МЕХАНИКА

УДК 539.374

КИНЕМАТИКА ПРОСТРАНСТВЕННОГО ИДЕАЛЬНО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ СКОЛЬЖЕНИЯ

© 2006 Ю.Н. Радаев[1]

Исследована кинематика пластического течения на поверхностях максимальной скорости сдвига (поверхностях скольжения) в идеально пластических телах. Показано, что скольжения на указанной поверхности (сильные разрывы приращений перемещений) могут происходить только вдоль асимптотических направлений, если поверхность максимальной скорости сдвига имеет отрицательную Гауссову кривизну. Поэтому сдвиговое пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Получены интегрируемые соотношения для разрывов касательных составляющих приращений перемещений вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига. Рассмотрены кинематические соотношения в областях эллиптичности, т.е. когда Гауссова кривизна положительна, поверхности максимальной скорости сдвига.

1. Кинематика пространственного идеально пластического течения явилась предметом изучения в ряде работ, из которых отметим [1, 2]. В [2] с помощью подходов, развитых в монографии [3], приводится вывод системы уравнений, описывающей кинематику пространственного идеально пластического течения на ребре призмы Кулона—Треска, и дано исследование основных кинематических уравнений (включая пространственные соотношения Коши и уравнения совместности для приращений деформаций) с помощью триортогональной изостатической системы координат. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Выводятся соотношения для приращений перемещений вдоль линий главных напряжений, обобщающие известные соотношения Гейрингер. В представляемой статье, следуя [1], рассматривается кинематика пространственного идеально пластического течения на поверхности максимальной скорости сдвига (поверхности скольжения). Исключительный интерес здесь будут представлять соотношения, связывающие скачки тангенциальных приращений перемещений при переходе через линии сильного разрыва, расположенные на самой поверхности максимальной скорости сдвига. Указанные линии, как будет доказано, являются асимптотическими линиями поверхности максимальной скорости сдвига, а соотношения вдоль них, связывающие скачки, оказываются интегрируемыми.

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Как известно (см., например, [2]), система кинематических уравнений

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr}\,(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0, \\ &\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n}\,\mathrm{tr}((\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, указывающий главное направление, соответствующее наибольшему (наименьшему) главному напряжению, описывающая идеально пластическое течение на ребре призмы Кулона—Треска

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k,$$

правильно определенная[2] и гиперболическая. Характеристические направления этой системы, как показывает несложный расчет, совпадают с характеристическими направлениями системы трехмерных статических уравнений.

Трехмерные статические уравнения для ребра призмы Кулона—Треска имеют вид

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0} \quad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1), \tag{2}$$

где k — предел текучести при сдвиге, σ_3 — наибольшее (наименьшее) главное нормальное напряжение. Задача о равновесии идеально пластического тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Кулона—Треска, формально статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора $\mathbf{n}$), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия, следовательно, могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Векторное уравнение (2) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям $\mathbf{N}$ образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения, т.е. на элементах характеристической поверхности действует максимальное касательное напряжение. Характеристическими являются не только поверхности максимального касательного напряжения, но и интегральные поверхности векторного поля $\mathbf{n}$ (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля $\mathbf{n}$).

Важно отметить, что равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска имеется известная доля произвола при выборе двух оставшихся собственных ортов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$). При этом тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ обладает уникальным триэдром главных направлений, поскольку, вообще говоря, $d\varepsilon_1 \neq d\varepsilon_2$. Ясно поэтому, что при течении на ребре призмы Кулона—Треска ассоциированный закон течения будет устанавливать (помимо условия несжимемости) лишь то, что вектор $\mathbf{n}$ есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$.

Заметим, что кинематические соотношения пространственной задачи для грани призмы Кулона—Треска не являются правильно определенными: *три* компонен-

---

[2]Система (1) состоит из одного скалярного уравнения и одного векторного и выражает условие несжимаемости идеально пластического течения и условие того, что вектор $\mathbf{n}$ является собственным вектором тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Привлекая соотношения Коши

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}},$$

видно, что указанная система дает *три* независимых скалярных уравнения для определения *трех* компонент приращения вектора перемещений $d\mathbf{u}$, если направления $\mathbf{n}$ уже известны.

