УДК 539.374

О КИНЕМАТИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ПЛАСТИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ НА ГРАНИ И РЕБРЕ ПРИЗМЫ КУЛОНА–ТРЕСКА

© 2006 Ю.Н. Радаев[1]

Приводится вывод правильно определенной системы уравнений, описывающей кинематику пространственного пластического течения на ребре призмы Кулона—Треска, и дано исследование основных кинематических уравнений (включая пространственные соотношения Коши и уравнения совместности для приращений деформаций) с помощью триортогональной изостатической системы координат. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Выводятся соотношения для приращений перемещений вдоль линий главных напряжений, обобщающие известные соотношения Гейрингер. Отдельно рассматриваются кинематические соотношения для случаев плоского деформированного и осесимметричного состояний.

Введение

Проблема поиска такой математической теории идеальной пластичности, которая приводила бы в зоне пластического течения к соотношениям гиперболического типа для произвольных пространственных состояний, попрежнему сохраняет свою актуальность, поскольку при использовании условий пластичности, отличных от условия пластичности Кулона—Треска, для подавляющего большинства пространственных состояний уравнения теории идеальной пластичности не имеют вещественных характеристических направлений. Так, пространственная задача математической теории пластичности в общем случае при условии пластичности Мизеса (R. von Mises) и ассоциированным с ним законом течения является статически неопределимой, и, кроме того, уравнения пространственной задачи не гиперболичны.

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Точнее говоря, уравнения пространственной задачи либо полностью эллиптичны (т.е. не существует действительных характеристических направлений), либо (если в рассматриваемой точке медианная скорость пластической деформации равна нулю) имеется только два характеристических направления, ортогональных площадкам максимального и минимального касательных напряжений. Все это свидетельствует о том, что в подавляющем большинстве пространственных состояний, описываемых согласно условию пластичности Мизеса и ассоциированному с ним закону течения, действительные характеристики отсутствуют. Не спасает положения учет упругих деформаций. Фактор упрочнения в принципе гарантирует эллиптичность уравнений. Аналогичное заключение остается справедливым и для теории малых упругопластических деформаций, и для редко применяемых в настоящее время неассоциированных законов пластического течения. После осмысления всех этих результатов в отчетливой форме и был сформулирован вопрос: *найти такие определяющие зависимости, чтобы в области пластического течения всегда существовали, по меньшей мере, два семейства характеристических поверхностей, получив тем самым пространственные уравнения теории идеальной пластичности, адекватно описывающие скольжение.*

Подытоживая почти полувековую дискуссию по указанной проблематике, можно сказать, что предельные состояния идеально пластических тел должны описываться статически определимыми уравнениями гиперболического типа. Именно такое положение дел имеет место в пространственной задаче теории идеальной пластичности при использовании критерия текучести Кулона—Треска. Здесь уравнения пластического равновесия в ряде важных случаев становятся статически определимыми и гиперболическими. Основополагающими работами этого важнейшего направления современной теории пластичности выступают статьи Д.Д. Ивлева [1, 2]. В монографии [3] с помощью изостатической координатной сетки были исследованы основные соотношения пространственной задачи математической теории пластичности для течения на ребре призмы Кулона—Треска.

Целью представляемой работы являются вывод правильно определенной системы уравнений, описывающей кинематику пространственного пластического течения на ребре призмы Кулона—Треска, и исследование кинематических уравнений с помощью триортогональной изостатической системы координат.

