

МНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА СЛАБОГО РОСТА

© 2006 С.П. Мищенко¹, О.И. Череватенко²

Цель данной работы — показать, что многообразие алгебр Лейбница со слабым ростом последовательности коразмерностей над полем характеристики, отличной от двух, так же как и для случая алгебр Ли, является подмногообразием многообразия, определенного тождеством

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) \cdots (x_{2c+1} x_{2c+2}) \equiv 0.$$

Кроме того, в случае нулевой характеристики основного поля получен критерий полиномиальности роста коразмерностей многообразия алгебр Лейбница в терминах диаграмм Юнга.

Алгебра Лейбница над полем F — это неассоциативная алгебра с билинейным произведением, удовлетворяющая тождеству Лейбница

$$(xy)z = (xz)y + x(yz),$$

которое превращает правое умножение на элемент алгебры в дифференцирование этой алгебры. Понятно, что любая алгебра Ли является, в частности, алгеброй Лейбница. Вероятно, впервые этот класс алгебр был определен в работе А.М. Блоха [1].

Все неопределяемые понятия можно найти в монографии [2]. В случае нулевой характеристики основного поля вся информация про многообразие $\mathbf{V}$ линейных алгебр содержится в последовательности полилинейных частей $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, относительно свободной алгебры многообразия. Напомним, что пространство $P_n(\mathbf{V})$ является модулем симметрической группы, неприводимые подмодули которого связаны с разбиениями числа n $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$, $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots$. Рассмотрим разложение характера модуля $P_n(\mathbf{V})$ в целочисленную комбинацию неприводимых характеров

$$\chi_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (1)$$

Поведение последовательности $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \dots$, определяет рост многообразия. Например, если существуют такие числа C, k , что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^k$, то многообразие называют многообразием *полиномиального роста*. Естественным образом определяется многообразие *экспоненциального* или *промежуточного* роста. Следуя статье первого автора [3], назовем

¹Мищенко Сергей Петрович (mishchenkosp@ulsu.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

²Череватенко Ольга Ивановна (chai@pisem.net), кафедра алгебры и геометрии Ульяновского государственного педагогического университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, пл. 100-летия со дня рождения В.И. Ленина, 4.

рост многообразия *слабым*, если для некоторого натурального n выполняется условие $c_n(\mathbf{V}) < 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Понятно, что многообразия полиномиального, промежуточного, а также экспоненциального роста с основанием меньшим, $\sqrt{2}$, являются многообразиями слабого роста.

Перед формулировкой основного результата договоримся, что многообразие, определяемое тождеством

$$(x_1 x_2)(x_3 x_4) \cdots (x_{2c+1} x_{2c+2}) \equiv 0,$$

будем обозначать $\widehat{\mathbf{N}_c \mathbf{A}}$.

Для ассоциативного полинома f от m переменных и для произвольных элементов $x_0, x_1, \dots, x_m$ из некоторой алгебры Лейбница можно определить элемент $x_0 f(\text{adx}_1, \dots, \text{adx}_m)$, равный результату применения к x_0 полинома от внутренних дифференцирований adx_i , $i = 1, 2, \dots, m$. Например, если $f = z_1 z_2$, то

$$x_0 f(\text{adx}_1, \text{adx}_2) = x_0 x_1 x_2.$$

Доказательство следующей теоремы проводится аналогично доказательству в случае алгебр Ли (см. [3]), в данном случае определяемые по Хиггинсу (см. [4]) идеалы являются только правыми идеалами алгебры, что создает дополнительные трудности.

Теорема 1. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие алгебр Лейбница слабого роста над полем характеристики, отличной от двух. Тогда существует такое натуральное число c , что выполняется условие $\mathbf{V} \subset \widehat{\mathbf{N}_c \mathbf{A}}$.

Доказательство. Пусть $H_r^{(c)} = \langle \delta_1, \dots, \delta_r \rangle$ — абелева подгруппа симметрической группы S_{2c} , порожденная транспозициями $\delta_i = (2i - 1, 2i)$, $i = 1, \dots, r$. Будем считать, что группа $H_c^{(c)}$, где $c = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, естественным образом вложена в S_{n-1} .

Рассмотрим полилинейные элементы степени n абсолютно свободной алгебры:

$$x_n x_{\sigma(n-1)} \dots x_{\sigma(1)},$$

где $\sigma \in H_c^{(c)}$. Так как порядок группы $H_c^{(c)}$ равен 2^c , а $c_n < 2^c$, то существуют некоторые коэффициенты λ_σ , не все равные 0, и такие, что

$$\sum_{\sigma \in H_c^{(c)}} \lambda_\sigma x_n x_{\sigma(n-1)} \dots x_{\sigma(1)} \quad (2)$$

является тождеством в $\mathbf{V}$. Тождество четной степени

$$\sum_{\sigma \in H_c^{(c)}} \lambda_\sigma x_t x_{\sigma(2c)} \dots x_{\sigma(1)}, \quad (3)$$

которое при четном n эквивалентно (2), а при нечетном является его следствием, также выполняется в V . Если $\lambda_\sigma = -\lambda_{\sigma\delta_c}$ для любого $\sigma \in H_c^{(c)}$, то тождество (2) можно переписать так:

$$\sum_{\sigma \in H_{c-1}^{(c)}} \lambda_\sigma x_t x_{2c} x_{2c-1} x_{\sigma(2c-2)} \dots x_{\sigma(1)}.$$

Если же для некоторого σ $\lambda_\sigma \neq -\lambda_{\sigma\delta_c}$, то из (3) получаем нетривиальное следствие:

$$\sum_{\sigma \in H_{c-1}^{(c)}} \lambda_\sigma (x_t)(\text{ady}_1)^2 x_{\sigma(2c-2)} \dots x_{\sigma(1)}.$$

Продолжив этот процесс для $\delta_i, i = c-1, \dots, 1$, получим, что в $\mathbf{V}$ выполняется тождество

$$(xt)g, \quad (4)$$

где g — ассоциативный полином от внутренних дифференцирований, равный произведению $[adx_{i+1}, adx_i], (ady_i)^2$ в некотором порядке, причем степень g по любой переменной не больше двух. Утверждение теоремы будем доказывать с помощью математической индукции по количеству переменных, входящих в g во второй степени. Если таких переменных нет, то

$$(xt)g = (xt)(x_{2c}x_{2c-1}) \dots (x_2x_1)$$

и тогда $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$.

Пусть $g = f_1f_2$, где f_1 — начальный отрезок g до первого вхождения переменной в квадрате, включая этот квадрат. Предположим, что тождество содержит только одну переменную степени 2, тогда в f_2 не будет содержаться подобных переменных. Запишем наше тождество в следующем виде:

$$wxhf \equiv 0. \quad (5)$$

Домножим левую часть на z . Так как правое умножение является дифференцированием алгебры Лейбница, то, используя технику Хиггинса, получим следующее тождественное соотношение:

$$wxhzf \equiv 0. \quad (6)$$

Понятно, что выполняется также тождество $wxxx f \equiv 0$. Покажем, что выражение $wx_1x_2x_3f$ также является тождественным соотношением многообразия $\mathbf{V}$. В тождестве (5) подставим $x_1x_2 + x_3$ вместо x и возьмем полилинейную часть по переменным $x_i, i = 1, 2, 3$. Получим

$$w(x_1x_2)x_3f + wx_3(x_1x_2)f \equiv 0,$$

которое после преобразований примет вид

$$wx_1x_2x_3f - wx_2x_1x_3f + wx_3x_1x_2f - wx_3x_2x_1f \equiv 0.$$

Аналогичным образом получаем тождества:

$$wx_2x_3x_1f - wx_3x_2x_1f + wx_1x_2x_3f - wx_1x_3x_2f \equiv 0$$

и

$$wx_3x_1x_2f - wx_1x_3x_2f + wx_2x_3x_1f - wx_2x_1x_3f \equiv 0.$$

Кроме того, из соотношения (6) следует,

$$wx_3x_1x_2f + wx_3x_2x_1f = 0, wx_1x_2x_3f + wx_1x_3x_2f \equiv 0,$$

$$wx_2x_1x_3f + wx_2x_3x_1f \equiv 0.$$

Образовавшиеся тождества соберем в систему. Как легко убедиться, определитель системы отличен от нуля, поэтому каждое слагаемое равно 0. Получим, что $wx_{\sigma_1}x_{\sigma_2}x_{\sigma_3}f \equiv 0$ является тождеством многообразия $\mathbf{V}$ для любой перестановки σ .

Таким образом, индуктивный переход завершен, и мы можем предполагать, что в тождестве (4) нет переменных степени 2 и понятно, что в этом случае $\mathbf{V} \subset \widetilde{\mathbf{N}_c\mathbf{A}}$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

В случае поля нулевой характеристики в работе [5], в частности, показано, что не существует многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом

промежуточного роста. Так как многообразие промежуточного роста является, конечно, многообразием слабого роста, то доказанная в данной работе теорема 1 позволяет получить

Следствие 1. В случае нулевой характеристики основного поля не существует многообразий алгебр Лейбница промежуточного между полиномиальным и показательным роста.

Кроме того, для случая нулевой характеристики основного поля теорема 1 позволяет получить аналогичный работе [6] критерий полиномиальности роста многообразия алгебр Лейбница.

Теорема 2. В случае нулевой характеристики основного поля многообразие алгебр Лейбница $\mathbf{V}$ имеет полиномиальный рост тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число m , что в сумме (1) $m_\lambda = 0$ в случае, когда выполнено условие $n - \lambda_1 > m$.

Доказательство. Так как многообразие полиномиального роста имеет, в частности, слабый рост, то по теореме 1 выполнено включение $\mathbf{V} \subset \widehat{\mathbf{N}_s \mathbf{A}}$. Используя возможность дифференцирования при умножении справа, получаем, что в многообразии $\mathbf{V}$ выполнена система тождеств Капелли некоторого порядка $t+1$, что равносильно принадлежности кохарактера $\chi_n(\mathbf{V})$ полосе ширины t , то есть в сумме (1) с ненулевыми кратностями, $m_\lambda \neq 0$, присутствуют лишь слагаемые для не более чем t -членных разбиений $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$, то есть $\lambda_{t+1} = 0$.

Обозначим через d_λ размерность соответствующего разбиению λ неприводимого модуля. Отметим такое соотношение

$$c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda. \quad (7)$$

По условию для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^r$, где C, r — некоторые числа. Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что нет ограничений числа клеток диаграммы Юнга вне первой строки. Тогда для любого n , $n > (k+2)! \cdot t^{k+2}$, $c_n(\mathbf{V}) < n^k$ и существует разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t)$ с ненулевой кратностью $m_\lambda \neq 0$ такое, что $\lambda_2 > k+2$. По хорошо известной формуле крюков получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} d_\lambda > d_{(\lambda_1, k+2)} &> \frac{1}{n} \mathbf{C}_{\lambda_1 + (k+2)}^{k+2} = \frac{1}{n} \frac{(\lambda_1 + (k+2))!}{(k+2)! \lambda_1!} = \\ &= \frac{1}{n} \frac{\lambda_1^{k+2}}{(k+2)!} \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2) \dots (\lambda_1 + k + 2)}{\lambda_1^{k+2}}, \end{aligned}$$

так как $\lambda_1 \geq \frac{n}{t}$, то

$$\frac{1}{n} \frac{\lambda_1^{k+2}}{(k+2)!} \frac{(\lambda_1 + 1)(\lambda_1 + 2) \dots (\lambda_1 + k + 2)}{\lambda_1^{k+2}} > \frac{1}{(k+2)!} \frac{n}{t^{k+2}} n^k > n^k.$$

Следовательно, $d_\lambda > n^k$, что противоречит (7). Доказательство в обратную сторону очевидно. Таким образом, теорема доказана.

Литература

- [1] Блох, А.М. Об одном обобщении понятия алгебры Ли / А.М. Блох // Доклады Академии наук СССР. — 1965. — Т. 18. — №3. — С. 471–473.
- [2] Бахтурин, Ю.А., Тожества в алгебрах Ли / Ю.А. Бахтурин. — М.: Наука, 1985.

- [3] Мищенко, С.П. Многообразия алгебр Ли со слабым ростом последовательности коразмерностей / С.П. Мищенко // Вестник МГУ. – 1982. – №5. – С. 63–66.
- [4] Higgins, P.J. Lie rings satisfying the Engel condition / P.J. Higgins // Proc. Cambr. Philos. Soc. – 1954. – V. 50. – №1. – P. 8–15.
- [5] Рацеев, С.М. Некоторые многообразия алгебр Лейбница с целыми экспонентами / С.М. Рацеев // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Казань: Казанское математическое общество, 2005. – Т. 31. – С. 133–135.
- [6] Бенедиктович, И.И. Т-идеалы свободных алгебр Ли с полиномиальным ростом последовательности коразмерностей / И.И. Бенедиктович, А.Е. Заленский // Известия АН БССР. – 1980. – №3. – С. 5–10.

Поступила в редакцию 13/VI/2006;
в окончательном варианте — 13/VI/2006.

THE LEIBNIZ ALGEBRAS VARIETIES OF WEAK GROWTH

© 2006 S.P. Mishchenko³ O.I. Cherevatenko⁴

In the paper the varieties of the Leibniz algebras with the property that the codimension for some integer n restrict by the number $\sqrt{2}^n$ (so called the varieties of weakly growing codimension sequences) are studied. It is shown that such variety satisfies the identity

$$(x_1x_2)(x_3x_4) \cdots (x_{2c+1}x_{2c+2}) \equiv 0,$$

if the characteristic of a basic field is not equal to 2. We give also the equivalent condition for polynomial growth of varieties of the Leibniz algebras in terms of Young's diagrams, if the characteristic of a basic field is equal to zero.

Paper received 13/VI/2006.

Paper accepted 13/VI/2006.

³Mishchenko Sergey Petrovich (mishchenkosp@ulsu.ru), Dept. of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk, 432700, Russia.

⁴Cherevatenko Olga Ivanovna (chai@pisem.net), Dept. of Algebra and Geometry, Ulyanovsk State Pedagogical University, Ulyanovsk, 432700, Russia.