ты приращения вектора перемещений должны удовлетворять *пяти* независимым скалярным уравнениям[3].

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ (в этом случае σ_1 — максимальное, σ_2 — минимальное, σ_3 — промежуточное главное напряжение), тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2 \mathbf{I} - (\sigma_2 - \sigma_3)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + 2k\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}. \tag{3}$$

Поэтому уравнения равновесия получаются в виде (ср. (2))

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\Sigma_2 + \mathrm{div}(\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \\ + [\mathbf{n}\cdot\mathrm{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)]\,\mathbf{n} = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4}$$

где введены безразмерные главные напряжения $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$, или

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\Sigma_2 + (\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l} + \mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\left((\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})\right) + \\ + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{5}$$

К этому уравнению следует присоединить условия нормировки и ортогональности

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = 0.$$

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Видно, что характер пластического течения, если реализуется напряженное состояние на грани призмы Треска, оказывается чисто сдвиговым. Сдвиг происходит в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$. Направления максимальной скорости сдвига расположены в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, и делят пополам прямые углы, образованные направленными вдоль векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ пересекающимися прямыми.

Нетрудно видеть, что множитель $d\lambda$ вычисляется через главные приращения пластических деформаций в виде

$$d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2}.$$

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ для течения на грани призмы Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ принимает форму

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} - \mathbf{m}\otimes\mathbf{m})d\varepsilon_1^P$$

или также

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = -\mathbf{I}d\varepsilon_1^P + 2\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1^P + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_1^P,$$

где, в отличие от течения на ребре призмы Треска, векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$ жестко предписаны тензором напряжений и заданы, если задан тензор напряжений.

---

[3] По этому поводу см. [2].

Таким образом, система кинематических уравнений для рассматриваемой грани может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{l}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l}\,\mathrm{tr}((\mathbf{l}\otimes\mathbf{l})\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P),\\ &\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{0},\\ &\mathrm{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь содержится пять независимых скалярных уравнений, т.к. первое векторное уравнение дает только два независимых скалярных (скалярное умножение на вектор $\mathbf{l}$ приводит к тождеству), второе векторное уравнение — три независимых скалярных, но одно из них (которое получается скалярным умножением на вектор $\mathbf{l}$) следует из первого векторного уравнения (точнее, из уравнения, которое получается скалярным умножением первого векторного уравнения на вектор $\mathbf{n}$), а третье — одно скалярное уравнение.

Первое из уравнений (6) выражает просто тот факт, что вектор $\mathbf{l}$ есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, второе устанавливает, что вектор $\mathbf{n}$ — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ с нулевым собственным значением, третье — пластическую несжимаемость.

Состояния на грани призмы Треска, вообще говоря, статически неопределимы. Для состояний на грани необходимо совместное рассмотрение уравнений (5), (6), дополненных условиями нормировки и ортогональности

$$\mathbf{l}\cdot\mathbf{l} = 1, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1, \quad \mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = 0,$$

и соотношениями Коши

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}.$$

Только тогда получается правильно определенная система соотношений.

2. Поверхность скольжения в идеально пластическом теле суть поверхность разрыва касательных составляющих приращений перемещений. Как показывает анализ, данный в [1], на поверхности скольжения реализуется чисто сдвиговое течение, когда главные приращения пластических деформаций удовлетворяют условиям

$$d\varepsilon_i^P = 0, \quad d\varepsilon_j^P + d\varepsilon_l^P = 0, \quad (i \neq j,\ j \neq l,\ l \neq i). \tag{7}$$

При этом поверхность сильного разрыва касательных составляющих приращений перемещений заменяется тонким слоем, внутри которого вектор $d\mathbf{u}$ изменяется непрерывно. Чисто сдвиговое течение (7) возможно на ребре призмы Треска тогда, когда вектор, представляющий приращения пластических деформаций в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя—Вестергарда, занимает одно из крайних своих возможных положений между нормалями к граням призмы, пересечением которых образуется само ребро[4]. Чисто сдвиговое течение (7) реализуется на грани, и тогда необходимо совместное рассмотрение уравнений (5), (6), дополненных соотношениями Коши. В любом случае в дальнейшем при анализе