В первом разделе статьи рассматриваются трехмерные уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру условия текучести Кулона—Треска, дается их классификация и с помощью геометрических условий совместности Адамара—Томаса определяются характеристические направления. Здесь же выводится ряд замечательных инвариантных форм указанных уравнений. Во втором разделе исследуются уравнения обобщенного ассоциированного закона течения на ребре призмы Кулона—Треска и основные соотношения для приращений перемещений, следующие из него. Устанавливаются правильная определенность и гиперболичность системы уравнений для приращений перемещений и находятся ее характеристические направления. Затем (см. раздел **3** представляемой работы) анализируются уравнения математической теории пластичности для грани призмы Кулона—Треска и доказывается, что задача для приращений перемещений является неправильно определенной: *три* компоненты приращения вектора перемещений должны удовлетворять *пяти* независимым уравнениям. В следующем разделе работы выводятся пространственные соотношения Коши в приращениях относительно триортогональной изостатической координатной сетки. Триортогональная изостатическая координатная сетка характеризуется тем, что ее координатные линии суть взаимно ортогональные траектории главных напряжений. В тех случаях, когда указанная координатная сетка существует, оказывается наиболее естественным рассматривать те или иные тензорные уравнения относительно именно таких криволинейных координат. Кинематические соотношения для пространственного пластического течения исследуются в разделе **5** с помощью изостатических координат. Далее (раздел **6**) приводятся уравнения совместности для приращений деформаций. Заканчивается работа выводом кинематических соотношений для случаев плоского деформированного и осесимметричного состояний (разделы **7** и **8**).

1. Уравнения равновесия для состояний, соответствующих ребру призмы Кулона–Треска

Условие текучести Треска или условие максимального касательного напряжения имеет следующий вид:

$$\max\{|\sigma_1-\sigma_2|,\,|\sigma_1-\sigma_3|,\,|\sigma_2-\sigma_3|\}=Y, \tag{1.1}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — собственные значения тензора напряжений (главные нормальные напряжения); Y — предел текучести при одноосном растяжении. Величины

$$\tau_1=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\quad \tau_2=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2},\quad \tau_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

называются главными касательными напряжениями и представляют собой экстремальные значения касательных напряжений для всех возможных площадок, проходящих через заданную точку. Пространственное напряженное состояние в данной точке весьма просто анализируется с помощью графического метода Мора (O. Mohr), который дает также простую схему для определения величины нормального и касательного напряжения в зависимости от ориентации площадки в пространстве[2].

[2]См., например: Ильюшин А.А. Пластичность. Часть 1. Упругопластические деформации / А.А. Ильюшин. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948. 376 с.

Условие текучести Треска устанавливает, что величина Y связана с величиной k (пределом текучести при чистом сдвиге) простым соотношением $Y = 2k$.

Уравнение призмы Кулона—Треска (1.1), очевидно, можно также представить в форме

$$\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - Y^2\right]\left[(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - Y^2\right]\left[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - Y^2\right] = 0. \tag{1.2}$$

В пространстве главных напряжений поверхность текучести, определяемая уравнением (1.1), представляет собой правильную шестигранную призму (призма Кулона—Треска), ось которой равнонаклонена к декартовым осям этого пространства. Кривая текучести (сечение призмы Кулона—Треска девиаторной плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$) представляет собой правильный шестиугольник с центром в начале координат и стороной, равной $\sqrt{2/3}Y$.

Рассмотрим уравнения равновесия для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска. Обозначим через $\boldsymbol{\sigma}$ тензор напряжений; $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ — ортонормированный базис из собственных векторов тензора напряжений.

Спектральное разложение тензора напряжений имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}. \tag{1.3}$$

В пространстве главных напряжений ребра призмы Кулона—Треска определяются уравнениями

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3,\ \ \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3,\ \ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Для данного напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

Последнее условие означает, что два главных напряжения равны по величине, а главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Сделаем одно существенное для всего дальнейшего изложения замечание. Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным. Ясно поэтому, что при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска имеется известная доля произвола при выборе собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$). Их преимущественное положение в упомянутой плоскости может быть указано только после анализа тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, который в силу ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и обладает, вообще говоря, уникальным триэдром главных направлений. Все эти вопросы будут затронуты ниже, в разделе **2**.

Так как **l**, **m**, **n** — ортонормированный базис, то

$$\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}=\mathbf{I}, \tag{1.4}$$

где **I** — единичный тензор.

Учитывая (1.3), (1.4) и уравнение ребра призмы Кулона—Треска $\sigma_1 = = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$, получим

$$\boldsymbol{\sigma}=(\sigma_3 \pm 2k)\mathbf{I}\mp 2k\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}. \tag{1.5}$$

Таким образом, тензор напряжений определяется скалярным полем σ_3 и единичным векторным полем **n**.

