

КРИТЕРИЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ТОРА¹

© 2006 В.Е. Воскресенский²

Доказано, что всякий стабильно рациональный k -тор является рациональным. Теперь мы имеем алгоритм, позволяющий находить торы, рациональные над данным основным полем.

В монографиях по линейным группам подробно освещается строение этих групп, определенных над алгебраически замкнутым полем. Рассмотрение линейных групп, определенных над незамкнутым полем k , приводит нас к задачам изучения группы бирегулярных преобразований $Aut_L(G)$ данной k -группы G , $k \subset L$, а группа $Aut_L(G)$ уже в простейших случаях оказывается весьма и весьма непросто устроенной. К примеру, группа всех бирегулярных преобразований аффинного пространства $\mathbf{A}^n$, $n > 1$. Далее, вопрос о бирациональной классификации линейных k -групп приводит к необходимости изучать проективные модели линейных групп и их бирациональные инварианты, а это необъятная область дальнейших исследований. Остановимся на этих вопросах более подробно.

Пусть k — некоторое поле, X — аффинное k -многообразие, неприводимое над замыканием $\bar{k}$ поля k (абсолютно неприводимое многообразие), $k[X]$ — его координатное кольцо, $k(X)$ — поле рациональных функций на X , $k \subset k[X] \subset k(X)$. Если Y — другое такое многообразие над полем k , то будем говорить, что Y есть k -форма многообразия X , если $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ становятся изоморфными при расширении поля определения k до поля $\bar{k}$, более точно, если $X \otimes_k \bar{k} \cong Y \otimes_k \bar{k}$. На языке алгебр это означает, что кольца $k[X]$ и $k[Y]$ изоморфны над $\bar{k}$. Можно детализировать это определение. Пусть L/k — расширение Галуа с группой $\Pi = Gal(L/k)$, $X_L = X \otimes_k L$. Группа Галуа Π действует на X_L через второй множитель. Если $X_L \cong Y_L$, то будем говорить, что Y есть L/k -форма многообразия X . Как описать множество всех L/k -форм данного аффинного многообразия X ? Пусть $f: X_L \rightarrow Y_L$ — изоморфизм L -многообразий, тогда σf снова L -изоморфизм для любого $\sigma \in \Pi$ и $f^{-1}(\sigma f) = a_\sigma$ является L -автоморфизмом многообразия X_L . Легко видеть, что $a_{\sigma\tau} = a_\sigma(\sigma a_\tau)$, т.е. набор a_σ , $\sigma \in \Pi$, является 1-коциклом группы Π со значениями в группе $Aut_L(X)$. Два коцикла a_σ и a'_σ группы $Aut_L(X)$ называются когомологичными, если существует элемент $b \in Aut_L(X)$ такой, что $a'_\sigma = b^{-1}a_\sigma(\sigma b)$. Когомологичность является отношением эквивалентности на множестве 1-коциклов, и множество классов эквивалентности называется множеством одномерных когомологий группы Галуа Π со

¹Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00313.

²Воскресенский Валентин Евгеньевич, кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

значениями в группе $Aut_L(X)$ и обозначают $H^1(\Pi, Aut_L(X))$ или $H^1(L/k, Aut_L(X))$. Если $Aut_L(X)$ — коммутативная группа, то $H^1(\Pi, Aut_L(X))$ также коммутативная группа, (в этом случае определены группы $H^n(\Pi, Aut_L(X))$ для любых $n \geq 0$), в общем случае $H^1(\Pi, Aut_L(X))$ лишь множество с отмеченной точкой — классом коцикла $b^{-1}(\sigma b)$. Вышеприведенный коцикл a_σ определяет многообразие Y с точностью до изоморфизма. Сопоставление многообразию Y класса когомологий, содержащего коцикл a_σ , определяет взаимнооднозначное соответствие между множеством различных L/k -форм данного k -многообразия X и множеством $H^1(\Pi, Aut_L(X))$. Подробности в работах [1, 2], там же показано, что это утверждение верно не только для аффинных, но и для любых локально замкнутых подмногообразий проективного пространства. Вопрос о вычислении $H^1(\Pi, Aut_L(X))$ является частью более общей задачи вычисления множества $H^1(\Pi, A)$, где A — некоторая Π -группа. Следующие результаты хорошо известны.

