}, \quad m = -(p_i + p_s)|_{r=a}, \quad z = \frac{\omega h}{c_2}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\text{lg}}^2 u = \omega^2 \left[u + \eta^2 (B_{00} + B_{01} z^2 + B_{02} z^4) \frac{\partial}{\partial \theta} D_1(u) \right] \\ \omega_{\text{tr}}^2 w = \omega^2 \left[w + \eta^2 A_{00} \Delta_0 w - z^2 (A_{01} w + \eta^2 A_{02} D_2 w) \right]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Коэффициенты A_{0i} и B_{0i} задаются соотношениями (см. [2, 5])

$$\begin{aligned} B_{00} &= -\frac{v^2}{3(1-v)^2}, & B_{01} &= -\frac{v^2(3-5v-v^2)}{45(1-v)^3}, \\ B_{02} &= \frac{v^2(-17+56v-33v^2-28v^3+5v^4)}{1260(1-v)^4}, \\ A_{00} &= \frac{7v-17}{15(1-v)}, & A_{01} &= \frac{422-424v-33v^2}{1050(1-v)}, \\ A_{02} &= \frac{32-96v+261v^2-197v^3}{15750(1-v)^2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Условие непротекания имеет вид:

$$w + \frac{v\eta^2}{2(1-v)}D_2w - \frac{v\eta}{(1-v)}D_1(u) = \frac{1}{\rho\omega^2} \frac{\partial}{\partial r}(p_i + p_s) \Big|_{r=a}. \quad (2.6)$$

Подчеркнутые члены соответствуют следующим уточнениям.

- 1) Поперечное обжатие учитывается членом с множителем m в уравнениях (2.1) или (2.2) (статическая характеристика поперечного обжатия) и членом с множителем η в условии непротекания (2.6) (кинематическая характеристика поперечного обжатия).
- 2) Подчеркнутые члены в выражениях (2.4) повышают точность аппроксимации двумерной теорией дисперсионных кривых для волн Лэмба нулевого порядка S_0 и A_0 (или волны A , порожденной жидкостью).
- 3) Члены с множителем η^2 в уравнениях (2.3) и (2.6) уточняют выражение для поверхностной нагрузки, отнесенной к срединной поверхности оболочки, и перемещение на контактной поверхности, соответственно.

Опуская подчеркнутые члены, получаем уравнения классической теории Кирхгофа–Лява. Как показано в работах [2, 5], область применимости уточненной теории Кирхгофа–Лява (2.1)–(2.6) определяется неравенством $z \ll 1$, в то время как область применимости классической теории Кирхгофа–Лява задается соотношением $z \ll \eta^{\frac{1}{2}}$.

Это объясняется тем, что при $z \sim \eta^{\frac{1}{2}}$ деформации растяжения срединной поверхности, вызванные поперечным обжатием, становятся сравнимыми с компонентами тангенциальной деформации. В классической теории оболочек поперечное обжатие, как правило, не учитывается.

Для решения задачи представим перемещения оболочки в виде следующих рядов. Для цилиндрической оболочки это будут тригонометрические ряды

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin n\theta, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos n\theta, \quad (2.7)$$

а для сферической оболочки перемещения u и w представим в виде рядов по полиномам Лежандра

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta), \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta). \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) или (2.8) в уравнения (2.1) или (2.2) и в уравнение (2.6) и используя для сферической оболочки соотношения

$$\Delta_0 P_n(\cos \theta) = -n(n+1) P_n(\cos \theta), \quad \Phi \left(\frac{\partial}{\partial \theta} P_n(\cos \theta) \right) = \Delta_0 P_n(\cos \theta) \quad (2.9)$$

получаем для каждого значения n ($n = 0, 1, 2, \dots$) систему трех линейных алгебраических уравнений относительно трех постоянных B_n , C_n , D_n . Из нее находим искомые коэффициенты B_n в разложении (1.6):

$$B_n = -\frac{f'_n(x)d_1 + Qf_n(x)}{g_n^{(1)'}(x)d_1 + Qg_n^{(1)}(x)}, \quad Q = \frac{\kappa k R}{2(1+\nu)} \beta_2^{-2} (b_2 d_2 + b_1 d_3), \quad (2.10)$$

