УДК 378.147:51

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПОДХОДАХ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ

© 2006 В.И. Алексенцев[1]

Рассмотрены некоторые подходы к математическому моделированию с целью принятия решений в прикладных задачах на исследование процессов и явлений. В ходе исследования отражены вероятностные закономерности оптимизационных систем массового обслуживания.

Основная цель и задача современной математики состоят в реализации универсального математического метода познания. Оно заключается в построении для изучаемого объекта, процесса или явления изоморфной математической модели, в последующем ее изучении этой математической модели и отражении результатов модели на объект изучения.

Математическое моделирование является общим методом научных исследований. При построении математических моделей абстрагируются от конкретной природы объекта и от происходящих в нем процессов и рассматривают только преобразование входных величин в выходные.

В математическом моделировании можно испытать исследуемую систему в идеальных условиях или в экстремальных режимах, связанных с риском. Это показано в результате решения задач, приведенных в монографии [1] отражены различные подходы к математическому моделированию. Основой каждого подхода являются определенные представления, идеи и предпосылки или, в общем, определенная концепция. В нашем исследовании концепция — это система, функционирующая в виде способа понимания, трактовок явлений оптимизационных процессов и предусматривающая определенную точку зрения на развитие содержания образования. Концепция служит руководящей идеей для реализации образовательных программ и конструктивным принципом различных видов образовательной деятельности.

[1]Алексенцев Владимир Иванович (kafsed@tiei.ru), Московский педагогический государственный университет, 119992, Россия, г. Москва, ГСП, ул. М. Пироговская, 1.

В зависимости от вида объекта, явления или системы, а также конкретных целей, которые ставятся при анализе, возможны различные методы их описания, т.е. существует несколько различных подходов к математическому моделированию.

Если одна из возможных целей математического моделирования состоит в том, чтобы разобраться в свойствах исследуемой системы, то в этом случае создается модель, охватывающая широкий класс объектов и процессов.

Другой подход к математическому моделированию состоит в тщательном количественном изучении систем определенного класса. При этом необходимо дать подробное математическое описание происходящих в них процессов.

Третий подход связан со стремлением использовать для анализа конкретные виды математических моделей.

В практической деятельности возникают задачи, сходные по постановке, обладают общим признакам и решаемые похожими методами. Решение состоит в выборе варианта из ряда возможных. Для обоснованного выбора варианта решений выполняются исследования, основанные на математических расчетах. Методы принятия решений, основанные на математических расчетах, получили название "исследование операций". Операции, представляющие ряд целенаправленных действий, имеют место в любой отрасли.

Операцией называется комплекс мероприятий, управляемый процесс с общим замыслом, направленный на достижение цели.

Для осуществления операции необходимы определенные ресурсы, которые позволят добиться поставленной цели. А поэтому первая задача заключается в том, чтобы найти такой способ действий в распределении и использовании ресурсов, который обеспечивает достижение цели наилучшим образом. Задача разрешима при сравнении результатов, получаемых при различных стратегиях, и выборе наилучшей.

При принятии решений необходимо учитывать ряд соображений, не учтенных математическим расчетом. Условия принятия решений меняются, и изменяются математические методы для выработки рекомендаций в зависимости от имеющейся информации. Если все действующие факторы известны, то в этом случае принимаемые решения будут в условиях определенности. В книге [1] рассмотрены решения задач о принятии оптимальных решений в условиях определенности на основе детерминированных методов.

Решение может привести к одному из множества возможных с разными вероятностями реализации исходов. Исход каждой конкретной реализации случаен и потому заранее точно непредсказуем. В этом случае реализуется метод принятия решений в условиях риска.

Исход операции зависит не только от стратегии индивида, но и от ряда факторов, не известных в момент принятия решений. Такими факторами могут быть погодные условия, действия конкурента, противника и т.п., в этом случае задача называется принятием решений в условиях неопределенности [1] . При наличии неопределенности нет гарантии в том, что можно получить решение единственно правильное. Но все-таки решение, принятое хотя и в условиях неопределенности, но на основании математических расчетов, лучше, чем взятое наугад.

В зависимости от природы неизвестных факторов задачи принятия решений в условиях неопределенности можно разделить на два класса:

1) стохастические задачи исследования операций, в них неизвестные факторы являются случайными величинами, для которых известны или установлены законы распределения вероятностей и другие статистические характеристики;

2) задачи исследования операций, в которых нет возможности описать неизвестные факторы статистическими характеристиками, их решение неопределенно.

Рассмотрим стохастические методы исследования операций, которые можно иллюстрировать задачами.