[4]Здесь мы говорим о *ребре* призмы Треска, хотя, посуществу, сдвиговое течение (7) соответствует *грани* с тем, чтобы оперировать с правильно определенной гиперболической системой кинематических уравнений (1) и ее решениями, подчиняющимися ограничениям (7). Мы пользуемся возможностью трактовать состояния на ребре как предельные случаи состояний на гранях, пересечением которых образовано ребро. Действительное течение на грани, помимо кинематических связей (7), ограничивается еще и жестким предписанием триэдра главных осей тензора приращений пластических деформаций (он предписан триэдром главных осей тензора напряжений). На ребре призмы Треска предписывается лишь одно из трех главных направлений тензора приращений пластических деформаций.

течения вдоль поверхностей скольжения мы будем использовать лишь условия несжимаемости и соотношения Коши.

Деформация в нормальных сечениях поверхности скольжения представляет собой сдвиг одной стороны поверхности относительно другой ее стороны. В одном из нормальных сечений поверхности скольжения скорость деформации сдвига максимальна[5]. Линия пересечения этого нормального сечения с касательной плоскостью указывает направление максимальной скорости сдвига[6]. Из ассоциированного закона течения следует, что касательное напряжение на поверхности максимальной скорости сдвига также имеет максимальное значение[7]. Следовательно, поверхность максимальной скорости сдвига — характеристическая для правильно определенной системы уравнений кинематики (1), т.е.

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{N} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

где $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к указанной поверхности.

Итак, поверхность максимальной скорости сдвига есть, вообще говоря, поверхность сильного разрыва приращений перемещений. Нормальная составляющая вектора $d\mathbf{u}$ должна быть непрерывной при переходе через поверхность максимальной скорости сдвига, а касательная составляющая разрывна. Все последующие соотношения поэтому следует интерпретировать как выполняющиеся на каждой из двух сторон поверхности.

Нетрудно видеть, что на поверхности максимальной скорости сдвига выполняется соотношение

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{N}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon})\otimes\mathbf{N} + \mathbf{N}\otimes(\mathbf{N}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}), \tag{8}$$

т.е. сдвиги происходят в плоскостях, содержащих вектор $\mathbf{N}$, а в касательной плоскости сдвигов не происходит. Кроме него имеются также соотношение Коши и условие несжимаемости:

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} + (\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

$$\mathrm{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}) = 0. \tag{10}$$

Введем на поверхности скольжения Гауссовы координаты τ^1, τ^2. Обозначим через $\mathbf{i}_\alpha$ локальные базисные векторы, соответствующие параметризации τ^1, τ^2. Разложим тензор $\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u}$ на рассматриваемой поверхности, используя триэдр $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{N}$:

$$\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} = \mathbf{N}\otimes(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nabla})d\mathbf{u} + a^{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha\otimes\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\beta}, \tag{11}$$

где $a^{\alpha\beta}$ — компоненты фундаментального тензора поверхности. В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться, производя внутреннее умножение слева на векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{N}$.

Опираясь на условие несжимаемости и (9), (11), заключаем, что

$$\mathbf{N}\cdot(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nabla})d\mathbf{u} = -a^{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\beta}. \tag{12}$$

[5]Это нормальное сечение имеет направление вектора разности векторов тангенциальных приращений вектора перемещения с двух сторон поверхности.

[6]Именно поэтому поверхность скольжения мы будем называть также поверхностью максимальной скорости сдвига.

[7]Можно показать (см. [1, с. 47–49]), что только условие пластичности Треска обеспечивает существование в идеально пластических телах поверхностей разрыва касательных составляющих приращений перемещений с чисто сдвиговой картиной деформирования (7).