$$H^1(\Pi, L) = H^1(\Pi, L^*) = H^1(\Pi, GL(n, L)) = H^1(\Pi, SL(n, L)) = 0. \quad (1)$$

Очень трудной оказалась задача нахождения всех k -форм аффинного пространства A^n_k , $n \geq 2$, т.е. задача вычисления когомологий $H^1(\Pi, Aut_L(A^n))$. Если $n = 1$, то $H^1(\Pi, Aut_L(A^1)) = 0$, это следует из редукции к случаям (1). Однако группа $Aut_L(A^n)$ для $n > 1$ не имеет конечной размерности, и ряд гипотез о ее строении пока не доказан для $n > 2$. Имеется теорема Шафаревича [3], утверждающая, что $H^1(\Pi, Aut_L(A^2)) = 0$ для любого расширения L/k , т.е. не существует k -форм плоскости A^2_k , отличных от A^2_k .

Значительно проще находятся все формы проективного пространства P^n_k . Группа $Aut_L(P^n)$ всех L -автоморфизмов пространства P^n_L изоморфна фактор-группе $GL(n+1, L)/L^*$, она обозначается $PGL(n+1, L)$ и называется проективной группой. Поэтому множество $H^1(\Pi, PGL(n+1, L))$ описывает все L/k -формы пространства P^n_k . Всякая k -форма пространства P^n называется многообразием Севери-Брауэра размерности n . С другой стороны, группа $PGL(n+1, L)$ может быть истолкована как группа дробно-линейных автоморфизмов поля рациональных функций $L(x_1, \dots, x_n)$. Коцикл a_σ со значениями в $PGL(n+1, L)$ определяет представление $h: \Pi \rightarrow PGL(n+1, L)$, и группа $W = h(\Pi)$ конечна. Подполе инвариантов $F = L(x_1, \dots, x_n)^W$ обладает свойствами $F \cap L = k$, $FL = L(x_1, \dots, x_n)$, и F есть поле рациональных функций $k(X)$ на многообразии Севери-Брауэра X , которое определяется тем же коциклом a_σ . Еще одна очень важная гипотеза группы $PGL(n)$. Пусть $M(n, k)$ — алгебра всех квадратных матриц порядка n с коэффициентами из поля k . Известно, что всякий автоморфизм этой алгебры является внутренним, т.е. группа $Aut(M(n, k)) \cong PGL(n, k)$. Поэтому когомологии $H^1(\Pi, PGL(n, k_s))$ описывают также множество всех простых центральных k -алгебр ранга n^2 с точностью до изоморфизма. Итак, каждый элемент $h \in H^1(\Pi, PGL(n+1, L))$ однозначно определяет многообразие Севери-Брауэра X_h , поле функций F_h и центральную простую алгебру Λ_h . Точная последовательность

$$1 \rightarrow L^* \rightarrow GL(n, L) \rightarrow PGL(n, L) \rightarrow 1$$

определяет естественное отображение $\varphi: H^1(\Pi, PGL(n, L)) \rightarrow H^2(\Pi, L^*)$. Обстоятельное исследование отображения φ провел Рокетт [4]. Он показал, что отображение φ является мономорфизмом, т.е. при отображении φ различные элементы множества $H^1(\Pi, PGL(n, L))$ переходят в различные и вычислил образ $Im(\varphi)$. Напомним, что группа $H^2(\Pi, L^*)$ коммутативна, периодическая и элементы из $H^2(\Pi, L^*)$ взаимно однозначно соответствуют классам эквивалентных простых алгебр A с центром k , которые распадаются над расширением L/k , [5]. Рокетт показал, что $Im(\varphi)$ состо-

ит в точности из тех элементов группы $H^2(\Pi, L^*)$, индекс которых делит n . Сверх того, $Im\phi$ является подгруппой в группе $H^2(\Pi, L^*)$. Это позволяет определить естественную групповую структуру на множестве L/k -форм пространства $\mathbf{P}^n_k$.