Переходы любой системы, процесса или явления из состояния в состояние осуществляются с определенными вероятностями или интенсивностями перехода. Для изучения закономерностей функционирования систем, удовлетворяющих массовый спрос, и образования очередей в такого рода системах служит математический аппарат, который называется теорией массового обслуживания. Методы теории массового обслуживания все более широко применяются для расчета рациональной организации процессов в различных сферах деятельности.

Системой массового обслуживания (СМО) называется любая система, предназначенная для обслуживания каких-либо заявок, поступающих в нее в случайные моменты времени. Устройство, непосредственно обслуживающее заявку, называется каналом обслуживания. В зависимости от каналов обслуживания СМО называется одноканальной или многоканальной.

Поступление заявки в СМО называется событием. Последовательность событий, состоящих в поступлении заявок в СМО, называют входящим потоком заявок. Последовательность событий, выходящих из СМО, называют выходящим потоком заявок.

В зависимости от поведения заявки в СМО различают СМО с отказами и СМО с очередью или ожиданием. Возможны СМО смешанного типа. Например, СМО с ограниченной очередью. К смешанному типу относятся СМО с ограниченным временем ожидания.

СМО с очередью или с ожиданием могут быть открытого и замкнутого типов. В открытых интенсивность поступающего потока заявок не зависит от состояния самой СМО, так как круг поступающих заявок практически не ограничен. Примерами таких СМО являются вокзальные кассы, метрополитен, телевизионные ателье и т.д. В СМО с очередью замкнутого типа обслуживается ограниченный круг "клиентов", поэтому интенсивность потока заявок существенно зависит от состояния системы. Примерами таких СМО являются ремонтные системы в автопарках, цехах и т.д.

СМО с очередью и смешанного типа различаются также по дисциплине обслуживания: обслуживаются ли заявки в порядке поступления или в случайном порядке, или есть заявки, которые обслуживаются вне очереди.

Для задания СМО необходимо знать вероятностные характеристики времени обслуживания одной заявки. Величина является случайной. Во многих задачах теории массового обслуживания закон распределения времени обслуживания предполагается показательным. Входящий поток заявок в СМО простейший, так как он удовлетворяет условиям:

1) отсутствие последействия;

2) стационарность;

3) ординарность.

Для простейшего потока вероятность $p_i(t)$ поступления в СМО ровно i заявок за время t вычисляется по формуле:

$$p_i(t) = \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t} \qquad (i \geqslant 0), \tag{1}$$

т.е. вероятности $p_i(t)$ распределены по закону Пуассона с параметром λt. Поэтому простейший поток — пуассоновский.

Обозначим через T интервал времени между поступлениями двух последовательных заявок. Найдем функцию распределения случайной величины T:

$F(t) = P(T < 1) = 1 - P_0(t)$, где $P(T < 1)$ — вероятность того, что случайная величина T примет значение меньшее, чем t; P_0 — вероятность противоположного события (т.е. за время t в СМО не поступила ни одна заявка). В силу формулы (1) имеем:

$$p_0(t) = \frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}, \qquad \text{тогда} \quad F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0). \tag{2}$$

Плотность распределения случайной величины T:

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t > 0).$$

Определяя математическое ожидание и дисперсию случайной величины T, получим:

$$M(T) = \frac{1}{\lambda}, \qquad D(T) = \frac{1}{\lambda^2}, \qquad \sigma = \sqrt{D(T)} = \frac{1}{\lambda}. \tag{3}$$

Таким образом, интервал времени T между двумя последовательными заявками в простейшем потоке имеет показательное распределение с математическим ожиданием $\frac{1}{\lambda}$, где λ — интенсивность потока.

Предполагаемый показательный закон распределения времени обслуживания в задачах теории массового обслуживания запишется как

$$F(t) = P(T_{\text{обсл.}} < t) = 1 - e^{-\mu t}. \tag{4}$$

Параметр этого распределения есть величина, обратная среднему времени обслуживания, т.е.

$$\mu = \frac{1}{M(T_{\text{обсл.}})}, \tag{5}$$

μ называют интенсивностью потока обслуживания.

При этом под потоком обслуживания понимается поток заявок, обслуживаемых одна за другой одним непрерывно занятым каналом. Если $T_{\text{обсл.}}$ представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение, то поток обслуживания является простейшим.

Если входящий поток и все потоки обслуживания простейшие, то процесс, протекающий в СМО, является марковским случайным процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем. Поэтому СМО, в которой все потоки простейшие, называют марковской.