Умножая (9) слева на $\mathbf{N}$ и учитывая (11) и (12), находим

$$(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nabla})d\mathbf{u} = 2\mathbf{N}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon} + a^{\alpha\beta}\left(\left(\mathbf{i}_\alpha\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\beta}\right)\mathbf{N} - \mathbf{i}_\beta\left(\mathbf{N}\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\right)\right). \qquad (13)$$

Умножая тензорно обе части полученного уравнения справа и слева на вектор $\mathbf{N}$, складывая и используя (8),

$$\mathbf{N}\otimes(\mathbf{N}\cdot\boldsymbol{\nabla})d\mathbf{u} = \boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} - a^{\alpha\beta}\mathbf{i}_\alpha\otimes\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\beta},$$

а также (9), приходим к

$$\begin{gathered}2a^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\cdot\mathbf{i}_\beta\right)\mathbf{N}\otimes\mathbf{N} + a^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\otimes\mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\beta\otimes\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\right) = \\ = a^{\alpha\beta}\left(\mathbf{N}\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\right)(\mathbf{i}_\beta\otimes\mathbf{N} + \mathbf{N}\otimes\mathbf{i}_\beta).\end{gathered} \qquad (14)$$

Переходя в этом уравнению к следу, имеем

$$a^{\alpha\beta}\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\cdot\mathbf{i}_\beta = 0,$$

что позволяет несколько упростить уравнение (14)

$$a^{\alpha\beta}\left(\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\otimes\mathbf{i}_\beta + \mathbf{i}_\beta\otimes\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\right) = a^{\alpha\beta}\left(\mathbf{N}\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\right)(\mathbf{i}_\beta\otimes\mathbf{N} + \mathbf{N}\otimes\mathbf{i}_\beta). \qquad (15)$$

Приращения перемещений на поверхности максимальной скорости сдвига должны удовлетворять тензорному уравнению (15). Оно дает лишь три независимых скалярных уравнения, т.к. умножение обеих его частей на вектор $\mathbf{N}$ приводит к тождеству. Независимые соотношения получаются умножением обеих частей уравнения (15) на вектор $\mathbf{i}_\mu$ слева, что приводит к

$$\left(\mathbf{i}_\mu\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\alpha}\right)\mathbf{i}^\alpha + \frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\mu} = \left(\mathbf{N}\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\mu}\right)\mathbf{N},$$

а затем — на вектор $\mathbf{i}_\lambda$, что дает

$$\mathbf{i}_\mu\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\lambda} + \mathbf{i}_\lambda\cdot\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\mu} = 0. \qquad (16)$$

Поскольку уравнение (16) должно удовлетворяться на каждой из сторон поверхности максимальной скорости сдвига, то для скачков приращений перемещений имеем следующее соотношение:

$$\mathbf{i}_\mu\cdot\frac{\partial\,[d\mathbf{u}]}{\partial\tau^\lambda} + \mathbf{i}_\lambda\cdot\frac{\partial\,[d\mathbf{u}]}{\partial\tau^\mu} = 0.$$

3. Для дальнейшего анализа разложим вектор $d\mathbf{u}$ по векторам локального триэдра $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{N}$

$$d\mathbf{u} = (dU)\mathbf{N} + du^\alpha\mathbf{i}_\alpha.$$

Ясно, что dU, du^α не являются действительными приращениями и служат для сокращенной записи проекций вектора $d\mathbf{u}$ на указанный триэдр.

На основании формулы Вейнгартена (см., например [4, с. 266], $b_{\omega\gamma}$ — компоненты второй квадратичной формы поверхности максимальной скорости сдвига)

$$\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial\tau^\gamma} = -a^{\omega\sigma}b_{\omega\gamma}\mathbf{i}_\sigma$$

можно получить следующие выражения для частных производных вектора $d\mathbf{u}$ по гауссовым параметрам поверхности

$$\frac{\partial d\mathbf{u}}{\partial\tau^\gamma} = -(dU)a^{\omega\sigma}b_{\omega\gamma}\mathbf{i}_\sigma + \frac{\partial du^\alpha}{\partial\tau^\gamma}\mathbf{i}_\alpha + (du^\alpha)\Gamma^\sigma_{\alpha\gamma}\mathbf{i}_\alpha + \mathbf{N}\frac{\partial dU}{\partial\tau^\gamma},$$

внося которые в (16) и учитывая

$$\Gamma_{\alpha\lambda,\mu} + \Gamma_{\alpha\mu,\lambda} = \frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial\tau^\alpha},$$