Теперь перейдем к важнейшим объектам нашей статьи. Рассмотрим k -формы диагональных групп. Пусть $D_k(n)$ — диагональная группа размерности n , определенная над полем k . Удобно ее реализовать как диагональную подгруппу группы $GL_k(n+1)$, определяемую в $D(n+1)$ уравнением $x_1 x_2 \cdots x_{n+1} = 1$. Тогда кольцо регулярных функций $k[D(n)]$ легко вычисляется, оно является фактор-кольцом $k[x_1, \dots, x_{n+1}]/(x_1 \cdots x_{n+1} - 1)$, которое изоморфно кольцу частных $k[x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}]$. Если $g = (a_1, \dots, a_n) \in D(n, k)$, $a_i \neq 0$, то x_i есть координатные функции $x_i(g) = a_i$ и $x_i(g_1 g_2) = x_i(g_1) x_i(g_2)$, т.е. x_i — это базисные рациональные характеры группы $D_k(n)$. Группа $Aut_k(D(n))$ бирегулярных преобразований k -схемы $D_k(n)$ вычислена в работе автора [7]. Напомним ее строение. Пусть $\alpha \in D(n, k)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in k$, $\alpha_i \neq 0$. Элемент α определяет левый сдвиг T_α , который на точках действует обычным образом: $T_\alpha(\beta) = \alpha\beta$. Далее, пусть $Aut_{k-gr}(D(n))$ — подгруппа группы $Aut_k(D(n))$, состоящая из k -преобразований, сохраняющих групповую структуру на $D_k(n)$. Такие преобразования характеры группы $D_k(n)$ переводят в характеры и этим полностью определяются. Таким образом, группа $Aut_{k-gr}(D(n)) = Aut_{L-gr}(D(n))$ является постоянной групповой схемой, изоморфной группе $GL(n, \mathbf{Z})$. Заметим, что элемент $g = (g_{ij}) \in GL(n, \mathbf{Z})$ действует на точках $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ мультипликативно бирационально: $g(\alpha) = \beta$,

$$\text{где } \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad \beta_i = \prod_{j=1}^n \alpha_j^{g_{ij}}, \quad g_{ij} \in \mathbf{Z}, \quad \det(g_{ij}) = \pm 1.$$

Подгруппа сдвигов $D(n, k)$ и подгруппа автоморфизмов $GL(n, \mathbf{Z})$ порождают всю группу $Aut_k(D(n))$ и $Aut_k(D(n))$ есть полупрямое произведение этих подгрупп, при этом $D(n, k)$ является нормальной подгруппой в $Aut_k(D(n))$: $Aut_k(D(n)) = D(n, k)GL(n, \mathbf{Z})$. Пусть $k(\chi_1, \dots, \chi_n)$ — поле рациональных функций на группе $D_k(n)$, где χ_i — базисные характеры группы $D_k(n)$. Как мы видели, группа $D(n, k)$ действует линейно в k -пространстве $\langle \chi_1, \dots, \chi_n \rangle$, что совершенно не так для группы $GL(n, \mathbf{Z})$. Группа $Aut_k(D(n))$ есть подгруппа группы бирациональных преобразований $Cr_k(n)$ поля $k(\chi_1, \dots, \chi_n)$, и мы видим, что группа $Aut_k(D(n))$ не является алгебраической подгруппой в группе $Cr_k(n)$. Все торы данной размерности n над полем k описываются множеством когомологий $H^1(k, GL(n, \mathbf{Z}))$, где $GL(n, \mathbf{Z})$ действует бирационально на поле $k(\chi_1, \dots, \chi_n)$ по правилу $\chi_j \rightarrow \prod \chi_i^{a_{ij}}$. Пусть $h \in H^1(k, GL(n, \mathbf{Z}))$. Поскольку группа Галуа действует тривиально на $GL(n, \mathbf{Z})$, то элемент h есть просто представление группы Галуа $\mathcal{G}$ в группу $GL(n, \mathbf{Z})$ с точностью до целочисленной эквивалентности. Поскольку группа $\mathcal{G}$ компактна, а группа $GL(n, \mathbf{Z})$ дискретна, то $Im(h)$ является конечной подгруппой W группы $GL(n, \mathbf{Z})$. Пусть $\mathcal{G}_1 = \ker(h)$, $W \cong \mathcal{G}/\mathcal{G}_1 = \Pi$, $L = (k_s)_1^{\mathcal{G}}$.