Здесь $x = ka$ — волновой радиус,

$$d_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad d_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{32} & a_{31} \end{vmatrix}, \quad d_3 = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad (2.11)$$

где для цилиндрической оболочки имеем

$$\begin{aligned} a_{11} &= -n^2 \left(1 + \frac{1}{3} \eta^2 \right) + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{lg}}^2}{c_2^2}, & a_{12} &= -n \left(1 + \frac{1}{3} \eta^2 n^2 \right), \\ a_{21} &= -n \left(1 + \frac{1}{3} \eta^2 n^2 \right), & a_{22} &= 1 + \frac{1}{3} \eta^2 n^4 - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{lg}}^2}{c_2^2}, \\ a_{31} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \eta n, & a_{32} &= 1 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \eta^2 n^2, \\ b_1 &= -\nu n, & b_2 &= \nu - \frac{1-\nu}{\eta} \left(1 + \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 n^2 \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

а для сферической оболочки

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1 + \nu + \frac{1}{3} \eta^2 s, & N &= n(n+1), & s &= N-1+\nu, \\ a_{12} &= -\left(1 + \frac{1}{3} \eta^2 \right) s + \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{lg}}^2}{c_2^2}, \\ a_{21} &= 2(1+\nu) + \frac{1}{3} \eta^2 N s - \frac{1-\nu}{2} R^2 \frac{\omega_{\text{lg}}^2}{c_2^2}, \\ a_{22} &= -N a_{11}, & a_{31} &= 1 - \frac{\nu \eta^2}{2(1-\nu)} N, & a_{32} &= \frac{\nu \eta}{(1-\nu)} N, \\ b_1 &= \frac{\nu(1+\nu)}{2}, & b_2 &= \nu(1+\nu) - \frac{1-\nu^2}{2\eta} \left(1 + \frac{8-3\nu}{10(1-\nu)} \eta^2 N \right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Таким образом, теория Кирхгофа–Лява и ее уточнение описывают только резонансы волны типа Лэмба S_0 и порожденной жидкостью волны A (или волны типа Лэмба A_0). Номера описываемых резонансов лежат в областях $n \ll \eta^{-1}$ и $n \ll \eta^{-\frac{1}{2}}$ для уточненной асимптотической модели и теории Кирхгофа–Лява, соответственно.

3. Модель типа плоского слоя

Как уже отмечалось (см., например, [10]), что при рассеянии акустической волны тонкой оболочкой рассеянное давление в существенной мере формируется

периферическими волнами, являющимися аналогом волн Лэмба в плоском слое. По этой причине модель плоского слоя ранее широко использовалась в задачах рассеяния [1, 10], но не для определения рассеянного давления, а только для вычисления резонансных частот парциальных мод.

В работах [4, 6] построена асимптотическая модель, являющаяся развитием модели плоского слоя — в ней рассматривается вынужденная задача и учитывается, что слой контактирует с жидкостью. Данная модель применяется в высокочастотной области, когда длина волны деформации мала по сравнению с радиусом срединной поверхности, и, следовательно, когда можно пренебречь кривизной оболочки. Эта модель типа плоского слоя эффективно описывает коротковолновые колебания оболочки и позволяет приближенно определить рассеянное давление и формы резонансных кривых. Эффективность предлагаемой модели проверена путем сравнения с точным решением задачи и определена область ее применимости [7–9].

Рассмотрим постановку задачи в рамках модели типа плоского слоя. Примем, что движение оболочки описывается уравнениями

$$\Delta_p \varphi + \beta_1^{-2} k^2 R^2 \varphi = 0, \quad \Delta_p \psi + \beta_2^{-2} k^2 R^2 \psi = 0, \quad (3.1)$$

$$\Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \zeta = \frac{r}{R} - 1, \quad (3.2)$$

где φ и ψ — упругие потенциалы Ламе.