Уравнение равновесия $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$ после подстановки в него разложения (1.5) можно представить в следующем виде:

$$\mathrm{grad}\sigma_3 \mp 2k\,\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=\mathbf{0}\quad(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1). \tag{1.6}$$

Следовательно, задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Кулона—Треска, формально статически определима (поскольку имеется ровно три уравнения для определения трех неизвестных: собственного значения σ_3 и, например, двух углов, задающих ориентацию единичного вектора **n**), если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть рассмотрены независимо от кинематических уравнений.

Обозначим через Σ безразмерное отношение σ_3 к $\mp 2k$ и приведем уравнение (1.6) к виду:

$$\mathrm{grad}\Sigma+\mathrm{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})=\mathbf{0}\quad(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1). \tag{1.7}$$

В декартовых координатах векторное уравнение (1.7) эквивалентно системе трех скалярных уравнений $(i,k=1,2,3)$:

$$\frac{\partial\Sigma}{\partial x_i}+n_k\frac{\partial n_i}{\partial x_k}+n_i\frac{\partial n_k}{\partial x_k}=0\quad(n_k n_k=1).$$

Отметим также еще одну инвариантную форму уравнения (1.7):

$$\boldsymbol{\nabla}\Sigma+(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}+\mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})=\mathbf{0}, \tag{1.8}$$

где $\boldsymbol{\nabla}$ — пространственный оператор Гамильтона.

Для единичного векторного поля справедлива формула[3]

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}=-\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{n}, \tag{1.9}$$

с помощью которой векторное уравнение (1.8) может быть также представлено в виде

$$\boldsymbol{\nabla}\Sigma-\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{n}+\mathbf{n}\mathrm{div}\mathbf{n}=\mathbf{0}. \tag{1.10}$$

[3]Приводимая ниже формула является прямым следствием тождества

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})=(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}+\mathbf{n}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{n}$$

и условия нормировки $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$.

Исследуем характеристики уравнения (1.10). Для этого будем трактовать характеристические поверхности уравнения (1.10) как поверхности слабого разрыва Σ и $\mathbf{n}$ и воспользуемся условиями совместности Адамара—Томаса [4]:

$$[\boldsymbol{\nabla}\Sigma] = B\mathbf{N}, \quad [\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{n}] = \mathbf{N}\otimes\mathbf{b}, \tag{1.11}$$

где [ ] обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва; $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва; B, $\mathbf{b}$ — некоторые поля, определенные на этой поверхности, причем равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно ни в какой точке поверхности, если рассматриваемая поверхность есть действительно поверхность слабого разрыва.

На основании уравнения (1.10) имеем:

$$[\boldsymbol{\nabla}\Sigma] - \mathbf{n}\times[\mathrm{rot}\,\mathbf{n}] + \mathbf{n}\,[\mathrm{div}\mathbf{n}] = \mathbf{0} \tag{1.12}$$

и, применяя условия совместности (1.11), получим

$$B\mathbf{N} - \mathbf{n}\times(\mathbf{N}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{1.13}$$

Кроме того, так как $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 1$, то $\mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{n})^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}$ и, следовательно, $(\mathbf{b}\cdot\cdot\mathbf{n})\mathbf{N} = \mathbf{0}$, что приводит к следующему соотношению на поверхности слабого разрыва:

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = 0. \tag{1.14}$$

Замечая, что

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{N}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{n}\cdot\mathbf{b})\mathbf{N} - (\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b}$$

и учитывая (1.14), уравнение (1.13) приводим к виду

$$B\mathbf{N} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b} + (\mathbf{N}\cdot\mathbf{b})\mathbf{n} = \mathbf{0}. \tag{1.15}$$

Умножим обе части этого уравнения скалярно на вектор $\mathbf{N}$:

$$B + 2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})(\mathbf{N}\cdot\mathbf{b}) = 0. \tag{1.16}$$

Умножая обе части уравнения (1.15) скалярно на вектор $\mathbf{n}$, получим также

$$B(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n}) + \mathbf{N}\cdot\mathbf{b} = 0. \tag{1.17}$$

