

РАСТЯЖЕНИЕ ПОЛОС ИЗ ДИЛАТИРУЮЩЕГО МАТЕРИАЛА¹

© 2006 Б.Н. Федулов²

В работе [1] рассмотрен возможный подход к описанию зависимости характеристик пластического деформирования дилатирующей среды от реализуемого при нагружении вида напряженного состояния. В данной работе этот подход использован для исследования предельного пластического состояния в условиях плоской деформации на примере решения задач о растяжении полосы с круговым отверстием и полосы с вырезами с круглым основанием. Для конкретного вида условия пластичности получены аналитические решения с использованием метода характеристик и проведено сравнение с результатами численного решения данных задач с использованием метода конечных элементов.

1. Определяющие уравнения пластического деформирования среды

Условие пластичности для дилатирующей среды примем в следующем обобщенном виде [1]:

$$F(\sigma_{ij}) = f(\xi)\sigma_0 = k. \quad (1.1)$$

Здесь $\xi = \sigma/\sigma_0$ — параметр вида напряженного состояния, характеризующий в среднем соотношение между нормальными и касательными напряжениями в точке сплошной среды, $\sigma = 1/3\sigma_{ii}$ — среднее нормальное напряжение, $\sigma_0 = \sqrt{3/2}S_{ij}S_{ij}$ — интенсивность касательных напряжений, $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$. Не нарушая общности, можно принять, что при чистом сдвиге ($\xi = 0$) значение функции $f(0) = 1$. Тогда $k = \sqrt{3}\tau_s$, где τ_s — предел текучести при сдвиге. При произвольном виде напряженного состояния параметр ξ принимает значения в диапазоне от $-\infty$ (равномерное трехосное сжатие) до ∞ (равномерное трехосное растяжение).

Принимая различные аналитические выражения для функции $f(\xi)$, можно получить некоторые из известных условий пластичности для гранули-

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

²Федулов Борис Никитович (Fedulov.B@mail.ru), кафедра теории пластичности Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119899, Россия, г. Москва, Воробьевы горы.

рованных, пористых и поврежденных сред. Если принять функцию $f(\xi)$ в виде линейной функции

$$f(\xi) = 1 + C\xi, \quad (1.2)$$

то придем к обобщению критерия Кулона–Мора. Можно также получить условие пластичности Грина

$$f(\xi) = \sqrt{1 + \alpha\xi^2}. \quad (1.3)$$

При $f(\xi) \equiv 1$ условие (1.1) совпадает с условием пластичности Губера–Мизеса $\sigma_0 = k$.

Принимая ассоциированный с условием (1.1) закон течения $\dot{\epsilon}_{ij} = h' \partial F / \partial \sigma_{ij}$, в случае жесткопластического тела получим связь между скоростями деформаций и напряжениями [1]

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} &= h' [1/3 \Lambda(\xi) \delta_{ij} + \lambda(\xi) f(\xi) S_{ij} / k], \\ \Lambda(\xi) &= f'(\xi), \lambda(\xi) = f(\xi) - \xi f'(\xi), \\ h' &= \sqrt{(\dot{\epsilon}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}) / (1/3 \Lambda^2(\xi) + 3/2 \lambda^2(\xi))}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Функции $\lambda(\xi)$ и $\Lambda(\xi)$ и их производные связаны соотношениями $\lambda(\xi) + \xi \Lambda(\xi) = f(\xi)$, $\lambda'(\xi) + \xi \Lambda'(\xi) = 0$.

1.1. Соотношения для условий плоской деформации

В случае плоской деформации $\dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{13} = \dot{\epsilon}_{23} = 0$ и, воспользовавшись соотношениями (1.4), можно выразить напряжение σ_{33} через $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ и исключить его из условия пластичности (1.1). В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \sigma - \frac{2}{9} \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{\lambda(\xi)}, \\ \sigma_0 &= S_0 [1 - \frac{\Lambda^2(\xi)}{9\lambda(\xi)}]^{1/2}, \\ \sigma &= S - \sigma_0 \frac{\Lambda(\xi)}{9\lambda(\xi)}, \\ S_0 &= \sqrt{3/2} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2]^{1/2}, \\ S &= 1/2 (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Вводя параметр $\zeta = S/S_0$, с помощью (1.5) можно выразить ζ через ξ :

$$\zeta = [\xi + 1/9 \Lambda(\xi)/\lambda(\xi)] [1 - 1/9 \Lambda^2(\xi)/\lambda^2(\xi)]^{1/2}. \quad (1.6)$$

Равенство (1.6) определяет взаимно однозначное соответствие между ξ и ζ при выполнении условий

$$3\lambda(\xi) > |\Lambda(\xi)|, \quad \Lambda'(\xi) \geq 0.$$

Параметр ζ и напряжение S_0 можно выразить через S [1]. Тогда известные формулы для напряжений в случае плоской деформации могут быть

представлены в виде:

$$\sigma_{11} = S - kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{22} = S + kF(S) \sin 2\theta, \quad \sigma_{12} = kF(S) \cos 2\theta. \quad (1.7)$$

Функция $F(S)$ в случае представления $f(\xi)$ зависимостью (1.2) имеет вид

$$F(S) = m(C^{-1} - S/k), \quad m = \sqrt{3C}/\sqrt{9 - C^2}.$$

В выражении (1.7) θ — угол между осью x_1 и направлением площадки, на которой действует максимальное касательное напряжение. Подставляя выражения (1.7) в уравнения равновесия, получим систему уравнений для определения напряженного состояния в среде, которая имеет такой же вид, как и уравнения общей плоской задачи идеальнопластической несжимаемой среды:

$$\begin{aligned} S_{,1} - kF'(S)(S_{,1} \sin 2\theta - S_{,2} \cos 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \cos 2\theta + \theta_{,2} \sin 2\theta) &= 0, \\ S_{,2} + kF'(S)(S_{,1} \cos 2\theta + S_{,2} \sin 2\theta) - 2kF(S)(\theta_{,1} \sin 2\theta - \theta_{,2} \cos 2\theta) &= 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Штрихом обозначена производная по S . Характеристики системы уравнений (1.8), которые можно обозначить индексами α и β , а также соотношения вдоль них в случае функции $f(\xi)$, представленной выражением (1.2), имеют вид:

$$\operatorname{tg} \varphi_{\alpha,\beta} = \frac{-\cos 2\theta \pm \sqrt{1 - m^2}}{m + \sin 2\theta}, \quad \frac{\sqrt{1 - m^2}}{2m} \ln(1 - C \frac{S}{k}) \pm \theta = \operatorname{const}. \quad (1.9)$$

В данном случае система уравнений (1.8) гиперболическая при $|m| < 1$, что соответствует $|C| < 3/2$. При таких ограничениях на чувствительность пластических свойств материала к виду напряженного состояния возможно построение аналитических решений задач методом характеристик.

На основе (1.4) и (1.7) можно также получить систему уравнений для скоростей [1]

$$(v_{1,2} + v_{2,1}) \operatorname{tg} 2\theta + v_{1,1} - v_{2,2} = 0, \quad (v_{1,1} + v_{2,2}) \cos 2\theta + (v_{1,2} - v_{2,1})kF' = 0.$$

Характеристики для напряжений и скоростей совпадают.

2. Аналитическое решение прикладных задач

2.1. Растяжение полосы с круговым отверстием

Рассмотрим задачу о растяжении полосы с круговым отверстием [2]. Полоса растягивается силами P со скоростью V , круговое отверстие находится в центре полосы, границы отверстия свободны от нагрузок. При этом будем полагать, что радиус кругового отверстия достаточно велик по сравнению с общей шириной полосы.

Рассмотрим вариант зависимости (1.2) для функции $f(\xi)$. В данной задаче существует неоднозначность при построении линий характеристик системы (1.8). Поскольку круговой контур отверстия свободен от нагрузок, то

к нему может прилегать осесимметричная область логарифмических спиралей. С другой стороны, к свободным прямолинейным боковым границам может прилегать поле одноосного прямолинейного растяжения. Пусть эти поля смыкаются в некоторой точке. Положение такой точки сопряжения областей не определено однозначно. Это означает, что можно построить множество решений. Для устранения данной неоднозначности определим значение предельной нагрузки для произвольного положения точки раздела областей и, воспользовавшись утверждениями экстремальных теорем, осуществим выбор координаты для этой точки, то есть ситуация выбора вида решения аналогична известному решению [2] в случае критерия пластичности Губера–Мизеса.

Аналитический вид характеристических линий в области логарифмических спиралей, записанный в полярных координатах $(\rho; \alpha)$ с началом в центре отверстия, выглядит следующим образом:

$$\frac{\alpha_0 \pm \alpha}{\operatorname{tg} \varphi/2} = \ln \rho/R. \quad (2.1)$$

Здесь $\varphi = \varphi_\beta - \varphi_\alpha$, R — радиус отверстия. Существенным отличием вида характеристик рассматриваемого здесь критерия по сравнению критерием Губера–Мизеса является зависимость от угла φ в выражении (2.1). Значение этого параметра определяется свойствами материала, а именно константой C из (1.2) или степенью чувствительности материала к виду напряженного состояния. В случае $C = 0$ угол $\varphi = \pi/2$ и, следовательно, $\operatorname{tg} \varphi/2 = 1$, это приводит к тому, что (2.1) в точности совпадает с аналитической записью для логарифмических линий характеристик в случае критерия пластичности Губера–Мизеса.

Далее найдем значения напряжений σ_{22} на срединной линии в областях спиралей и одноосного растяжения. Проведем данную процедуру сначала в области спиралей. Отсутствие касательных напряжений $\tau_n = 0$ и нормальных $\sigma_n = 0$ на границе позволяет, в силу (1.7), определить значения параметров S и θ на контуре отверстия

$$S = \frac{km}{C(1+m)}, \quad \theta = \pi + \alpha + \pi/4.$$

Теперь, зная значения на границе, найдем значения θ и S на центральной линии в области спиралей. Рассматривая симметричные линии характеристик и используя соотношения (1.9), получим на центральной линии рассматриваемой области

$$\theta = \frac{5}{4}\pi, \quad S = \frac{k}{C} \left[1 - \frac{1}{1+m} \exp \left(-\frac{2m}{\sqrt{1-m^2}} \alpha_0 \right) \right]. \quad (2.2)$$

Используя выражения (1.7) и (2.2), определяем значения напряжения σ_{22} на центральной линии

$$\sigma_{22} = \frac{k}{C} \left[\left(1 - \frac{1-m}{1+m} \exp \{ -2m \ln(\rho/R)/(1-m) \} \right) \right]. \quad (2.3)$$

Аналогично находим значение напряжения σ_{22} в области одноосного растяжения, в которой характеристики прямолинейны,

$$\sigma_{22} = \frac{2k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (2.4)$$

Теперь, зная напряжения σ_{22} в обеих деформируемых областях, исследуем изменение значения предельной нагрузки в зависимости от положения точки сопряжения пластических областей. Используя выражения (2.3) и (2.4), выпишем значение предельной нагрузки

$$P = 2 \int_R^{\rho^*} \frac{k}{C} \left[1 - \frac{1-m}{1+m} \exp\{-2m \ln(\rho/R)/(1-m)\} \right] d\rho + \\ + 2 \int_{\rho^*}^h \frac{2k}{C} \frac{m}{1+m} d\rho. \quad (2.5)$$

В формуле (2.5) предел интегрирования ρ^* представляет собой радиальную координату в полярной системе координат точки сопряжения областей. Далее воспользуемся утверждением экстремальной теоремы о том, что значение предельной нагрузки, полученное из кинематически возможного решения, является оценкой сверху. Можно показать, что минимум выражения (2.5) достигается при $\rho^* = R$ для произвольного значения константы C . При этом логарифмическая область отсутствует, и выражение предельной нагрузки представляется в виде

$$P = (h - R) \frac{4k}{C} \frac{m}{1+m}. \quad (2.6)$$

В силу того, что на границах с жесткими областями должны выполняться условия $v_\alpha = V \sin \varphi_\alpha$ и $v_\beta = V \sin \varphi_\beta$, из соотношений (1.9) находим поле скоростей

$$v_\alpha = V \sqrt{\frac{1-m}{2}}, \quad v_\beta = -V \sqrt{\frac{1-m}{2}}.$$

Полученное в данном решении поле напряжений можно распространить во всем теле, продолжив его вдоль вертикальной оси ненулевым напряжением σ_{22} в ослабленном сечении, то есть получим статически допустимое значение предельной нагрузки, которое совпадает с (2.6). Таким образом, получено полное решение, как и в случае решения данной задачи с использованием критерия пластичности Губера–Мизеса.

2.2. Растяжение полосы с вырезами с круглым основанием

В качестве другого примера рассмотрим задачу о растяжении полосы с вырезами с круглым основанием [2]. Для зависимости $f(\xi)$ выберем также вариант (1.2). Полоса растягивается силой P со скоростью V , границы вырезов свободны от нагрузок.

К свободным границам выреза, как и в предыдущем примере, может прилегать поле логарифмических спиралей. Если величина параметра h

относительно мала, то возможно решение, состоящее только из таких областей. Аналитический вид характеристических линий в деформируемых областях, записанный в полярных координатах $(\rho; \alpha)$ с началом в центре окружности основания выреза аналогичен (2.1). Условие возможности такого решения зависит от координаты точки пересечения симметричных логарифмических спиралей выпущенных с границы вырезов под углом $\pm\pi/2$. Такое условие в данном случае запишется в виде:

$$h/R \leq \exp\left(\frac{\pi}{2 \operatorname{tg}(\varphi/2)}\right) - 1. \quad (2.7)$$

Рассмотрим случай, когда условие (2.7) выполнено, тогда возможен вид полей характеристик состоящий только из логарифмических спиралей.

Чтобы определить величину предельной нагрузки, найдем значения напряжений σ_{22} на серединной линии. Отсутствие касательных напряжений $\tau_n = 0$ и нормальных $\sigma_n = 0$ на границе выреза позволяет воспользоваться полученными в предыдущем примере результатами, то есть, в данном случае напряжения σ_{22} определяются выражением (2.3).

Теперь, зная напряжения σ_{22} на центральной линии, выпишем значение предельной нагрузки:

$$P = 2 \int_R^{h+R} \frac{k}{C} \left[1 - \frac{1-m}{1+m} \exp\{-2m \ln(\rho/R)/(1-m)\} \right] d\rho$$

и после интегрирования получим

$$P = 2R \frac{k}{C} \left[h/R - \left((1+h/R)^{-(3m-1)/(1-m)} - 1 \right) \frac{(1-m)^2}{(1+m)(3m-1)} \right].$$

Таким образом, получено аналитическое выражение для предельной нагрузки кинематически возможного решения. Существенным отличием от подобной задачи с критерием пластичности Губера–Мизеса является условие (2.7) возможности построения решения только с логарифмическими деформируемыми областями. В полученное условие входит угол между характеристиками φ , который выражается в силу (1.9) через параметр C . Таким образом, вид решения зависит не только параметров геометрии R и h , но и от параметра C определяемого свойствами материала.

3. Численное решение задач с использованием упругопластической модели материала

Приведенные выше решения получены в предположении, что материал жесткопластический. Оценить погрешность такого подхода довольно трудно. Для анализа и проверки справедливости такой схемы решения необходимы соответствующие экспериментальные исследования или получение решений соответствующих упругопластических задач.

С этой целью проведен численный расчет с использованием упругопластической модели. Расчет производился в конечно-элементной системе

ABAQUS, в рамках которой была разработана специальная подпрограмма для описания упругопластического поведения материала с критерием пластичности, представленным формулами (1.1), (1.2).

В качестве примера расчета зададимся следующими свойствами:

$$E = 200000, \quad \nu = 0.3.$$

Конечно-элементная программа ABAQUS всегда работает в безразмерных величинах, выбор единиц измерения для модуля Юнга автоматически определяет единицы измерения для результатов и моделируемой геометрии. Можно считать, что упругий модуль и предел текучести задаются в единичных напряжениях. В данном случае параметр k не является постоянным, а представляет собой функцию параметра упрочнения, в качестве которого использовалась эквивалентная пластическая деформация $\epsilon^{\text{pl}} = \int \sqrt{\epsilon_{ij}^{\text{pl}} \epsilon_{ij}^{\text{pl}}} dt$. Зависимость от упрочнения представлялась в виде кусочно-линейной функции, проходящей через точки

$$k(0.00000) = 200, \quad k(9.0/10^4) = 220, \quad k(2.2/10^3) = 225. \quad (3.1)$$

3.1. Растяжение полосы с круговым отверстием

Рассмотрим сначала задачу о растяжении полосы с отверстием. В расчетах были приняты следующие геометрические параметры: радиус отверстия $R = 1$, половина ширины полосы $h = 2$.

Результаты расчетов продемонстрировали существенное отличие вида пластических областей в предельном пластическом состоянии от предложенных в аналитическом решении. Тем не менее, значения предельной нагрузки для численного и аналитического решений дали близкие результаты для всего диапазона изменения параметра C , отклонение не превосходило 4%.

3.2. Растяжение полосы с вырезами с круглым основанием

Для численного моделирования задачи о растяжении полосы, ослабленной вырезами с круглым основанием, зададимся теми же свойствами материала, что и в предыдущем примере. Параметры геометрии выберем следующие: радиус отверстия $R = 1$, половина ширины минимального сечения полосы $h = 1$. При выборе таких значений для радиуса выреза и ширины полосы условие (2.7) выполняется.

Полученные результаты демонстрируют, что при больших значениях параметра $C > 0,5$ пластическая область численного решения схожа с предложенной в аналитическом решении. При малых же значениях C в центре сечения растягиваемой полосы сохраняется упругая область вплоть до достижения предельного состояния, то есть форма пластической области существенно отлична от области логарифмических спиралей, предложенных в аналитическом решении. Значения предельных нагрузок, получен-

ных при помощи жесткопластической схемы решения и при учете упругих деформаций, достаточно близки, отклонение не превосходит 9%. Полученные результаты свидетельствуют о том, что предложенное аналитическое решение, являясь кинематически возможным, достаточно хорошо приближает значения предельной нагрузки для всего рассмотренного диапазона значений параметра C .

Таким образом, был продемонстрирован подход, позволяющий анализировать пластическое деформирование дилатирующей среды в зависимости от реализуемого в ней вида напряженного состояния. В качестве примеров были рассмотрены задачи о растяжении полос с надрезами в условиях плоской деформации. Проведено сравнение результатов аналитических решений, построенных посредством анализа предельного состояния, с результатами численных расчетов. Несмотря на то, что кинематика упруго-пластических численных решений может существенно отличаться от аналитических жесткопластических решений, значения предельных нагрузок достаточно близки, что подтверждает справедливость выводов теорем об оценке значений предельной нагрузки [2]. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-01-00416).

Литература

- [1] Ломакин, Е.В. Пластическое течение дилатирующей среды в условиях плоской деформации / Е.В. Ломакин // Изв. РАН. – Мех. тверд. тела. – 2000. – №6. – С. 58–68.
- [2] Качанов, Л.М. Основы теории пластичности / Л.М. Качанов. – М.: Наука, 1969.
- [3] Ковардакова, А.Ю. Пластическое течение при изгибе полос из материала чувствительного к виду напряженного состояния / А.Ю. Ковардакова, Е.В. Ломакин // Изв. РАН. – Мех. тверд. тела. – 1994. – №5. – С. 102–112.
- [4] Aravas, N. On the Numerical Integration of a Class of Pressure-Dependent Plasticity Models / N. Aravas // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1987. – V. 24. – P. 1395–1416.

Поступила в редакцию 31/VIII/2006;
в окончательном варианте — 31/VIII/2006.

TENSION OF STRIPES OF DILATANT MATERIAL³

© 2006 B.N.Fedulov⁴

The paper is devoted to analysis of a limit plastic state of stripes under tension loading taking into account dilatancy and stress type dependency of media.

Paper received 31/*VIII*/2006.

Paper accepted 31/*VIII*/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. Y.N.Radayev.

⁴Fedulov Boris Nickitovich (Fedulov.B@mail.ru), Dept. of Plasticity Theory, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119992, Russia.