приходим к уравнению

$$-2b_{\mu\lambda}(dU) + a_{\mu\alpha}\frac{\partial du^\alpha}{\partial\tau^\lambda} + a_{\lambda\alpha}\frac{\partial du^\alpha}{\partial\tau^\mu} + du^\alpha\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial\tau^\alpha} = 0. \tag{17}$$

Поскольку уравнение (17) должно удовлетворяться на каждой из сторон поверхности максимальной скорости сдвига, а нормальная составляющая dU непрерывна при переходе через эту поверхность, то скачки касательных составляющих приращений перемещений связаны посредством следующего соотношения:

$$a_{\mu\alpha}\frac{\partial\,[du^\alpha]}{\partial\tau^\lambda} + a_{\lambda\alpha}\frac{\partial\,[du^\alpha]}{\partial\tau^\mu} + [du^\alpha]\,\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial\tau^\alpha} = 0. \tag{18}$$

Сворачивая обе части уравнения (17) с $g^{\lambda\mu}$, имеем

$$4H(dU) + 2\frac{\partial du^\lambda}{\partial\tau^\lambda} + a^{\lambda\mu}\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial\tau^\alpha}du^\alpha = 0,$$

где H — средняя кривизна поверхности максимальной скорости сдвига:

$$H = -\frac{1}{2}b_{\mu\lambda}a^{\lambda\mu}.$$

Для скачков (принимая во внимание, что $[dU = 0]$) соответственно находим уравнение

$$2\frac{\partial\left[du^\lambda\right]}{\partial\tau^\lambda} + a^{\lambda\mu}\frac{\partial a_{\lambda\mu}}{\partial\tau^\alpha}\,[du^\alpha] = 0. \tag{19}$$

Исключая затем с помощью этого соотношения из (17) нормальную составляющую dU, получаем

$$-Ha_{\mu\alpha}\frac{\partial du^\alpha}{\partial\tau^\lambda} - Ha_{\lambda\alpha}\frac{\partial du^\alpha}{\partial\tau^\mu} - b_{\mu\lambda}\frac{\partial du^\beta}{\partial\tau^\beta} = 0. \tag{20}$$

Это уравнение[8] собственно и определяет пластическое скольжение вдоль поверхности максимальной скорости сдвига и должно удовлетворяться на каждой из двух ее сторон (касательные составляющие du^α могут иметь различные значения на разных сторонах поверхности; нормальная составляющая dU непрерывна при переходе через эту поверхность, если не допускать нарушения сплошности тела).

4. Для анализа кинематики течения на поверхности максимальной скорости сдвига исследуем уравнение (20) на предмет существования действительных характеристических направлений. Можно воспользоваться стандартной техникой Адамара—Томаса [1] геометрических условий совместности слабых разрывов касательных составляющих приращений перемещений. Слабый разрыв характеризуется

[8]Вместе с соответствующим уравнением, связывающим скачки касательных составляющих приращений перемещений

$$-Ha_{\mu\alpha}\frac{\partial\,[du^\alpha]}{\partial\tau^\lambda} - Ha_{\lambda\alpha}\frac{\partial\,[du^\alpha]}{\partial\tau^\mu} - b_{\mu\lambda}\frac{\partial\left[du^\beta\right]}{\partial\tau^\beta} = 0.$$

скачками производных, в поперечных по отношению к характеристическим линиям направлениях, величина которых вычисляется согласно

$$\left[\frac{\partial du^\alpha}{\partial \tau^\lambda}\right] = A^\alpha \nu_\lambda,$$

где ν_λ — единичный вектор нормали к характеристической линии на поверхности максимальной скорости сдвига[9]. Ясно, что

$$\nu_\lambda \nu^\lambda = 1, \quad A^\alpha A_\alpha > 0.$$

Из уравнений (20) выводятся соотношения для скачков касательных составляющих приращений перемещений. В результате находим, что компоненты ν_λ должны определяться из условий нетривиальной разрешимости относительно A_α ($A^\alpha A_\alpha > 0$) системы уравнений

$$-H(A_\mu \nu_\lambda + A_\lambda \nu_\mu) - (A^\beta \nu_\beta) b_{\mu\lambda} = 0. \tag{21}$$