Теперь легко определить L/k -тор T , соответствующий коциклу h . На группе $D_L(n)$ действуют два точных представления группы Π : $\sigma \rightarrow 1 \otimes h(\sigma)$ и $\sigma \rightarrow \sigma \otimes 1$, которые коммутируют друг с другом, поэтому имеем точное представление $u(\sigma) = \sigma \otimes h(\sigma)$ группы Π в группу $Aut_{k-gr}(D_L(n))$. Сам тор T тогда k -изоморфен фактор-группе $D_L(n)/u(\Pi)$. Имеет смысл описать эту конструкцию на языке алгебр и целочисленных представлений конечных групп. Пусть L/k — конечное расширение Галуа с группой Π , $\hat{T}$ — Π -модуль без кручения ранга n , $\chi_1, \dots, \chi_n$ — базис модуля $\hat{T}$, $L[\hat{T}] = L[\chi_1, \dots, \chi_n, \chi_1^{-1}, \dots, \chi_n^{-1}]$ — групповое кольцо группы $\hat{T}$, группа $\hat{T}$ рассматривается в мультипликативной записи. Тогда алгебра инвариантов $A = (L[\hat{T}])^\Pi$ является

алгеброй с когрупповой структурой, а ее спектр $T = \operatorname{Spec} A$ есть k -тор с группой характеров $\hat{T}$. Если $\hat{T}$ — точный Π -модуль, то L — минимальное поле разложения тора T . Мы видим, что описание k -торов эквивалентно изучению целочисленных представлений конечных групп и работы здесь хватит всем будущим поколениям математиков. Легко проверяется, что изоморфизм двух k -торов T_1 и T_2 эквивалентен Π -изоморфизму модулей $\hat{T}_1$ и $\hat{T}_2$, где Π — группа Галуа их общего поля разложения. Сверх того, из точной последовательности Π -модулей без кручения

$$0 \rightarrow \hat{T}_1 \rightarrow \hat{T}_2 \rightarrow \hat{T}_3 \rightarrow 0$$

следует точная последовательность k -торов

$$1 \rightarrow T_3 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \rightarrow 1.$$

Весьма интересен вопрос о бирациональной эквивалентности двух k -торов. Поскольку над полем k все торы рациональны, то над полем k все торы одинаковой размерности изоморфны. Долгое время оставался открытым вопрос о рациональности тора T над незамкнутым полем. Дело в том, что бирациональные инварианты алгебраического тора имеют существенно проективную природу. Пусть два k -тора T_1 и T_2 бирационально эквивалентны над полем k , X_1 и X_2 — гладкие проективные модели этих торов, определенные над k . Тогда Π -модули $\operatorname{Pic} X_{1,L}$ и $\operatorname{Pic} X_{2,L}$ являются подобными, т.е. существуют пермутационные Π -модули $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$, такие, что прямые суммы $\operatorname{Pic} X_{1,L} \oplus \hat{S}_1$ и $\operatorname{Pic} X_{2,L} \oplus \hat{S}_2$ изоморфны. Класс подобия модуля A обозначим через $[A]$. В частности, если k -тор T является k -рациональным, то класс $[\operatorname{Pic} X_L] = [0]$. Из открытого вложения $T \subset X$ следует точная последовательность Π -модулей

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \operatorname{Pic} X_L \rightarrow 0, \quad (2)$$