Переход от уравнений теории упругости в цилиндрической или сферической системе координат к уравнениям (3.1)–(3.2) опирается на предположения

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \sim \eta^{-1}, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} \sim \eta^{-1}, \quad \frac{\omega R}{c_2} \sim \eta^{-1}. \quad (3.3)$$

Условия (3.3) определяют коротковолновые колебания оболочки. Они позволяют оставить в уравнениях теории упругости только старшие производные и заморозить радиус r на срединной поверхности. Аналогичные упрощения следует сделать и в формулах для перемещений и напряжений, которые в результате примут вид

$$u_r = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right), \quad u_\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \right), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[-k^2 R^2 \varphi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta \partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right], \\ \sigma_{r\theta} &= \rho_1 c^2 \frac{1}{R^2} \left[k^2 R^2 \psi + 2\beta_2^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) совпадают с соответствующими соотношениями плоской задачи теории упругости в декартовой системе координат (ζ, θ) , причем координата ζ изменяется в пределах $(-\eta \leq \zeta \leq \eta)$.

Граничные условия (1.7) на лицевых поверхностях имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{\zeta=\eta} &= -(p_i + p_s)|_{r=a}, \quad u_r|_{\zeta=\eta} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a}, \\ \sigma_{r\theta}|_{\zeta=\eta} &= 0, \quad \sigma_r|_{\zeta=-\eta} = 0, \quad \sigma_{r\theta}|_{\zeta=-\eta} = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Потенциалы Ламе представим в виде рядов. Для цилиндрической оболочки это будут тригонометрические ряды

$$\varphi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\zeta) \cos n\theta, \quad \psi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\zeta) \sin n\theta, \quad (3.7)$$

а для сферической оболочки упругие потенциалы ϕ и ψ представим в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\phi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n(\zeta) P_n(\cos \theta), \quad \psi(\zeta, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_n(\zeta)}{N} \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (3.8)$$

Для цилиндрической оболочки, подставляя (3.7) в (3.1), (3.2), приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям для функций ϕ_n и ψ_n . Их общие решения можно записать в виде

$$\phi_n(\zeta) = C_{1n} \text{ch}(\alpha_1 \zeta) + C_{2n} \text{sh}(\alpha_1 \zeta), \quad \psi_n(\zeta) = C_{3n} \text{sh}(\alpha_2 \zeta) + C_{4n} \text{ch}(\alpha_2 \zeta), \quad (3.9)$$

$$\alpha_i = \sqrt{N^2 - \beta_i^{-2} k^2 R^2} \quad (i = 1, 2). \quad (3.10)$$

Подставим соотношения (1.5), (1.6), (3.7), (3.9) в граничные условия (3.6). В результате для каждого значения n ($n = 0, 1, 2, \dots$) получаем систему пяти линейных алгебраических уравнений относительно пяти постоянных C_{jn} , B_n ($j = 1, 2, 3, 4$). Из нее находим постоянные B_n :

$$B_n = -\frac{f'_n(x)d_1 - 2k^3 R^3 \kappa f_n(x)d_2}{g_n^{(1)'}(x)d_1 - 2k^3 R^3 \kappa g_n^{(1)}(x)d_2}, \quad (3.11)$$

$$d_1 = 4D_s D_a, \quad d_2 = \alpha_1 (\text{sh}(\alpha_1 \eta) \text{sh}(\alpha_2 \eta) D_a + \text{ch}(\alpha_1 \eta) \text{ch}(\alpha_2 \eta) D_s),$$

$$D_s = \gamma_0^4 \text{ch}(\alpha_1 \eta) \text{sh}(\alpha_2 \eta) - 4\beta_2^4 N^2 \alpha_1 \alpha_2 \text{sh}(\alpha_1 \eta) \text{ch}(\alpha_2 \eta), \quad (3.12)$$

$$D_a = \gamma_0^4 \text{sh}(\alpha_1 \eta) \text{ch}(\alpha_2 \eta) - 4\beta_2^4 N^2 \alpha_1 \alpha_2 \text{ch}(\alpha_1 \eta) \text{sh}(\alpha_2 \eta),$$

$$\gamma_0^2 = 2N^2 \beta_2^2 - k^2 R^2.$$

Аналогично для сферической оболочки решим задачу (3.1), (3.2), (3.6), используя (3.4), (3.5), (3.8) и асимптотическую формулу

$$\frac{\partial^2 P_n(\cos \theta)}{\partial \theta^2} \approx -N^2 P_n(\cos \theta) \quad (3.13)$$

