

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ Э. ШМИДТА СО СМЕЩЕНИЯМИ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

© 2006 Б.В. Логинов¹, О.В. Макеева²

С целью иллюстрации спектральной задачи Э. Шмидта рассмотрена задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений со смещениями в граничных условиях. Определены собственные числа и собственные функции прямой и сопряженной задач.

Введение

В классе функций $u, v \in C^2([0; x_0) \cup (x_0; 1]) \cap C^1[0; 1]$, $0 < x_0 < 1$, рассматривается задача на собственные значения для системы дифференциальных уравнений

$$u'' + \lambda v = 0, \quad v'' + \lambda u = 0 \quad (1)$$

со смещениями в граничных условиях

$$u(0) = 0, \quad u(x_0) = u(1), \quad v(1) = 0, \quad v(x_0) = v(0). \quad (2)$$

Система (1), (2) представляет собой пример спектральной задачи Э. Шмидта [1], записываемой в абстрактном функциональном пространстве в виде $Au = \lambda v$, $A^*v = \lambda u$. Спектр Шмидта позволяет распространить теорию Гильберта–Шмидта для вполне непрерывных симметричных операторов в гильбертовом пространстве на несимметричные [2, 3], а также записать спектральное разложение несамосопряженного оператора [4]. Не ограничивая общности, собственные числа Шмидта можно считать вещественными. Достаточно разыскать положительные значения λ и соответствующие им собственные функции $u(x)$, $v(x)$, т. к. отрицательным собственным значениям соответствуют собственные функции $u(x)$, $-v(x)$.

Сопряженная по Лагранжу задача в пространстве $C^2([0; x_0) \cup (x_0; 1]) \cap C[0; 1]$, $0 < x_0 < 1$, строится стандартными методами [5] и имеет вид (1) с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \quad u(x_0 + 0) = u(x_0 - 0), \\ u'(x_0 + 0) - u'(x_0 - 0) = u'(1), \\ v(0) = 0, \quad v(1) = 0, \quad v(x_0 + 0) = v(x_0 - 0), \\ v'(x_0 + 0) - v'(x_0 - 0) = -v'(0). \end{aligned} \quad (3)$$

В работе определены собственные числа и собственные функции прямой и сопряженной задач.

¹Логинов Борис Владимирович (loginov@ulstu.ru), кафедра высшей математики Ульяновского государственного технического университета, 432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, 32.

²Макеева Ольга Викторовна (omakeeva@hotmail.ru), Димитровградский технический колледж, 433513, Россия, г. Димитровград, пр. Автостроителей, 63.

1. Прямая задача

Полагая $\lambda = \mu^2 > 0$, получаем общее решение системы (1), (2) в виде

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x + C_3 e^{\mu x} + C_4 e^{-\mu x}, \\ v(x) &= C_1 \sin \mu x + C_2 \cos \mu x - C_3 e^{\mu x} - C_4 e^{-\mu x}. \end{aligned} \quad (1)$$

Граничные условия (2) дают для определения произвольных постоянных однородную линейную систему алгебраических уравнений с определителем

$$\begin{aligned} \Delta &= -4\{(\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0)[\sin \mu - \sin \mu(1 - x_0)] + \\ &\quad + (\sin \mu - \sin \mu x_0)[\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)]\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее номера строк определителя и граничных условий совпадают. Уравнение $\Delta = 0$ определяет при каждом $0 < x_0 < 1$ собственные значения Шмидта $\lambda = \lambda(x_0)$ задачи (1), (2). Результаты вычислительного эксперимента по определению алгебраической кратности собственного значения λ , выполненного для системы $\Delta = 0$, $\Delta'_\mu = 0$, показывают, что она равна 1, т. е. присоединенные (жордановы) элементы отсутствуют. Однако универсального определителя третьего порядка, отличного от нуля при всех корнях $\lambda(x_0)$, не существует. Можно лишь подобрать два минора d_{ik} третьего порядка, которые при всех собственных значениях $\lambda(x_0)$ одновременно не обращаются в нуль. Такими минорами являются, например, $d_{22} = 2\{\operatorname{sh} \mu \sin \mu x_0 - \operatorname{sh} \mu x_0 \sin \mu\}$, $d_{42} = 2\{\operatorname{sh} \mu(\sin \mu - \sin \mu x_0) + \sin \mu(\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0)\}$.

Лемма 2.1. Пусть $\Delta = 0$, тогда

$$\begin{aligned} 1^\circ \sin \mu &= \sin \mu x_0 = 0 \Leftrightarrow d_{22} = 0, d_{42} = 0; \\ 2^\circ \sin \mu &= \sin \mu x_0 \neq 0 \Leftrightarrow \cos \mu - \cos \mu x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow d_{22} \neq 0, d_{42} \neq 0; \\ 3^\circ \sin \mu &\neq \sin \mu x_0, \sin \mu \neq 0, \sin \mu x_0 \neq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (d_{22} \neq 0, d_{42} = 0) \cup (d_{22} = 0, d_{42} \neq 0). \end{aligned}$$

Доказательство. 1° Пусть $\sin \mu = \sin \mu x_0 = 0$, тогда равенства $\Delta = 0$, $d_{22} = 0$, $d_{42} = 0$ очевидны.

Пусть наоборот, $\Delta = 0$, $d_{22} = 0$, $d_{42} = 0$, тогда соответственно

$$\begin{aligned} \frac{\sin \mu - \sin \mu x_0}{\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0} &= -\frac{\sin \mu - \sin \mu(1 - x_0)}{\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)}, \\ \frac{\sin \mu}{\operatorname{sh} \mu} &= \frac{\sin \mu x_0}{\operatorname{sh} \mu x_0} = \frac{\sin \mu - \sin \mu x_0}{\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0} = -\frac{\sin \mu - \sin \mu(1 - x_0)}{\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)}, \\ \frac{\sin \mu}{\operatorname{sh} \mu} &= -\frac{\sin \mu - \sin \mu x_0}{\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0} = \frac{\sin \mu - \sin \mu(1 - x_0)}{\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)} \end{aligned}$$

и, следовательно, $\sin \mu = \sin \mu x_0 = 0$.

2° Пусть $\sin \mu = \sin \mu x_0 \neq 0$, тогда

$$\Delta = -4 \sin \mu (\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0) [1 - \cos \mu x_0 + \cos \mu] = 0$$

и

$$d_{22} = 4 \sin \mu (\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0) \neq 0, \quad d_{42} = 4 \sin \mu (\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0) \neq 0.$$

Пусть, наоборот, $d_{22} \neq 0$, $d_{42} \neq 0$, тогда при $\Delta = 0$ равенство $\sin \mu = \sin \mu x_0 = 0$ невозможно, согласно утверждению 1°. Если $\sin \mu = 0$, $\sin \mu x_0 \neq 0$, то

$$\Delta = -4\{[\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0] \sin \mu x_0 \cos \mu - [\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)] \sin \mu x_0\}.$$

При $\cos \mu = 1$,

$$\Delta = -8 \operatorname{sh} \mu x_0 [\operatorname{sh} \mu(1 - x_0) - \operatorname{sh} \mu x_0] \neq 0,$$

при $\cos \mu = -1$,

$$\Delta = 4\{(\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0) \sin \mu x_0 + \operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)\} \neq 0.$$

Если $\sin \mu \neq 0$, $\sin \mu x_0 = 0$, то

$$\Delta = -4\{[\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0](\sin \mu - \sin \mu \cos \mu x_0) + [\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)] \sin \mu\}.$$

При $\cos \mu x_0 = 1$,

$$\Delta = -4 \sin \mu [\operatorname{sh} \mu x_0 - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)] \neq 0,$$

при $\cos \mu x_0 = -1$,

$$\Delta = -4 \sin \mu \{2[\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu x_0] + [\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh} \mu(1 - x_0)]\} \neq 0.$$

Если $\sin \mu \neq \sin \mu x_0$, $\sin \mu \neq 0$, $\sin \mu x_0 \neq 0$, то уравнение $\Delta = 0$ имеет решения, при которых $d_{22} = 0$ ($d_{42} = 0$) в противоречие предположению. Значит, $\sin \mu = \sin \mu x_0 \neq 0$ и утверждение 2° доказано.

Утверждение 3°, очевидно, следует из вышеизложенного.

Перейдем к нахождению собственных функций.

1° $d_{22} = 0$, $d_{42} = 0$. Существует ненулевой минор третьего порядка, например, $d_{21} = 2\{\operatorname{sh} \mu(1 - x_0) + \operatorname{sh} \mu(\cos \mu x_0 - 2) - \operatorname{sh} \mu x_0 \cos \mu\} \neq 0$. Однако собственные функции отсутствуют, т.к. $u(x) = v(x) = C \sin \mu x$ не удовлетворяют граничным условиям.

2° $d_{22} \neq 0$, $d_{42} \neq 0$. Собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} u(x) &= d_{22}^{-1} (-d_{21} \sin \mu x + d_{22} \cos \mu x - d_{23} e^{\mu x} + d_{24} e^{-\mu x}), \\ v(x) &= d_{22}^{-1} (-d_{21} \sin \mu x + d_{22} \cos \mu x + d_{23} e^{\mu x} - d_{24} e^{-\mu x}), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} d_{21} &= 2\{\operatorname{sh} \mu(1 - x_0) + \operatorname{sh} \mu(\cos \mu x_0 - 2) - \operatorname{sh} \mu x_0 \cos \mu\}, \\ d_{23} &= e^{-\mu x_0} \sin \mu - e^{-\mu} \sin \mu x_0 - 2 \sin \mu + \sin \mu(1 - x_0), \\ d_{24} &= e^{\mu x_0} \sin \mu - e^{\mu} \sin \mu x_0 - 2 \sin \mu + \sin \mu(1 - x_0) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u(x) &= d_{42}^{-1} (-d_{41} \sin \mu x + d_{42} \cos \mu x - d_{43} e^{\mu x} + d_{44} e^{-\mu x}), \\ v(x) &= d_{42}^{-1} (-d_{41} \sin \mu x + d_{42} \cos \mu x + d_{43} e^{\mu x} - d_{44} e^{-\mu x}), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} d_{41} &= 2\{\operatorname{sh} \mu(1 - x_0) + \operatorname{sh} \mu(2 \cos \mu - \cos \mu x_0) - \operatorname{sh} \mu x_0 \cos \mu\}, \\ d_{43} &= -\sin \mu(1 - x_0) + \sin \mu(e^{-\mu x_0} - 2e^{-\mu}) + \sin \mu x_0 e^{-\mu}, \\ d_{44} &= -\sin \mu(1 - x_0) + \sin \mu(e^{\mu x_0} - 2e^{\mu}) + \sin \mu x_0 e^{\mu} \end{aligned}$$

Очевидно, что формулы (3) и (4) для собственных функций совпадают, так как при $\cos \mu - \cos \mu x_0 + 1 = 0$ соответственно равны определители $d_{2i} = d_{4i}$, $i = \overline{1, 4}$.

3° а) $d_{22} \neq 0$, $d_{42} = 0$. Собственные функции имеют вид (3);

б) $d_{22} = 0$, $d_{42} \neq 0$. Собственные функции имеют вид (4).

Отметим еще раз, что в приведенных выше формулах величины μ и x_0 связаны соотношением $\Delta = 0$, тем самым доказана

Лемма 2.2. Число $\lambda = \mu^2$ является собственным значением задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет соотношениям $\Delta = 0$, $\sin \mu \neq 0$, $\sin \mu x_0 \neq 0$.

2. Сопряженная задача

Общее решение сопряженной задачи на участках $[0; x_0]$ и $[x_0; 1]$ имеет тот же вид (1). Граничные условия (3) вместе с условием непрерывности в точке x_0 соответственно указанным промежуткам определяют однородную систему уравнений

относительно 8 переменных D_k и D'_k , $k = \overline{1, 4}$ с определителем Δ^* , который с точностью до множителя $2e^\mu / \sin \mu$, $\sin \mu \neq 0$, $\sin \mu x_0 \neq 0$ совпадает с определителем Δ . Согласно возникающим связям $D_2 = 0$, $D_4 = -D_3$, $D'_1 = -\operatorname{ctg} \mu D'_2$, $D'_4 = -e^{2\mu} D'_3$, эта система эквивалентна системе 4-го порядка относительно $-D_1$, $2D_3$, $D'_1 / \sin \mu$, $2e^\mu D'_3$, которая получается из исходной удалением 1, 2, 5, 6 строк. В преобразованной системе минор $d_{23}^* = 2 \sin \mu x_0 [\operatorname{sh} \mu(1 - x_0) - \operatorname{sh} \mu] \neq 0$ и можно найти собственные функции.

$$2^\circ \sin \mu = \sin \mu x_0 \neq 0,$$

$$u(x) = v(x) = \frac{1}{d_{23}^* \sin \mu} \begin{cases} -d_{21}^* \sin \mu x, & 0 \leq x \leq x_0, \\ d_{23}^* \sin \mu(1 - x), & x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где $d_{21}^* = -2 \sin \mu(1 - x_0) [\operatorname{sh} \mu(1 - x_0) - \operatorname{sh} \mu]$.

$$3^\circ \sin \mu \neq \sin \mu x_0, \sin \mu \neq 0, \sin \mu x_0 \neq 0$$

$$u(x) = \frac{1}{d_{23}^* \sin \mu} \begin{cases} -d_{21}^* \sin \mu x - d_{22}^* \operatorname{sh} \mu x, & 0 \leq x \leq x_0, \\ d_{23}^* \sin \mu(1 - x) + d_{24}^* \operatorname{sh} \mu(1 - x), & x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$v(x) = \frac{1}{d_{23}^* \sin \mu} \begin{cases} -d_{21}^* \sin \mu x + d_{22}^* \operatorname{sh} \mu x, & 0 \leq x \leq x_0, \\ d_{23}^* \sin \mu(1 - x) - d_{24}^* \operatorname{sh} \mu(1 - x), & x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где $d_{22}^* = -2 \operatorname{sh} \mu(1 - x_0) [\sin \mu(1 - x_0) - \sin \mu]$, $d_{24}^* = 2 \operatorname{sh} \mu x_0 [\sin \mu(1 - x_0) - \sin \mu]$.