где $\hat{S}$ — пермутационный модуль. Группы $H^1(\pi, \operatorname{Pic} X_L)$ и $H^{-1}(\pi, \operatorname{Pic} X_L)$ являются бирациональными инвариантами многообразия T . Следующий неожиданный факт является одним из важнейших в бирациональной классификации алгебраических k -торов, а именно $H^{-1}(L/F, \operatorname{Pic} X_L(X)) = 0$, где $k \subset F \subset L$. Это свойство позволило строить канонические резольвенты (2) чисто алгебраически, минуя построение проективной модели. В вопросах классификации многообразий связанных линейных групп весьма полезным оказалось понятие стабильной рациональности и стабильной эквивалентности, а именно два k -многообразия X_1 и X_2 называются стабильно эквивалентными, если произведения $X_1 \times_k \mathbf{A}^m$ и $X_2 \times_k \mathbf{A}^p$ бирационально эквивалентны над k при некоторых m и p . Если же имеется бирациональный k -изоморфизм $X \times_k \mathbf{A}^m \cong \mathbf{A}^p$, то многообразие X называется *стабильно рациональным*. Ясно, что стабильно рациональные многообразия являются унирациональными. В 1984 году в работе [6] впервые были построены примеры стабильно рациональных, но не рациональных многообразий. Если поле k не замкнуто, то такие имеются в размерностях начиная с двух, а над полем комплексных чисел, начиная с трех. В этой же работе [6] имеется обстоятельный обзор истории вопроса и состояния дел к тому времени с точными библиографическими ссылками.

Особую роль в вопросах бирациональной геометрии алгебраических торов играют квазиразложимые торы, т.е. торы S , определенные над полем k с пермутационными модулями характеров $\hat{S}$. Квазиразложимые торы являются первыми по сложности после k -разложимых. Разбиение пермутационного базиса модуля $\hat{S}$ на орбиты группы Π определяет разложение Π -модуля $\hat{S}$ в прямую сумму $\bigoplus_{i=1}^s \mathbf{Z}[\Pi/\pi_i]$, где π_i — некоторые подгруппы группы Π . Тор S с модулем $\hat{S} = \mathbf{Z}[\Pi/\pi]$ легко описывается. Пусть $F = L^\pi$ — поле инвариантов, $\omega_1, \dots, \omega_m$ — базис расширения F/k , имеем регулярное представление поля F матрицами алгебры $M(m, k)$, которое опре-

деляет группу F^* как подгруппу в полной линейной группе $GL(m, k)$. Тор S есть максимальный k -тор группы $GL_k(m)$ с условием $S(k) = F^*$. Его стандартное обозначение: $S = R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$. Таким образом, каждый квазиразложимый L/k -тор есть прямое произведение торов вида $R_{F_i/k}(\mathbf{G}_m)$, где $k \subset F_i \subset L$. Если $x_1, \dots, x_m$ — координаты общего элемента поля F относительно базиса $\omega_1, \dots, \omega_m$, то координатное кольцо тора $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ можно записать в явном виде: $k[R_{F/k}(\mathbf{G}_m)] = k[x_1, \dots, x_m, y^{-1}]$, где $y = N_{F/k}(x_1\omega_1 + \dots + x_m\omega_m)$. Вложение $k[x_1, \dots, x_m] \subset k[x_1, \dots, x_m, y^{-1}]$ определяет точное действие группы $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ на $R_{F/k}(\mathbf{A}_F^1) \cong \mathbf{A}_k^m$ и вложение многообразия $R_{F/k}(\mathbf{G}_m)$ в $\mathbf{A}^m$ в качестве открытой орбиты. Переходя к прямым произведениям, мы видим, что всякий квазиразложимый k -тор S размерности n может быть реализован как максимальный k -тор группы $GL_k(\mathbf{A}^n)$, и многообразие S можно рассматривать как открытую орбиту в пространстве $\mathbf{A}_k^n$. Тор S является k -рациональным.

Для всякого Π -модуля рациональных характеров $\hat{T}$ тора T существует вялая резольвента, т.е. точная последовательность Π -модулей без кручения конечного ранга

$$0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{S} \rightarrow \hat{N} \rightarrow 0,$$

в которой $\hat{S}$ является пермутационным, а модуль $\hat{N}$ — вялым, последнее означает, что $H^{-1}(\pi, \hat{N}) = 0$ для всякой подгруппы π группы Π . Вялая резольвента модуля $\hat{T}$ определена неоднозначно, однако класс подобия $[\hat{N}]$ модуля $\hat{N}$ однозначно определяется модулем $\hat{T}$ и является бирациональным инвариантом k -тора T [2]. Обозначим этот класс символом $p(\hat{T})$ или $p(T)$. Он равен также классу модуля Пикара $[\text{Pic } X_L]$, где X — какое-нибудь гладкое проективное пополнение тора T над полем k . Пусть $C(L/k)$ — категория торов, определенных над k и разложимых над L , $P(\Pi)$ — полугруппа классов подобия Π -модулей, порожденная вялыми модулями. Сумма классов $[\hat{N}_1] + [\hat{N}_2]$ определяется как класс $[\hat{N}_1 \oplus \hat{N}_2]$. Определим полугруппу $Z(L/k)$, порожденную классами стабильно эквивалентных между собой торов категории $C(L/k)$ с умножением классов по правилу