справедливую при $N = n + 1/2 \gg 1$. Откуда находим, что неизвестные коэффициенты B_n (см. [6, 7]) также определяются формулами (3.11) и (3.12), в которых постоянная N и функции f_n , $g_n^{(1)}$ такие же, как и в соотношении (1.5).

Заметим, что построенная модель типа плоского слоя, учитывая смещение резонансных частот из-за взаимодействия оболочки с жидкостью, позволяет более точно определить их положение, чем модель "сухого" плоского слоя. Кроме того, до так называемой частоты совпадения $n = n_*$ волна Лэмба A_0 сменяется порожденной жидкостью волной A , описать резонансы которой с помощью модели "сухого" слоя невозможно. Отметим, что в зависимости от материала оболочки волна Лэмба A_0 может появиться при очень больших значениях частот, когда уже существуют и другие волны Лэмба, например, волна A_1 .

4. Длинноволновые высокочастотные приближения

Резонансы малых номеров волн типа Лэмба высших порядков описываются длинноволновым высокочастотным приближением уравнений теории упругости [3, 7–9]. В общем случае этот тип приближения применяется для описания колебаний в окрестностях частот толщинных резонансов, когда колебания оболочки

являются длинноволновыми и высокочастотными. В работах [1, 3] путем асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости была построена теория, которая описывает такие колебания в случае тонкостенного тела, взаимодействующего с жидкостью. В этой теории выделяется два типа длинноволновых высокочастотных приближений.

Поперечное приближение применяется в окрестности частот толщинных резонансов растяжения–сжатия, то есть при

$$|z - \Lambda_{st}| \ll 1 \quad (4.1)$$

где величина z определяется последним соотношением (2.2).

Здесь для антисимметричных мод имеем $\Lambda_{st} = \frac{\pi m}{\gamma}$ и для симметричных мод имеем $\Lambda_{st} = \frac{\pi(2m-1)}{2\gamma}$, $m = 1, 2, \dots$

Разрешающее уравнение поперечного приближения имеет вид

$$\eta^2 \left(T \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + T_R^0 w \right) + (z^2 - \Lambda_{st}^2) w = \pm \frac{(-1)^m h}{\rho_1 c_2^2} (p_i + p_s) (1 + K\eta), \quad (4.2)$$

$$T = \frac{1}{\gamma^2} \mp \frac{8}{\Lambda_{st}} \left\{ \begin{array}{l} \text{tg } \Lambda_{st} \\ \text{ctg } \Lambda_{st} \end{array} \right\}, \quad (4.3)$$

В уравнении (4.2) $T_R^0 = \frac{1}{4\gamma^2} - 4$, $K = 0, 5$ для цилиндрической оболочки $T_R^0 = -8$ и $K = 1$, для сферической оболочки. Здесь и далее верхний (нижний) знак и верхнее (нижнее) выражение в фигурных скобках соответствуют антисимметричным (симметричным) модам, u — тангенциальное перемещение в направлении оси θ , w — нормальное перемещение (прогиб).