Подставляя в это уравнение выражение для B, полученное с помощью предыдущего уравнения, находим, что

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{b})(1 - 2(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})^2) = 0. \tag{1.18}$$

Это уравнение распадается на два. Если $\mathbf{N}\cdot\mathbf{b} \neq 0$, то необходимо

$$\mathbf{N}\cdot\mathbf{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{1.19}$$

Если $\mathbf{N}\cdot\mathbf{b} = 0$, то на основании (1.16) $B = 0$, и тогда уравнение (1.15) дает

$$(\mathbf{N}\cdot\mathbf{n})\mathbf{b} = \mathbf{0},$$

откуда в силу того, что равенства $B = 0$ и $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ не могут выполняться одновременно,

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{1.20}$$

Итак, уравнение (1.10) принадлежит к гиперболическому типу. Нормали к характеристическим поверхностям в силу (1.19) образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Ясно, что характеристические поверхности являются также и поверхностями максимального касательного напряжения (поверхностями скольжения). Характеристическими являются не только поверхности скольжения, но и, согласно (1.20), интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля $\mathbf{n}$).

2. Уравнения обобщенного ассоциированного закона течения на ребре призмы Кулона–Треска и соотношения для приращений перемещений

Ассоциированный закон течения является фундаментальным принципом математической теории пластичности и устанавливает, что в пространстве напряжений вектор, представляющий тензор приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, ортогонален регулярной поверхности текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ в данном напряженном состоянии $\boldsymbol{\sigma}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda. \tag{2.1}$$

Величина $d\lambda$, называемая неопределенным множителем, положительна при активном пластическом нагружении, признаком которого является выполнение условий $f = 0$, $df = 0$. Следует отметить, что множитель $d\lambda$ не может быть вычислен через определяющие функции, и его значение должно вычисляться в процессе решения краевой задачи.

Для изотропного тела критерий текучести $f(\boldsymbol{\sigma}) = 0$ связывает некоторой зависимостью главные нормальные напряжения

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

причем функция текучести f на самом деле зависит от трех независимых симметрических комбинаций главных нормальных напряжений; в качестве таковых могут быть выбраны линейная, квадратичная и кубическая симметрические формы главных нормальных напряжений.

Ассоциированный закон течения (2.1) для изотропного тела устанавливает соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$. В главных осях тензора напряжений ассоциированный закон течения изотропного тела (2.1) имеет следующий вид:

$$d\varepsilon_j^P = \frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\lambda, \tag{2.2}$$

где здесь и в дальнейшем $d\varepsilon_j^P$ — собственные значения тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, которые, вообще говоря, отличаются от *приращений* собственных значений ε_j^P тензора пластических деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}^P$. С учетом этого замечания спектральное разложение тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ представляется как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\varepsilon_1^P + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\varepsilon_2^P + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\varepsilon_3^P.$$

Для изотропного тела в силу указанной выше формы критерия текучести и ассоциированного закона течения наиболее удобно геометрическое представление основных соотношений в трехмерном пространстве главных напряжений Хэя—Вестергарда.

Ассоциированный закон течения однозначно определяет направление вектора, представляющего приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, только в регулярных точках поверхности текучести. Если напряженное состояние соответствует ребру (угловой точке) или конической особенности на поверхности текучести, то необходимы дальнейшие предположения для вывода корректного определяющего закона. Обобщение ассоциированного закона на случай поверхности текучести с угловой точкой предложено Койтером (W.T. Koiter, 1953 г.). Это обобщение основано на следующем принципе суперпозиции: особые точки поверхности текучести представляются как пересечение конечного числа p гладких поверхностей текучести $f_\gamma(\boldsymbol{\sigma}) = 0$.

Активное нагружение, сопровождающееся изменением пластических деформаций, определяется условиями

$$\begin{aligned} &f_\omega = 0, \quad df_\omega = 0, \\ &f_\kappa = 0, \quad df_\kappa < 0 \text{ или } f_\kappa < 0, \end{aligned}$$

где индексы ω и κ различны, и их значения в совокупности исчерпывают все значения индекса $\gamma = 1, 2, ..., p$, причем индекс ω пробегает непустое множество значений.