$$\{T_1\} \times \{T_2\} = \{T_1 \times_k T_2\}.$$

Напомним, что два k -многообразия X_1 и X_2 называются стабильно эквивалентными, если произведения $X_1 \times_k \mathbf{A}^m$ и $X_2 \times_k \mathbf{A}^p$ бирационально эквивалентны над k при некоторых m и p . В работе [2] показано, что соответствие $T \rightarrow p(T)$ определяет изоморфизм полугрупп $Z(L/k)$ и $P(\Pi)$. Конечно, этот изоморфизм является только первым приближением к вопросу о бирациональной классификации торов из $C(L/k)$. Однако инвариант $p(T)$ позволяет выделить класс торов, близких к рациональным, и мы докажем, что такие торы действительно являются рациональными над полем k .

Как и следовало ожидать, тор T с условием $p(T) = [0]$ обладает особыми свойствами. Это торы, которые представимы в виде фактора

$$1 \rightarrow S_1 \xrightarrow{\alpha} S_2 \xrightarrow{\beta} T \rightarrow 1, \quad (3)$$

где S_1 и S_2 — квазиразложимые k -торы. Конечно, из эпиморфизма $\beta : S_2 \rightarrow T$ следует, что поле $k(T)$ содержится в $k(S_2)$, т.е., что всякий k -тор является унитарно рациональным многообразием. Квазиразложимые торы S обладают важными свойствами: $H^1(M/M_1, S(M)) = 0$ для любого расширения Галуа M/M_1 , $M_1 \supset k$. Отсюда следует, что отображение β последовательности (3) обладает k -рациональным сечением $\gamma : T \rightarrow S_2$, $\beta\gamma = 1$. Имеем k -рациональное отображение

$$\varphi = (\alpha, \gamma) : S_1 \times_k T \rightarrow S_2, \quad (4)$$

определяемое по правилу:

$$\varphi(s, t) = \alpha(s)\gamma(t), \quad s \in S_1(k_s), \quad t \in T(k_s).$$

Отображение φ является бирациональным. В самом деле, пусть имеем равенство $\alpha(s)\gamma(t) = \alpha(s_1)\gamma(t_1)$. Тогда $\beta[\alpha(s)\gamma(t)] = \beta[\alpha(s_1)\gamma(t_1)]$, откуда $t = t_1$, а тогда $s = s_1$. Таким образом, тор T с условием $p(T) = [0]$ является стабильно рациональным над полем k . Группы S_1 и S_2 могут быть реализованы в качестве максимальных k -торов в линейных группах $GL_k(V_1)$ и $GL_k(V_2)$, где V_i — линейные пространства над полем k , $\dim_k V_i = \dim_k S_i$. Мы видим, что поле рациональных функций $k(T)$ тора T есть поле инвариантов $k(V_2)^{S_1}$ группы S_1 , которая линейно и точно действует на пространстве V_2 посредством представления α . Бирациональное отображение φ формулы (4) можно переписать в виде

$$\varphi : V_1 \times_k T \rightarrow V_2. \quad (5)$$

Пусть теперь S — произвольный максимальный k -тор группы $GL(V_1)$. Зададим действие группы S на $V_1 \times_k T$ по правилу: S действует линейно и точно на V_1 и тривиально на T (обобщенное отражение от пространства T). Тогда группа S действует линейно на V_2 очевидным образом: $\delta(g) = \varphi g \varphi^{-1}$. Оператор δ определен этой формулой на всей группе $GL_k(V_1)$, и мы имеем ее линейное представление в группу $GL_k(V_2)$. Мы имеем любопытный факт: поле $k(T)$ можно представить в виде поля инвариантов $k(V_2)^{\delta(S)}$ для любого максимального k -тора S группы $GL_k(V_1)$, действующего на V_2 указанным выше способом. Пусть теперь $S = D_1$ — максимальный k -разложимый тор в $GL_k(V_1)$.