Условие непротекания записывается следующим образом:

$$\pm (-1)^m w (1 - K\eta) = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a}. \quad (4.4)$$

В окрестности частот толщинных резонансов сдвига применяется **тангенциальное длинноволновое высокочастотное приближение**. В этом случае разрешающее уравнение принимает вид

$$\eta^2 \left(P \frac{\partial}{\partial \theta} D_1 u + P_R^0 u \right) + (z^2 - \Lambda_{sh}^2) u = \frac{2(-1)^{m+1} h \gamma}{\Lambda_{sh} \rho_1 c_2^2} \eta \frac{\partial (p_i + p_s)}{\partial \theta} \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{sh}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{sh}) \end{array} \right\}, \quad (4.5)$$

$$P = 1 \pm \frac{8\gamma}{\Lambda_{sh}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{sh}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{sh}) \end{array} \right\}. \quad (4.6)$$

В уравнении (4.5) $P_R^0 = -\frac{15}{4}$ для цилиндрической оболочки и $P_R^0 = -6$ для сферической оболочки.

Условие непротекания имеет вид

$$\frac{2(-1)^m \gamma}{\Lambda_{sh}} \eta D_1 u \left\{ \begin{array}{l} \text{ctg}(\gamma \Lambda_{sh}) \\ \text{tg}(\gamma \Lambda_{sh}) \end{array} \right\} = \frac{1}{\rho c^2 k^2} \frac{\partial}{\partial r} (p_i + p_s) \Big|_{r=a} \quad (4.7)$$

Здесь $k_0 = \text{ctg } \theta$, $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + k_0 \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\Phi(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta} + k_0 f$, $D_1 u = \frac{\partial u}{\partial \theta}$ для цилиндрической оболочки и $D_1 u = \Phi(u)$ для сферической оболочки.

В уравнениях (4.5)–(4.7) для антисимметричных мод имеем $\Lambda_{sh} = \pi(m - 0, 5)$ и для симметричных мод получаем $\Lambda_{sh} = \pi m$, $m = 1, 2, \dots$

Область применения уравнений (4.5)–(4.7) определяется неравенством

$$|z - \Lambda_{\text{sh}}| \ll 1.$$

Рассмотрим более подробно случай антисимметричного тангенциального приближения. Разложим перемещение u в тригонометрический ряд для цилиндрической оболочки

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\partial \cos n\theta}{\partial \theta}. \quad (4.8)$$

и по полиномам Лежандра в случае сферической оболочки

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{\partial P_n(\cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (4.9)$$

Подставим разложения (1.5), (1.6), (4.8) для цилиндрической оболочки или (4.9) для сферической оболочки в уравнения (4.5)–(4.7). Используя соотношения (2.9), получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой определим неизвестные коэффициенты B_n . Для антисимметричного случая тангенциального приближения они имеют следующий вид:

$$B_n = -\frac{S f_n'(x)_1 - G f_n(x)}{S g_n^{(1)'}(x) - G g_n^{(1)}(x)}, \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} S &= -P N^2 + P_R^0 + \eta^{-2} (z^2 - \Lambda_{\text{sh}}^2), \\ G &= 4N^2 h \kappa k \beta_1^{-2} c t g^2(\gamma \Lambda_{\text{sh}}) \Lambda_{\text{sh}}^{-2}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

В соотношениях (4.10), (4.11) величина N и функции f_n , $d_n^{(1)}$ такие же, как и в соотношении (1.5).

Заметим, что решения (4.10), (4.11) и аналогичные решения для других типов длинноволновых высокочастотных приближений применимы только для малых значений параметра n , где $n \ll \eta^{-1}$. Однако ряды (1.6) начинают сходиться при больших значениях параметра n : $n \sim x \sim \eta^{-1}$, где волновой радиус $x = ka$ (см. [10]). В этом случае решение содержит также и коротковолновые составляющие, например, волны типа Лэмба S_0 , A_0 (или волну A , порожденную жидкостью). Следовательно, при вычислении рассеянного давления данная модель должна быть скомбинирована с другой асимптотической моделью, которая может описывать коротковолновые колебания оболочки. Как показало численное моделирование, совместное использование длинноволнового высокочастотного приближения и модели типа плоского слоя, рассмотренной в предыдущем разделе, позволяет с высокой степенью точности находить рассеянное давление в области частот толщинных резонансов.

5. Синтез акустического давления

Рассмотрим сращивание асимптотических приближений, описанных выше.