Таким образом, предположение о показательном законе распределения времени обслуживания и интервала времени между двумя последовательными поступлениями заявок играет исключительную роль в теории массового обслуживания, так как упрощает аналитическое исследование СМО, сводя его к исследованию цепей Маркова.

Задача. Автоматизированная система управления (АСУ) продажей билетов состоит из двух параллельно работающих ЭВМ. При выходе из строя одной ЭВМ АСУ продолжает нормально функционировать за счет работы другой ЭВМ. Поток отказов каждой ЭВМ простейший. Среднее время безотказной работы одной ЭВМ равно 10 суткам. Вышедшую из строя ЭВМ начинают ремонтировать. Время ремонта распределено по показательному закону и в среднем составляет 2 суток. В начальный момент обе ЭВМ исправны. Найти среднюю производительность АСУ, если при исправности хотя бы одной ЭВМ производительность АСУ равна 100%, а при отказе обеих ЭВМ продажа билетов производится вручную, обеспечивая 30% общей производительности АСУ.

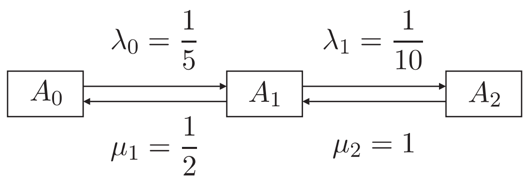
Решение. 1. Обозначим состояния АСУ по числу вышедших из строя ЭВМ: A_0 — обе ЭВМ исправны; A_1 — одна исправна, одна ремонтируется; A_2 — обе ЭВМ ремонтируются.

2. Так как потоки отказов и восстановления ЭВМ являются простейшими, то их интенсивности вычисляются по формулам (3) и (5):

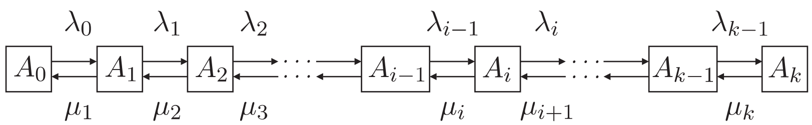
$$\lambda = \frac{1}{M(T)} = \frac{1}{10}\left(\frac{\text{отказов}}{\text{сут.}}\right); \qquad \mu = \frac{1}{M(T_{\text{обсл.}})} = \frac{1}{2}\left(\frac{\text{восстан.}}{\text{сут.}}\right).$$

Изобразим размеченный граф состояний

Поскольку в состоянии A_0 работают две ЭВМ, каждая из которых может отказать с интенсивностью $\lambda = \dfrac{1}{10}$, то АСУ переходит из состояния A_0



в состояние A_1 с интенсивностью $\lambda_0 = 2\frac{1}{10} = \frac{1}{5}$; переход $A_1 \to A_2$ происходит с интенсивностью $\lambda_1 = \lambda = \frac{1}{10}$. Из состояния A_2 в состояние A_1 система переходит с интенсивностью $\mu_2 = 2\mu = 2\frac{1}{2} = 1$, так как восстанавливаются две ЭВМ; переход $A_1 \to A_0$ происходит с интенсивностью $\mu_1 = \mu = \frac{1}{2}$. Полученный граф состояний сравним с графом, построенным на рис. 2 для процесса гибели и размножения.



Можно сделать вывод, что в описанной СМО происходит процесс гибели и размножения с числом состояний $k + 1 = 3$, так как $k = 2$.

3. Воспользуемся формулами для вычисления предельного распределения вероятностей в условиях данной задачи

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}\right)^{-1}; \qquad p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0; \qquad p_2 = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0. \tag{6}$$

Здесь λ_0, λ_1 — интенсивности переходов из состояния в состояние слева направо; μ_1, μ_2 — интенсивности переходов справа налево. Предельное распределение вероятностей существует. Это очевидно, так как все состояния A_0, A_1, A_2 являются сообщающимися. Вычислим вероятности p_0, p_1, p_2: $p_0 \cong 0,694$; $p_1 \cong 0,278$; $p_2 \cong 0,028$.

Сумма вероятностей состояний $p_1 + p_2 + p_3 = 0,694 + 0,278 + 0,028 \cong 1$, что и следовало ожидать, так как система может находиться в одном из трех возможных состояний — A_0, A_1, A_2.