Полное приращение $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ есть сумма соответствующих всем индексам ω приращений $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)}$:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_\omega d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)},$$

где каждое приращение $d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)}$ вычисляется согласно ассоциированному закону течения

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^{P(\omega)} = \frac{\partial f_\omega}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\omega,$$

а величины $d\lambda_\omega$ должны быть положительными.

Окончательно обобщенный ассоциированный закон течения принимает следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \sum_{\gamma=1}^{p} \frac{\partial f_\gamma}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda_\gamma, \\
&d\lambda_\gamma > 0 \quad (f_\gamma = 0,\ df_\gamma = 0), \\
&d\lambda_\gamma = 0 \quad (f_\gamma = 0,\ df_\gamma < 0 \text{ или } f_\gamma < 0).
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Его следствием является соосность тензоров $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ в изотропном теле.

Геометрически обобщенный ассоциированный закон течения устанавливает, что в угловой точке поверхности текучести вектор, представляющий приращения пластических деформаций в пространстве главных напряжений, является линейной комбинацией нормальных к поверхностям $f_\omega = 0$ в указанной точке векторов, причем направление указанного вектора в угловой точке поверхности нагружения обобщенным ассоциированным законом течения не фиксируется, а остается неопределенным.

Обратимся к уравнениям обобщенного ассоциированного закона течения, предполагая, что напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска так, что третье главное напряжение является максимальным: $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$. Обозначая, как было оговорено выше, через $d\varepsilon_j^P$ собственные значения тензора приращений пластических деформаций, соотношения обобщенного ассоциированного закона течения представим в главных осях напряжений в виде

$$
d\varepsilon_1^P = d\lambda_1,\ \ d\varepsilon_2^P = d\lambda_2,\ \ d\varepsilon_3^P = -d\lambda_1 - d\lambda_2,
\tag{2.4}
$$

где $d\lambda_\beta$ — неопределенные множители теории идеальной пластичности.

Равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным. При соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска имеется неопределенность в ориентации собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ (они определены с точностью до поворота в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$). Разумеется их преимущественное положение в упомянутой плоскости указывается триэдром главных направлений тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, который в силу обобщенного ассоциированного закона течения должен быть соосен тензору напряжений $\boldsymbol{\sigma}$. При этом тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ обладает уникальным триэдром главных направлений, поскольку, вообще говоря, $d\varepsilon_1 \neq d\varepsilon_2$.

Уравнения обобщенного ассоциированного закона течения, сформулированного для ребра призмы Треска, позволяют найти помимо условия соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ (да и то с точностью до поворота триэдра главных осей в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$) еще только одно существенное соотношение, следующее из (2.4), — условие несжимаемости:

$$
d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P + d\varepsilon_3^P = 0.
\tag{2.5}
$$

Его можно также представить в форме

$$
d\varepsilon_{jj}^P = 0
\tag{2.6}
$$

или в инвариантной прямой записи

$$\operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0. \tag{2.7}$$

Последнее обстоятельство имеет принципиально важное значение: для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Кулона—Треска, пластическое течение имеет наибольшую свободу, и именно поэтому возрастает вероятность построить решения ряда важнейших прикладных задач, привлекая схему полной пластичности Хаара—Кармана[4]. Ясно, что напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку при этом имеется весьма сильное кинематическое ограничение: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю[5].

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ в силу (1.3) может быть сформулировано как

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1^P + \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_2^P + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_3^P. \tag{2.8}$$

Здесь векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ уже выступают как собственные векторы тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и поэтому их ориентация в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, уникальна. Если тензор напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ соответствует ребру призмы Кулона—Треска и задан, то ориентация вектора $\mathbf{n}$ известна, а ориентации векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ неопределенны до тех пор, пока полностью не определены кинематические поля. Поэтому далее в кинематических уравнениях мы задействуем лишь вектор $\mathbf{n}$.