Начнем с изучения резонансных компонент парциальных мод в случае рассеяния назад ($\theta = 0$). Для жесткого основания они имеют вид

$$\zeta_n = G_n \left| B_n + \frac{f_n(x)}{g_n^{(1)'}(x)} \right| \quad (5.1)$$

для цилиндрической оболочки $G_n = \frac{4}{\sqrt{\pi x}}$, для сферической оболочки $G_n = \frac{4N}{x}$.

Здесь n — номер парциальной моды.

Функция формы p в дальнем поле, определяющая асимптотическое представление рассеянного телом акустического давления при $r \rightarrow \infty$, в случае рассеяния назад ($\theta = 0$) вычисляется по формуле [4–10]

$$p = \left| 0,5 \sum_{n=0}^{\infty} G_n E_n B_n (-1)^n \right|. \quad (5.2)$$

В формуле (5.2) постоянные E_n такие же, как и в соотношении (1.6), а коэффициенты G_n определяются формулой (5.1).

Основное внимание уделено задачам рассеяния акустических волн оболочками, погруженными в воду. Подробно изучено влияние величины относительной толщины оболочки μ для следующих трех видов материала стенок оболочки.

1) Оболочка из алюминия. Параметры задачи:

$$\begin{aligned} c_1 = 6807 \text{ м/с}, \quad c_2 = 3180 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 2700 \text{ кг/м}^3, \\ \rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c = 1493 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

2) Оболочка из Армко железа. Параметры задачи:

$$\begin{aligned} c_1 = 5960 \text{ м/с}, \quad c_2 = 3240 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 7700 \text{ кг/м}^3, \\ \rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c = 1493 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

3) Оболочка из свинца. Параметры задачи:

$$\begin{aligned} c_1 = 3807 \text{ м/с}, \quad c_2 = 1687 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 11300 \text{ кг/м}^3, \\ \rho = 1000 \text{ кг/м}^3, \quad c = 1493 \text{ м/с}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Отметим, что скорости волн расширения и сдвига в оболочке определяются соответственно соотношениями

$$c_1 = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{E}{2(1+\nu)\rho}}.$$

Для всех трех видов сферических и цилиндрических оболочек (5.3)–(5.5) осуществлено сравнение резонансных компонент, вычисленных по уточненной ТКЛ и по модели плоского слоя: для волны типа Лэмба S_0 и для порожденной жидкостью волны A , которая, начиная с $n = n_*$, сменяется волной типа Лэмба A_0 . Аналогичное сравнение осуществлено для волны типа Лэмба A_1 , где компоненты ζ_n найдены с использованием модели типа плоского слоя и ДВ ВЧ-приближения. Численное моделирование показывает, что при $1/30 \leq \mu \leq 1/9$ данные асимптотические приближения имеют области согласования: между уточненной ТКЛ и моделью типа плоского слоя, а также между моделью типа плоского слоя и ДВ ВЧ-приближением в окрестности частот записания.

Это дает возможность осуществить синтез функции формы рассеянного давления в дальнем поле в широком частотном диапазоне при различных значениях параметров оболочки и относительной толщины оболочки μ . Отметим, что размеры указанных областей согласования зависят от конкретных значений параметров материала оболочки и относительной толщины оболочки μ . Так, при увеличении относительной толщины оболочки размеры областей согласования в частотной области уменьшаются.

Подробные результаты срачивания трех асимптотических приближений при относительной толщине $\mu = 1/20$ приведены для цилиндрической оболочки в работах [8, 9], а для сферической оболочки — в работе [7].

Для всех трех рассмотренных моделей проведены сравнения полученных результатов с точными решениями, которые показали высокую эффективность предложенных асимптотических методов в соответствующей области частот. Предложенный подход, основанный на срачивании трех простых асимптотических моделей, позволяет с равномерной малой погрешностью по волновому числу описать рассеянное давление и резонансные компоненты парциальных мод в достаточно широком частотном диапазоне. Более того, данный метод может быть обобщен на оболочки более сложной формы (некруговые цилиндрические оболочки и оболочки вращения), для которых точного решения не существует.