Несложные рассуждения показывают, что вещественные характеристические направления существуют, только когда главные нормальные кривизны поверхности максимальной скорости сдвига κ_1, κ_2 имеют разный знак (т.е. Гауссова кривизна поверхности K отрицательна). При этом характеристики представляют собой асимптотические линии на поверхности максимальной скорости сдвига[10]. Действительно, система уравнений (21) в ортогональной Гауссовой сетке имеет вид

$$\begin{aligned}
&-2HA_1\nu_1 - (a^{11}A_1\nu_1 + a^{22}A_2\nu_2)b_{11} = 0,\\
&-2HA_2\nu_2 - (a^{11}A_1\nu_1 + a^{22}A_2\nu_2)b_{22} = 0,\\
&-H(A_1\nu_2 + A_2\nu_1) - (a^{11}A_1\nu_1 + a^{22}A_2\nu_2)b_{12} = 0.
\end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2H\nu_1 - a^{11}b_{11}\nu_1 & -a^{22}b_{11}\nu_2 \\ -H\nu_2 - a^{11}b_{12}\nu_1 & -H\nu_1 - a^{22}b_{12}\nu_2 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(2H_1 + a^{11}b_{11})(H\nu_1 + a^{22}b_{12}\nu_2)\nu_1 = a^{22}b_{11}(H\nu_2 + a^{11}b_{12}\nu_1)\nu_2,$$

принимает наиболее простую форму

$$b_{22}\nu_1^2 + b_{11}\nu_2^2 = 0,$$

когда криволинейная сетка на поверхности совпадает с сеткой линий кривизны (в этом случае $a_{12} = 0$, $b_{12} = 0$, $-b_{11}/a_{11} = \kappa_1$, $-b_{22}/a_{22} = \kappa_2$). Переходя в последнем уравнении к физическим компонентам $\nu_{<1>}$, $\nu_{<2>}$ относительно локального базиса сетки линий кривизны согласно $\nu_1 = \sqrt{a_{11}}\nu_{<1>}$, $\nu_2 = \sqrt{a_{22}}\nu_{<2>}$, получим

$$\kappa_2\nu_{<1>}^2 + \kappa_1\nu_{<2>}^2 = 0, \quad \nu_{<1>}^2 + \nu_{<2>}^2 = 1,$$

---

[9]Вектор $\mathbf{v}$ расположен в касательной к поверхности плоскости ортогонально характеристической линии.

[10]Напомним, что асимптотическими линиями на поверхности называются линии, нормальная кривизна которых равна нулю. Если $\mathbf{t}$ есть касательный вектор к асимптотической линии, то

$$b_{\mu\lambda}t^\mu t^\lambda = 0.$$

На поверхности отрицательной гауссовой кривизны асимптотические линии образуют координатную сетку. Угол ι между асимптотическими линиями вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\iota}{2} = \sqrt{-\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}.$$

откуда следует, что система уравнений (20) гиперболична, только если главные кривизны поверхности имеют разные знаки. Из этого же уравнения на основании формулы Эйлера для нормальной кривизны кривой на поверхности, составляющей угол ω с первой линией кривизны,

$$\kappa_n = \kappa_1 \cos^2\omega + \kappa_2 \sin^2\omega$$

заключаем, что нормальная кривизна характеристик системы уравнений (20) равна нулю, т.е. характеристики есть асимптотические линии поверхности максимальной скорости сдвига. Этот факт сразу же позволяет сделать вывод о том, что пластическое течение вблизи поверхности максимальной скорости сдвига (отрицательной Гауссовой кривизны) реализуется как результат микроскольжений в асимптотических направлениях. Поэтому результатом такого рода необратимого деформирования должны быть мозаичные узоры, составленные из отрезков линий микроскольжения, ориентированных в асимптотических направлениях. Даже локально поверхность отрицательной Гауссовой кривизны имеет довольно сложную форму. Любая окрестность точки поверхности отрицательной Гауссовой кривизны имеет седлообразную форму и делится асимптотическими направлениями на четыре части, причем две из них являются вогнутыми и две выпуклыми.