4. Найдем среднюю производительность АСУ в установившемся режиме

$$(p_0 + p_1)100\% + p_2 \cdot 30\% = (0,694 + 0,278)100\% + 0,028 \cdot 30\% = 98,04\%.$$

Расчет показывает, что параллельная работа всего двух ЭВМ обеспечивает достаточно высокую (98,04% от номинальной) производительность АСУ. Следовательно, нет необходимости повышать производительность системы за счет, например, параллельного присоединения третьей ЭВМ.

Обычно в теории массового обслуживания интересуются показателями эффективности СМО. Показатель эффективности, зависящий от случайных факторов, тоже будет случайной величиной. Но в качестве показателя эффективности надо брать не саму случайную величину, а ее среднее значение и выбирать в качестве оптимального такое решение, при котором это среднее значение обращается в максимальное (или минимальное). Именно так поступают, т.е. выбирают в качестве показателя эффективности системы (операции или процесса), исход которой зависит от случайных факторов, среднее значение. В рассмотренной задаче вычислена средняя производительность АСУ.

Показателями эффективности СМО служат предельные средние характеристики системы, в качестве которых могут рассматриваться:

A — среднее число заявок, обслуживаемое СМО в единицу времени, — абсолютная пропускная способность СМО;

Q — вероятность обслуживания поступившей заявки — относительная пропускная способность СМО ($Q = \frac{A}{\lambda}$);

$P_{\text{отк.}}$ — вероятность отказа, т.е. вероятность того, что поступившая заявка не будет обслужена ($P_{\text{отк.}} = 1 - Q$);

$\overline{z}$ — среднее число заявок в СМО (имеются в виду все заявки — как обслуживаемые, так и ожидающие очереди, если она есть);

$\overline{r}$ — среднее число заявок в очереди, если она есть;

$t_{\text{сист.}}$ — среднее время пребывания заявки в СМО как в очереди, если она есть, так и под обслуживанием;

$\overline{t}_{\text{оч.}}$ — среднее время пребывания заявки в очереди;

$\overline{k}$ — среднее число занятых каналов.

Выбор показателей эффективности СМО зависит от ее типа. Например, абсолютная пропускная способность A, являясь основной характеристикой обслуживания в СМО с отказами, теряет смысл для СМО с неограниченной очередью.

$$t_{\text{сист.}} = \frac{\overline{z}}{\lambda}; \qquad \overline{t}_{\text{оч.}} = \frac{\overline{r}}{\lambda}; \qquad \overline{r} = \frac{A}{\mu}, \tag{7}$$

где λ — интенсивность потока заявок, μ — интенсивность потока обслуживания.

Формулы (7) справедливы только в том случае, когда входящий поток заявок и поток обслуживания стационарны.

В монографии [1] исследованы системы массового обслуживания с простейшим входящим потоком и показательным временем обслуживания как одноканальные с ограниченной и неограниченной очередью, так и многоканальные с отказами (задача Эрланга), а также с неограниченной очередью. Кроме того, исследованы одноканальные СМО с неограниченной очередью, простейшим входящим потоком и произвольным распределением времени обслуживания.

Приведенные формулы дали возможность на конкретных задачах рассчитать показатели эффективности для марковских СМО и для самых простейших случаев немарковских СМО. В более сложных случаях СМО, когда обслуживание ведется с некоторыми особенностями или потоки событий не являются простейшими, получить зависимости показателей эффективности простых аналитических выражений от параметров СМО не предоставляется возможным.

В указанных сложных случаях исследуют случайные процессы в СМО методом статистических испытаний (Монте–Карло).

Литература

[1] Алексенцев, В.И. Математика: теория и практика оптимизации функций / В.И. Алексенцев. Тула: ИПК и ППРО ТО; институт новых образовательных технологий — официальный партнер Российского государственного гуманитарного университета в г. Туле, 2003. 193 с.

[2] Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков, Ю.А. Черемных, А.В. Толстопятенко. – М.: Дело и Сервис, 1999. –368 с.

[3] Исследование операций в экономике / Под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити, 2000. – 407 с.

Поступила в редакцию 27/*IV*/2006;
в окончательном варианте — 27/*IV*/2006.

A STUDY OF RANDOM PROCESSES BY VARIOUS APPROACHES TO MATHEMATICAL MODELLING

© 2006 V.I. Aleksencev[2]

Approaches to mathematic modeling are examined for resolving the applied problems in the field of processes and phenomena research. In the study the probability patterns of popular service optimization systems are presented.

Paper received 27/*IV*/2006.
Paper accepted 27/*IV*/2006.

[2]Aleksencev Vladimir Ivanovich (kafsed@tiei.ru), Moscow State Pedagogical University, Moscow, 119992, Russia.