Литература

- [1] Kaplunov, J.D. Dynamics of thin walled elastic bodies / J.D. Kaplunov, L.Yu. Kossovich, E.V. Nolde. — N.Y.etc.: Academic Press, 1998. — 226 p.
- [2] Kaplunov, J.D. A refined asymptotic model of fluid-structure interaction in scattering by elastic shells / A.V. Belov, J.D. Kaplunov, E.V. Nolde // Flow, Turbulence and Combustion. — 1999. — V. 61. — P. 255–267.
- [3] Каплунов, Ю.Д. Высокочастотные напряженно-деформируемые состояния малой изменяемости в оболочках, погруженных в жидкость / Ю.Д. Каплунов // Прикладная математика и механика. — 1991. — Т. 55. — Вып. 3. — С. 478–485.
- [4] Ковалев, В.А. Развитие приближения типа плоского слоя в задаче рассеяния акустических волн цилиндрической оболочкой / М.В. Вильде, Ю.Д. Каплунов, В.А. Ковалев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 2002. — №3. — С. 180–186.
- [5] Ковалев, В.А. Применение уточненной асимптотической модели в задаче рассеяния плоской акустической волны сферической оболочкой / В.А. Ковалев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 2002. — №2. — С. 155–162.
- [6] Kovalev, V.A. On development of the flat layer model in scattering of acoustic waves by elastic bodies / V.A. Kovalev // Advanced problems in mechanics. Proceedings of XXIX Summer school. 21–30 Juny 2001. SPb. — 2002. — P. 382–388.
- [7] Ковалев, В.А. Срачивание асимптотических приближений в задачах рассеяния акустических волн упругой сферической оболочкой / В.А. Ковалев // Прикладная математика и механика. 2002. — Т. 66. — Вып. 4. — С. 596–606.
- [8] Kovalev, V.A. Matching of asymptotic models in scattering of a plane acoustic waves by an elastic cylindrical shell / J.D. Kaplunov, V.A. Kovalev, M.V. Wilde // Journal of Sound and Vibration. 2003. — V. 264(3). — P. 639–655.
- [9] Ковалев, В.А. Синтез акустического давления, рассеянного упругой цилиндрической оболочкой, основанный на срачивании асимптотических приближений / В.А. Ковалев // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. — 2003. — №4. — С. 215–224.
- [10] Векслер, Н.Д. Акустическая спектроскопия / Н.Д. Векслер. — Таллин: Валгус, 1989. — 323 с.

- [11] Überall, H. Sound scattering by elastic cylindrical shells / H. Überall, R.D.Doolittle // J. Acoust. Soc. America. – 1966. – V. 39. – No. 2. – P. 272–275.
- [12] Goodman, R.R. Reflection and transmission of sound by elastic spherical shells / R.R. Goodman, K. Stern // J. Acoust. Soc. America. – 1962. – V. 34. – No. 3. – P. 338–344.

Поступила в редакцию 26/VIII/2006;
в окончательном варианте — 26/VIII/2006.

AN ASYMPTOTIC APPROACH TO PROBLEMS OF ACOUSTIC WAVES IN ELASTIC SHELLS

© 2006 V.A. Kovalev²

An asymptotic approach to solution of stationary problems of scattering of acoustic waves by thin shells is proposed. The approximate solution is obtained by matching various asymptotic models. In the vicinity of zero frequency a refined Kirchhoff–Love theory is applied. In the vicinity of thickness resonance frequencies the long-wave high-frequency approximations are employed. Otherwise the flat layer model is used. A comparison with the exact solution for circular cylindrical and spherical shells confirms high efficiency of the proposed approach for various values of shell parameters.

Paper received 26/VIII/2006.
Paper accepted 26/VIII/2006.

²Kovalev Vladimir Alexandrovich (kovalev@migm.ru), Dept. of Mathematical and Informational Bases of Management, Moscow University of Government of Moscow, Moscow, 107045, Russia.