3. Симметричный частный случай

Когда точка смещения равноудалена от концов отрезка, т. е. $x_0 = \frac{1}{2}$, $\Delta = -8 \sin(\mu/2) [\operatorname{sh} \mu - \operatorname{sh}(\mu/2)] [2 \cos(\mu/2) - 1]$ и $\mu = 2\pi n$ или $\mu = \pm 2\pi/3 + 4\pi s$, $n, s \in \mathbb{Z}$, $\mu > 0$. При $\mu = 2\pi n$ собственные функции отсутствуют. При $\mu = \pm 2\pi/3 + 4\pi s$ имеем случай 2° леммы (2.1) $\sin \mu = \sin \mu x_0 = \pm \sqrt{3}/2 \neq 0$. Здесь

$u(x) = \pm 2 \sin(\mu x \pm \pi/6) + \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\mu/2)} \operatorname{sh}(\mu x - \mu/2)$
 $v(x) = \pm 2 \sin(\mu x \pm \pi/6) - \frac{1}{2 \operatorname{sh}(\mu/2)} \operatorname{sh}(\mu x - \mu/2)$ — собственные функции прямой задачи;

$u(x) = v(x) = \begin{cases} \sin \mu x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ \sin \mu(1 - x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ — собственные функции сопряженной задачи.

Заключение

В пространстве $C^2([0; x_0] \cup (x_0; 1]) \cap C^1[0; 1]$, $0 < x_0 < 1$, определены собственные числа и собственные функции спектральной задачи Э. Шмидта со смещениями (1.1), (1.2) и сопряженной к ней (1.1), (1.3). Доказано, что присоединенные функции отсутствуют. В дальнейшем авторы предполагают рассмотреть и другие задачи на спектр Шмидта, а также использовать полученные результаты для уточнения приближенно заданных собственных чисел и собственных элементов Шмидта методом ложных возмущений [2, 3].

Литература

- [1] Schmidt, E. Zur Theorie linearen und nicht linearen Integralgleichungen, Teilen 1–3 / E.Schmidt // *Mathematische Annalen*. – V. 63–65. – P. 1905–1908.
- [2] Гурса, Э. Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 2. / Э.Гурса. – М.: ОНТИ, 1934.
- [3] Могилевский, Ш.И. О представлении вполне непрерывных операторов в абстрактном гильбертовом сепарабельном пространстве / Ш.И.Могилевский // *Изв. вузов. Матем.* – 1958. – №3(4). – С. 183–186.
- [4] Логинов, Б.В. О собственных числах и векторах возмущенного оператора / Б.В.Логинов, В.Е.Поспеев // *Изв. АН УзССР. Физ.-мат. науки.* – 1967. – №6. – С. 29–35.
- [5] Наймарк, М.А. Линейные дифференциальные операторы / М.А.Наймарк. – М.: Наука, 1975.
- [6] Loginov, B.V. Pseudoperturbation Method in Some Aspects of Eigenvalue Problem / B.V.Loginov, O.V.Makeeva // *Труды Средне-Волжского мат. об-ва.* – 2006. – V. 8. – №1. – P. 83–90.
- [7] Loginov, B.V. Pseudoperturbation Method for the Computation of Discrete E. Schmidt Spectrum / B.V.Loginov, O.V.Makeeva // *Int. Conference "Tikhonov and Contemporary Mathematics"*, Moscow, MGU. RAN, 19–25.06.06. Abstracts of session "Functional Analysis and Differential Equations". – М., 2006 – P. 166–167

Поступила в редакцию 11/IX/2006;
в окончательном варианте — 11/IX/2006.

THE SCHMIDT SPECTRAL PROBLEM WITH DISPLACEMENTS IN THE BOUNDARY CONDITIONS

© 2006 B.V.Loginov³ O.V.Makeeva⁴

In the paper the eigenvalue problem for the system of differential equations with displacements in the boundary conditions is considered to illustrate the E.Schmidt spectral problem. Eigenvalues and eigenfunctions for the direct and adjoint problems are determined.

Paper received 11/IX/2006.

Paper accepted 11/IX/2006.

³Loginov Boris Vladimirovich (loginov@ulstu.ru), Dept. of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 432027, Russia.

⁴Makeeva Olga Viktorovna (omakeeva@hotmail.ru), Dimitrovgrad Technical College, Dimitrovgrad, 433513, Russia.