Поскольку группа $\delta(D_1)$ является подгруппой группы $GL_k(V_2)$, то существует максимальная k -диагонализируемая подгруппа D_2 , $D_2 \supset \delta(D_1)$, $\dim_k D_2 = \dim_k V_2$. Отсюда следует, что поле $k(T) = k(V_2)^{\delta(D_1)} = k(D_2/\delta(D_1))$ будет чисто трансцендентным над полем k , ибо тор $D_2/\delta(D_1)$ разложим над полем k , а следовательно, рационален над полем k . Таким образом, имеем следующий результат данной статьи.

Теорема Всякий стабильно рациональный k -тор является рациональным над полем k .

Итак, условие $p(T) = [0]$ является критерием рациональности алгебраического k -тора T .

Следствие 1. Пусть $\alpha : S \rightarrow GL(V)$ — точное линейное представление квазиразложимого тора S . Тогда существует бирациональное преобразование пространства V в W такое, что действие группы S на линейном k -пространстве W будет квазирегулярным, т.е. S -модуль W разложим в прямую сумму $W = W_1 \oplus W_2$, где W_1 — пространство регулярного представления тора S , а действие группы S на W_2 — тривиально.

Пусть теперь расширение L/k является циклическим, $\Pi = \text{Gal}(L/k)$, $(L:k) = n$. Кольцо целых элементов $\mathbf{Z}[\zeta_n]$ кругового поля $\mathbf{Q}(\zeta_n)$, где ζ_n — первообразный корень n -й степени из 1, можно рассматривать как Π -модуль, полагая $\sigma(\alpha) = \zeta_n \alpha$ для всякого $\alpha \in \mathbf{Z}[\zeta_n]$, здесь σ — образующий элемент группы Π . Пусть T_n будет k -тор с Π -модулем рациональных характеров $\hat{T}_n = \mathbf{Z}[\zeta_n]$. Поскольку все торы вида T_n стабильно рациональны над полем k [2], то имеем следующий результат.

Следствие 2. Торы T_n рациональны над полем определения для любого n .

Прямое доказательство рациональности торов T_n было изложено в докладе автора на конференции в Лиможе в 1997 году и опубликовано в заметке [8].

Литература

- [1] Серр, Ж.-П. Когомологии Галуа / Ж.-П. Серр. – М.: Мир, 1968.
- [2] Воскресенский, В.Е. Алгебраические торы / В.Е. Воскресенский. – М.: Наука, 1977.
- [3] Shafarevich, I.R. Lectures on minimal models and birational transformations of two-dimensional schemes / I.R. Shafarevich. – Bombay: Tata Inst. Fund. Res., 1966. – 175 p.
- [4] Рокетт, П. Когомологии Галуа проективных линейных групп и их приложения / П. Рокетт // Математика. – 1967. С. 88–116.
- [5] Ван-дер-Варден, Б.Д. Алгебра / Б.Д. Ван-дер-Варден. – М.: Наука, 1976.
- [6] Varieties stably rational non rational / A. Beauville [et al.] // Ann. of Math. – 1985. – No. 121. – P. 283–318.
- [7] Воскресенский, В.Е. Проективные инвариантные модели Демазюра / В.Е. Воскресенский // Известия АН СССР. Сер. Матем. – 1982. – Т. 46(2). – С. 195–210.
- [8] Voskresenskii, V.E. Stably rational algebraic tori / V.E. Voskresenskii // J. Th. des Nombres Bordeaux. – 1999. – No. 11. – P. 263–268.

Поступила в редакцию 30/VIII/2006;
в окончательном варианте — 30/VIII/2006.

A CRITERION OF RATIONALITY OF AN ALGEBRAIC TORUS

© 2006 V.E. Voskresenskii³

The rationality of stably rational k -torus is proved. Therefore we have an algorithm enabling us to find algebraic tori which are rational over a basic field.

Paper received 30/VIII/2006.
Paper accepted 30/VIII/2006.

³Voskresenskii Valentin Eugenievich (voskres@ssu.samara.ru) Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia