УДК 539.374

О ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ СВЯЗАННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА РЕБРЕ ПРИЗМЫ КУЛОНА–ТРЕСКА[1]

© 2006 Н.А. Курнышева[2]

Рассматриваются пространственные кинематические уравнения связанного состояния жесткопластического тела с рассеянным анизотропным полем микроповреждений, соответствующего ребру призмы Кулона–Треска. Анизотропная поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга, главные оси которого совпадают с главными осями тензора напряжений. Проанализирована система трехмерных кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно главных приращений пластических деформаций и приращений перемещений. Показано, что система основных кинематических соотношений является правильно определенной и принадлежит к гиперболическому типу. Обобщено понятие конуса Ивлева на случай связанных пространственных состояний.

Введение

В представляемой работе рассматриваются пространственные кинематические уравнения связанной задачи математической теории пластичности. Связанная постановка необходима в механике деформируемого твердого тела для того, чтобы учесть искажение пластического течения анизотропным полем микроповреждений и одновременно возрастание повреждений в процессе накопления пластических деформаций. Подход к анализу кинематических уравнений связанной задачи с помощью изостатической координатной сетки впервые был предложен в работе [1]. Важным представляется учет анизотропии распределения поврежденности в основных уравнениях математической теории пластичности. Целью работы являются анализ кинематических уравнений связанной задачи теории пластичности и анизотропной

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Курнышева Наталья Александровна (knatalyasamgu@mail.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

поврежденности, указание случаев их гиперболичности и обобщение понятия конуса характеристических направлений, известного из теории идеальной пластичности, на случай пространственных связанных состояний.

Под поврежденностью понимается сокращение обратимого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микроповреждений. Сокращение эффективной площади при пластическом течении сопровождается сдвиговым скольжением, приводящим к микрошейкообразованию.

В рамках математической модели поврежденность, как правило, представляется специальной тензорной переменной — тензором поврежденности **D**. Тензорная мера анизотропной поврежденности является мерой сокращения, вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку площади двумерного элемента тела в зависимости от его ориентации. В [2, 3] тензорная мера анизотропной поврежденности вводится как симметричный тензор второго ранга. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью использованных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности **D** имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения D_j (главные поврежденности). В дальнейшем, следуя [3], будет предполагаться, что ортонормированный базис тензора поврежденности ориентирован точно так же, как и базис из собственных векторов тензора напряжений **l**, **m**, **n**.

1. Трехмерные соотношения Коши в триортогональной координатной сетке

Вывод трехмерных соотношений Коши в триортогональной координатной сетке был рассмотрен в работе [4]. Соотношения Коши связывают тензор приращений полных деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}$ с вектором приращений перемещений $d\mathbf{u}$. Данные соотношения являются базовыми не только для анализа кинематических уравнений теории пластичности, но и для всей механики деформируемого твердого тела. В принципе все соотношения данного раздела статьи справедливы для любой триортогональной системы координат, но нас преимущественно будет интересовать изостатическая система координат, координатные линии которой совпадают с траекториями главных нормальных напряжений.

Соотношения Коши, записанные для приращений перемещений, имеют форму

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}} . \qquad (1.1)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса в пространстве **l**, **m**, **n**

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{<1>} + \mathbf{m}du_{<2>} + \mathbf{n}du_{<3>}. \tag{1.2}$$

Здесь величины $du_{<j>}$ не являются действительными приращениями, а являются физическими компонентами вектора перемещений $d\mathbf{u}$ в базисе **l**, **m**, **n**. Здесь и далее треугольные скобки указывают на физические компоненты векторных и тензорных величин.

Трехмерный оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, в триортогональной системе координат есть

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial\xi^3}, \tag{1.3}$$

где ξ^1, ξ^2, ξ^3 — криволинейная триортогональная координатная система; $h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ (по α не суммировать) — параметры Ламе.

Градиент приращений перемещений $\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} = \mathbf{l}\otimes\boldsymbol{\nabla}du_{<1>} + \mathbf{m}\otimes\boldsymbol{\nabla}du_{<2>} + \mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\nabla}du_{<3>} +\\ + (du_{<1>})\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{l} + (du_{<2>})\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{m} + (du_{<3>})\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Ясно, что справедливы равенства

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}du_{<1>} &= \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^3},\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<2>} &= \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^3},\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<3>} &= \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial du_{<3>}}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial du_{<3>}}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial du_{<3>}}{\partial\xi^3}\end{aligned} \tag{1.5}$$

или

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}du_{<1>} &= \mathbf{l}(d_1du_{<1>}) + \mathbf{m}(d_2du_{<1>}) + \mathbf{n}(d_3du_{<1>}),\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<2>} &= \mathbf{l}(d_1du_{<2>}) + \mathbf{m}(d_2du_{<2>}) + \mathbf{n}(d_3du_{<2>}),\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<1>} &= \mathbf{l}(d_1du_{<3>}) + \mathbf{m}(d_2du_{<3>}) + \mathbf{n}(d_3du_{<3>}),\end{aligned} \tag{1.6}$$

где $d_k \equiv \dfrac{1}{h_k}\dfrac{\partial}{\partial\xi^k}$ (по k не суммировать $(k = 1,2,3)$) — производная по направлению изостатической траектории с номером k:

$$d_1 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l},\quad d_2 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{m},\quad d_3 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}.$$

Используя далее выражения для производных от единичных базисных векторов **l**, **m**, **n** по криволинейным координатам

$$\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\xi^1} = -(d_2h_1)\mathbf{m} - (d_3h_1)\mathbf{n},\quad \frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\xi^2} = (d_1h_2)\mathbf{m},\quad \frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\xi^3} = (d_1h_3)\mathbf{n}, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\xi^1} = (d_2h_1)\mathbf{l},\quad \frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\xi^2} = -(d_1h_2)\mathbf{l} - (d_3h_2)\mathbf{n},\quad \frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\xi^3} = (d_2h_3)\mathbf{n}, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^1} = (d_3 h_1)\mathbf{l}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^2} = (d_3 h_2)\mathbf{m}, \quad \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^3} = -(d_1 h_3)\mathbf{l} - (d_2 h_3)\mathbf{m}, \tag{1.9}$$

приходим к следующим формулам для градиентов базисных векторов:

$$\begin{aligned}
\nabla\otimes\mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1}(d_2h_1)\,\mathbf{l}\otimes\mathbf{m} - \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\,\mathbf{l}\otimes\mathbf{n} + \\
&\qquad + \frac{1}{h_2}(d_1h_2)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} + \frac{1}{h_3}(d_1h_3)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \\
\nabla\otimes\mathbf{m} &= \frac{1}{h_1}(d_2h_1)\,\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{l} - \\
&\qquad - \frac{1}{h_2}(d_3h_2)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{n} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \\
\nabla\otimes\mathbf{n} &= \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m} - \\
&\qquad - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)\mathbf{n}\otimes\mathbf{l} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Используя (1.6) и (1.10), выражение для градиента приращений перемещений (1.4) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\nabla\otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}\left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>} + d_1du_{<1>}\right] + \\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>} + d_2du_{<2>}\right] + \\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>} + d_3du_{<3>}\right] + \\
&+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>} + d_2du_{<1>}\right] + \\
&+\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>} + d_3du_{<1>}\right] + \\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>} + d_1du_{<2>}\right] + \\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>} + d_3du_{<2>}\right] + \\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>} + d_1du_{<3>}\right] + \\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>} + d_2du_{<3>}\right].
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Транспонировав уравнение (1.11), получаем

$$
\begin{aligned}
(\nabla\otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}&\left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>} + d_1du_{<1>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>} + d_2du_{<2>}\right]+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>} + d_3du_{<3>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>} + d_2du_{<1>}\right]+\\
+\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}&\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>} + d_3du_{<1>}\right]+\\
&+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>} + d_1du_{<2>}\right]+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>} + d_3du_{<2>}\right]+\\
+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}&\left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>} + d_1du_{<3>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>} + d_2du_{<3>}\right].
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Подставляя выражения (1.11) и (1.12) в соотношения Коши (1.1), получим следующее выражение для тензора приращений полных деформаций:

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}&\left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>} + d_1du_{<1>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>} + d_2du_{<2>}\right]+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>} + d_3du_{<3>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}&\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>} + d_2du_{<1>} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>} + d_1du_{<2>}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>} + d_3du_{<1>} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>} + d_1du_{<3>}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>} + d_2du_{<1>} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>} + d_1du_{<2>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}&\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>} + d_3du_{<2>} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>} + d_2du_{<3>}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>} + d_3du_{<1>} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>} + d_1du_{<3>}\right]+\\
&+\frac{1}{2}\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>} + d_3du_{<2>} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>} + d_2du_{<3>}\right].
\end{aligned}
$$

Тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}$ симметричен, что, впрочем, заранее очевидно.

Преобразуем последнюю формулу, вводя нормальные кривизны[3] соглас-

[3]В приведенных ниже формулах κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i, причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению.

но

$$\begin{aligned} d_1h_3 &= h_3\kappa_{32}, \qquad & d_2h_3 &= h_3\kappa_{31}, \qquad & d_3h_2 &= h_2\kappa_{21}, \\ d_1h_2 &= h_2\kappa_{23}, & d_2h_1 &= h_1\kappa_{13}, & d_3h_1 &= h_1\kappa_{12}. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Кроме того, в приближении жесткопластического анализа мы пренебрегаем упругими деформациями: $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, т.е. тензор приращений полных деформаций совпадает с тензором приращений пластических деформаций. В итоге получим следующие соотношения:

$$d\varepsilon^P_{<11>} = \kappa_{13}du_{<2>} + \kappa_{12}du_{<3>} + d_1du_{<1>}, \tag{1.14}$$

$$d\varepsilon^P_{<22>} = \kappa_{23}du_{<1>} + \kappa_{21}du_{<3>} + d_2du_{<2>}, \tag{1.15}$$

$$d\varepsilon^P_{<33>} = \kappa_{32}du_{<1>} + \kappa_{31}du_{<2>} + d_3du_{<3>}, \tag{1.16}$$

$$d\varepsilon^P_{<12>} = -\kappa_{13}du_{<1>} - \kappa_{23}du_{<2>} + d_2du_{<1>} + d_1du_{<2>}, \tag{1.17}$$

$$d\varepsilon^P_{<13>} = -\kappa_{12}du_{<1>} - \kappa_{32}du_{<3>} + d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>}, \tag{1.18}$$

$$d\varepsilon^P_{<23>} = -\kappa_{21}du_{<2>} - \kappa_{31}du_{<3>} + d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>}. \tag{1.19}$$

Напомним, что соотношения Коши в приращениях (1.14)–(1.19) справедливы для любой триортогональной криволинейной системы координат.

2. Обобщенный ассоциированный закон течения микроповрежденного тела

Полученных трехмерных соотношей Коши (1.14)–(1.19) недостаточно для анализа связанных кинематических уравнений теории пластичности. Для вывода связанных кинематических уравнений теории пластичности к соотношениям Коши необходимо добавить следствия, получаемые из обобщенного ассоциированного закона течения микроповрежденного тела.

Мы сохраним традиционную форму ассоциированного с условием пластичности

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{2.1}$$

закона течения тела с микроповреждениями.

Заменяя в (2.1) σ_j на эквивалентные главные напряжения $\sigma^э_j$, согласно соотношению

$$\sigma^э_j = \frac{\sigma_j}{1 - D_j} \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}),$$

получим обобщенное условие пластичности

$$f(\sigma^э_1, \sigma^э_2, \sigma^э_3) = 0.$$

Обобщенный ассоциированный закон течения тела с микроповреждениями примем в виде

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\Lambda,$$

откуда следуют соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, а также три соотношения в главных осях

$$d\varepsilon_j^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\Lambda,$$

где пластический потенциал f зависит от $\sigma_j^э$.

Для напряженного состояния, соответствующего ребру обобщенной призмы Кулона–Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялись равенства (мы ограничились выбором положительного знака):

$$\frac{\sigma_1}{1-D_1} - \frac{\sigma_3}{1-D_3} = 2k, \quad \frac{\sigma_2}{1-D_2} - \frac{\sigma_3}{1-D_3} = 2k. \tag{2.2}$$

Согласно ассоциированному закону течения, определяющие зависимости для ребра (2.2) есть

$$d\varepsilon_1^P = \frac{d\Lambda_1}{1-D_1}, \quad d\varepsilon_2^P = \frac{d\Lambda_2}{1-D_2}, \quad d\varepsilon_3^P = -\frac{d\Lambda_1}{1-D_3} - \frac{d\Lambda_2}{1-D_3}. \tag{2.3}$$

Из (2.3) следует обобщенное условие несжимаемости[4] для микроповрежденного тела

$$-d\varepsilon_3^P = (\beta_1 - 1)d\varepsilon_1^P + (\beta_2 - 1)d\varepsilon_2^P, \tag{2.4}$$

где

$$\beta_1 - 1 = \frac{1-D_1}{1-D_3}, \quad \beta_2 - 1 = \frac{1-D_2}{1-D_3}.$$

Таким образом, из ассоциированного закона течения следуют соосность тензора приращений пластических деформаций и тензора напряжений, а также обобщенное условие несжимаемости (2.4). Мы воспользуемся данными следствиями для получения правильно определенной кинематической системы связанной задачи теории пластичности.

3. О гиперболичности трехмерных кинематических соотношений связанной задачи

При течении на ребре обобщенной призмы Кулона–Треска два главных напряжения равны $\sigma_1 = \sigma_2$. Предположим, что $D_1 = D_2$, в этом случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ и $\sigma_1^э = \sigma_2^э$. Тогда любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным направлением. В этом случае при определении собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ существует известный произвол, поскольку собственные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ определяются с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, следовательно, $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$, вообще говоря, могут и не быть собственными векторами тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, т.е. $d\varepsilon_{<12>}^P \neq 0$.

[4]Мы сохраняем термин *несжимаемость*, хотя данное условие, по существу, является условием сжимаемости.

Из обобщенного ассоциированного закона течения на ребре обобщенной призмы Кулона–Треска, таким образом, можно вывести обобщенное условие несжимаемости и лишь тот факт, что **n** есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, т.е. следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&(\beta-1)\left(d\varepsilon^P_{<11>}+d\varepsilon^P_{<22>}\right)+d\varepsilon^P_3=0,\\
&d\varepsilon^P_{<13>}=0,\\
&d\varepsilon^P_{<23>}=0.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

Осуществляя подстановку выражений для $d\varepsilon^P_{<11>}$, $d\varepsilon^P_{<22>}$, $d\varepsilon^P_3$, $d\varepsilon^P_{<13>}$ и $d\varepsilon^P_{<23>}$, согласно формулам (1.14)–(1.19) в систему (3.1), приходим к системе кинематических уравнений

$$\begin{aligned}
&(\beta-1)\,(\kappa_{13}du_{<2>}+\kappa_{12}du_{<3>}+d_1du_{<1>}+\\
&\qquad+\kappa_{23}du_{<1>}+\kappa_{21}du_{<3>}+d_2du_{<2>})+\\
&\qquad\qquad+\kappa_{32}du_{<1>}+\kappa_{31}du_{<2>}+d_3du_{<3>}=0,\\
&-\kappa_{12}du_{<1>}-\kappa_{32}du_{<3>}+d_3du_{<1>}+d_1du_{<3>}=0,\\
&\qquad-\kappa_{21}du_{<2>}-\kappa_{31}du_{<3>}+d_3du_{<2>}+d_2du_{<3>}=0.
\end{aligned}\tag{3.2}$$

Данная система правильно определена: для нахождения трех неизвестных $du_{<1>}$, $du_{<2>}$, $du_{<3>}$ имеется ровно три уравнения. Система (3.2) является квазилинейной системой уравнений в частных производных первого порядка; для определения ее характеристик запишем характеристическое уравнение

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
(\beta-1)N_{<1>} & (\beta-1)N_{<2>} & N_{<3>}\\
N_{<3>} & 0 & N_{<1>}\\
0 & N_{<3>} & N_{<2>}
\end{vmatrix}=\\
&\qquad=N_{<3>}\left(N^2_{<3>}-(\beta-1)(N^2_{<1>}+N^2_{<2>})\right)=0,
\end{aligned}\tag{3.3}$$

которое, очевидно, имеет три различных вещественных корня:

$$N_{<3>}=0,\quad N_{<3>}=\pm\sqrt{(\beta-1)}\sqrt{N^2_{<1>}+N^2_{<2>}}.\tag{3.4}$$

Учитывая также условие нормировки

$$N^2_{<1>}+N^2_{<2>}+N^2_{<3>}=1,\tag{3.5}$$

соотношения (3.4) можно представить в виде

$$N_{<3>}=0,\quad N_{<3>}=\pm\sqrt{\frac{\beta-1}{\beta}}.\tag{3.6}$$

Тем самым конус характеристических направлений, известный из теории идеальной пластичности, обобщается на случай связанного состояния, когда $D_1=D_2$: единичный вектор **N**, ортогональный характеристикам, соответствующий первому корню характеристического уравнения, перпендикулярен вектору **n**, а двум другим корням соответствует вектор **N**, расположенный на круговом конусе с углом полураствора α (равным углу между вектором нормали **N** и вектором **n**):

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{\beta - 1}{\beta}}.$$

Следует также заметить, что в случае идеально пластического течения на ребре призмы Треска

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Литература

[1] Радаев, Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности: учеб. пособие / Ю.Н. Радаев. – Самара: Издательство "Самарский университет", 2004. – 142 с.

[2] Мураками, С. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности / С. Мураками, Ю.Н. Радаев // Изв. РАН. – Мех. тверд. тела. – 1996. – №4. – С. 93–110.

[3] Радаев, Ю.Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 1998. – №2(8). – С. 79–105.

[4] Радаев, Ю.Н. О гиперболичности связанных уравнений математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев, Н.А. Курнышева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – 2005. – №6(40). – С. 89–112.

Поступила в редакцию 15/*VIII*/2006;
в окончательном варианте — 15/*VIII*/2006.

ON HYPERBOLIC PROPERTY OF THE THREE–DIMENSIONAL COUPLED KINEMATIC EQUATIONS FOR AN EDGE OF THE TRESCA PRISM[5]

© 2005 N.A. Kurnysheva[6]

In the present study the three-dimensional kinematic equations for coupled (plastic strain–damage) states of rigid-plastic solid with distributed anisotropic microdamages are obtained. Anisotropic damage is represented by a symmetric second-rank damage tensor. The principle axes of the damage tensor are assumed to coincide with principle axes of the Cauchy stress tensor. The system of the three-dimensional kinematic equations in their incremental forms is then analysed by isostatic coordinate net. The system is shown belong to hyperbolic type, thus allowing to generalize cone of characteristic directions for coupled states.

Paper received 15/ *VIII*/2006.
Paper accepted 15/ *VIII*/2006.

[5]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. Y.N. Radayev.

[6]Kurnysheva Nataliya Aleksandrovna (knatalyasamgu@mail.ru) Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.