Предположим, что Гауссова кривизна поверхности максимальной скорости сдвига K отрицательна. Выберем параметризацию поверхности максимальной скорости сдвига так, чтобы координатные линии $\tau^1 = \mathrm{const}$, $\tau^2 = \mathrm{const}$ были асимптотическими линиями. Поскольку в этом случае

$$b_{11} = 0, \quad b_{22} = 0, \quad K = -\frac{b_{12}^2}{a}, \quad H = \frac{a_{12}b_{12}}{a}, \quad -\frac{H}{K} = \frac{a_{12}}{b_{12}},$$

то из системы уравнений (20) можно получить два независимых уравнения[11]

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + a_{12}\frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} &= 0,\\ a_{22}\frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} + a_{12}\frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} &= 0. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $a_{\mu\lambda}$ — компоненты метрического тензора поверхности, вычисленные в асимптотической координатной сетке. Система уравнений (22) записана в характеристических координатах. Каждое из уравнений этой системы есть соотношение вдоль характеристики.

В случае, когда система уравнений (20) эллиптична, в координатной сетке линий кривизны имеем

$$\begin{aligned} 2Ha_{11}\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + b_{11}\left(\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2}\right) &= 0,\\ 2Ha_{22}\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + b_{22}\left(\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} + \frac{\partial du^2}{\partial \tau^2}\right) &= 0,\\ Ha_{22}\frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} + Ha_{11}\frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} &= 0, \end{aligned}$$

откуда получаем два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \kappa_2\frac{\partial du^1}{\partial \tau^1} - \kappa_1\frac{\partial du^2}{\partial \tau^2} &= 0,\\ a_{11}\frac{\partial du^1}{\partial \tau^2} + a_{22}\frac{\partial du^2}{\partial \tau^1} &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

[11] При $\mu = 1$, $\lambda = 1$ и $\mu = 2$, $\lambda = 2$. Уравнение, соответствующее $\mu = 1$, $\lambda = 2$, не дает нового независимого соотношения.

Здесь, подчеркнем еще раз, координатная сетка τ^1, τ^2 совпадает с сеткой линий кривизны поверхности максимальной скорости сдвига. Второе уравнение приведенной системы можно преобразовать, переходя к физическим компонентам приращений перемещений и лонгальным параметрам s_1, s_2 вдоль линий кривизны. В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial du_{<1>}}{\partial s_2}+\frac{\partial du_{<2>}}{\partial s_1}+\gamma_1 du_{<1>}+\gamma_2 du_{<2>}=0,$$

где γ_1, γ_2 — геодезические кривизны линий кривизны поверхности максимальной скорости сдвига

$$\gamma_1=-\frac{\partial\ln\sqrt{a_{11}}}{\partial s_2},\quad \gamma_2=-\frac{\partial\ln\sqrt{a_{22}}}{\partial s_1}.$$

Заметим, что главные кривизны и геодезические кривизны линий кривизны связаны уравнениями Гаусса и Кодацци:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\kappa_2}{\partial s_1}+(\kappa_1-\kappa_2)\gamma_2=0,\\
&\frac{\partial\kappa_1}{\partial s_2}-(\kappa_1-\kappa_2)\gamma_1=0,\\
&\frac{\partial\gamma_1}{\partial s_2}+\frac{\partial\gamma_2}{\partial s_1}-\gamma_1^2-\gamma_2^2=K.
\end{aligned}$$

В итоге главная часть системы дифференциальных уравнений (23) приобретет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\kappa_2\frac{\partial du_{<1>}}{\partial s_1}-\kappa_1\frac{\partial du_{<2>}}{\partial s_2}+...=0,\\
&\frac{\partial du_{<1>}}{\partial s_2}+\frac{\partial du_{<2>}}{\partial s_1}+...=0.
\end{aligned}$$

5. Исследуем, наконец, соотношения для сильных разрывов касательных (по отношению к асимптотическим линиям поверхности максимальной скорости сдвига) составляющих приращения вектора перемещений. Поскольку уравнения (20) должны выполняться на поверхности максимальной скорости сдвига с каждой стороны соответствующей асмптотической линии, то для скачков имеем соотношения

$$\begin{aligned}
&a_{11}\frac{\partial\left[du^1\right]}{\partial\tau^1}+a_{12}\frac{\partial\left[du^2\right]}{\partial\tau^1}=0,\\
&a_{22}\frac{\partial\left[du^2\right]}{\partial\tau^2}+a_{12}\frac{\partial\left[du^1\right]}{\partial\tau^2}=0.
\end{aligned}$$

Так как нормальные (по отношению к асимптотическим линиям поверхности максимальной скорости сдвига) составляющие приращения вектора перемещений непрерывны, то вдоль каждой из двух асимптотических линий справедливо соотношение

$$\nu_1\left[du^1\right]+\nu_2\left[du^2\right]=0.$$

Принимая во внимание, что для ковариантных компонент нормалей к асимптотическим линиям

$$\begin{aligned}
&\nu_1=\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_1=0,\quad \nu_2=\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_2=\sqrt{a_{22}}\sin\iota;\\
&\nu_2=\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_2=0,\quad \nu_1=\boldsymbol{\nu}\cdot\mathbf{i}_1=-\sqrt{a_{11}}\sin\iota,
\end{aligned}$$

приходим к следующим соотношениям вдоль асимптотических линий:

$$\left[du^2\right] = 0, \quad \frac{\partial\left[du^1\right]}{\partial\tau^1} = 0 \quad \text{вдоль } \tau^1\text{-линии;}$$
$$\left[du^1\right] = 0, \quad \frac{\partial\left[du^2\right]}{\partial\tau^2} = 0 \quad \text{вдоль } \tau^2\text{-линии;}$$

интегрируя которые получаем четыре конечных соотношения

$$\left[du^2\right] = 0, \quad \left[du^1\right] = \mathrm{const} \quad \text{вдоль } \tau^1\text{-линии;}$$
$$\left[du^1\right] = 0, \quad \left[du^2\right] = \mathrm{const} \quad \text{вдоль } \tau^2\text{-линии.}$$

Таким образом, вдоль асимптотических линий поверхности максимальной скорости сдвига соотношения для скачков контравариантных (относительно локального базиса, который образует асимптотическая координатная сеть) компонент приращения вектора перемещений интегрируются. Два из четырех интегралов устанавливают непрерывность нормальных к асимптотическим линиям (и располагающихся в касательной плоскости к поверхности максимальной скорости сдвига) составляющих приращения вектора перемещений. Два других интеграла указывают на сохранение вдоль асимптотических линий одного семейства скачков тех контравариантных компонент приращения вектора перемещений, которые соответствуют базисным векторам, нормальным асимптотическим линиям другого семейства.

Литература

[1] Ивлев, Д.Д. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Наука, 1966. – 232 с.

[2] Радаев, Ю.Н. О кинематических соотношениях, определяющих пространственное пластическое течение на грани и ребре призмы Кулона—Треска / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – №6/1(46). – 2006. – С. 123-156.

[3] Радаев, Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев. – Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. – 147 с.

[4] Мак-Коннел, А.Дж. Введение в тензорный анализ с приложениями к геометрии, механике и физике / А.Дж. Мак-Коннел. – М.: Физматгиз, 1963. – 412 с.

[1] Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.

Поступила в редакцию 26/*VIII*/2006;
в окончательном варианте — 26/*VIII*/2006.

ON SLIP KINEMATIC OF THE PERFECTLY PLASTIC FLOW ALONG A MAXIMUM SHEAR STRAIN RATE SURFACE

© 2006 Y.N. Radayev[12]

In the paper slip kinematic on a surface of maximum shear strain rate in perfectly plastic continuous media is studied. Sliding on the surface is shown can be realized only along asymptotic directions and only within hyperbolic zones of the surface (wherein the Gaussian curvature of the surface is negative). Integrable equations along asymptotic lines of the maximum shear strain rate surface for the jumps of tangent velocities are obtained. Kinematic equations corresponding to elliptic zones on a maximum shear strain rate surface (i.e. if the Gaussian curvature of the surface is positive) are derived and analyzed.

Paper received 26/*VIII*/2006.
Paper accepted 26/*VIII*/2006.

[12]Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.