Соотношение (2.8) позволяет заключить, что

$$\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n}d\varepsilon_3^P,$$

или также

$$\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P\cdot\mathbf{n} = d\varepsilon_3^P$$

и кроме того (см. [5, с. 208])

$$\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n}\operatorname{tr}((\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P). \tag{2.9}$$

Полученное уравнение устанавливает лишь только тот факт, что вектор $\mathbf{n}$ — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Проектируя векторное уравнение (2.9) на оси некоторой прямоугольной системы координат x_1, x_2, x_3, можно получить три скалярных уравнения[6]

$$n_j d\varepsilon_{ij}^P = n_i n_k n_l d\varepsilon_{kl}^P. \tag{2.10}$$

Только два из них будут независимыми. Действительно, свернутые с n_i соотношения (2.10) удовлетворяются тождественно, что указывает на их линейную зависимость.

[4]Эта гипотеза принадлежит Д.Д. Ивлеву.

[5]Ниже, в следующем разделе статьи, приводится анализ общих соотношений математической теории идеальной пластичности для течения на грани призмы Кулона—Треска.

[6]См. также: Быковцев, Г.И. Избранные проблемные вопросы механики деформируемых сред: Сборник статей / Г.И. Быковцев. Владивосток: Дальнаука, 2002. – С. 153.

Два независимых уравнения из (2.10) вместе с уравнением несжимаемости (2.6) образуют систему из *трех* независимых уравнений

$$\begin{aligned} &d\varepsilon^P_{jj} = 0, \\ &n_j d\varepsilon^P_{ij} = n_i n_k n_l d\varepsilon^P_{kl}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

которые после подстановки в них вместо приращений пластических деформаций *трех* приращений перемещений согласно

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}} \tag{2.12}$$

или, переходя к прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3,

$$2d\varepsilon^P_{ij} = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

позволяют полностью исследовать кинематику пластического течения, если поле напряжений уже определено[7].

Система кинематических уравнений (2.11)

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0, \\ &\mathbf{n} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{n} \operatorname{tr}((\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P), \end{aligned} \tag{2.13}$$

описывающая идеально пластическое течение на ребре призмы Кулона—Треска, правильно определенная и гиперболическая[8]. Характеристические направления этой системы, как показывает несложный расчет, совпадают с характеристическими направлениями системы трехмерных статических уравнений.

Действительно, будем трактовать характеристические поверхности системы уравнений (2.13) как поверхности слабого разрыва приращений перемещений $d\mathbf{u}$ и воспользуемся геометрическаими условиями совместности Адамара—Томаса (см., например, [4]):

$$[\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a},$$

где [ ] обозначает скачок при переходе через поверхность слабого разрыва, $\mathbf{N}$ — единичный вектор нормали к поверхности слабого разрыва, $\mathbf{a}$ — некоторое ненулевое векторное поле, определенное на этой поверхности. На основании соотношений Коши

$$2\left[d\boldsymbol{\varepsilon}^P\right] = \mathbf{N} \otimes \mathbf{a} + \mathbf{a} \otimes \mathbf{N},$$

следовательно,

$$\operatorname{tr}(\left[d\boldsymbol{\varepsilon}^P\right]) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a}.$$

[7]Ниже, в разделе **5**, будет дан анализ кинематических уравнений в случае пространственного течения на ребре призмы Кулона—Треска в триортогональной криволинейной сетке линий главных напряжений.

[8]В следующем разделе работы будет установлено, что кинематические соотношения пространственной задачи для грани призмы Кулона—Треска не являются правильно определенными: *три* компоненты вектора приращения перемещений du_j должны удовлетворять *пяти* независимым уравнениям.

Учитывая полученные формулы, из уравнений системы (2.13) находим следующие соотношения для вектора $\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}&\mathbf{N}\cdot\mathbf{a}=0,\\&(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})\mathbf{a}+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{N}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n}=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

Проектируя последнее из полученных уравнений на ортогональные друг другу направления $\mathbf{N}$, $\mathbf{a}$, получаем

$$\begin{aligned}&(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})(1-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})^2)=0,\\&(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{a})^2)=0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

В зависимости от того, выполняется ли условие $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}=0$, имеем: $\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}=0$ или $1-2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{N})^2=0$. Любопытно отметить, что во втором случае (т.е. когда $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}\neq 0$) с помощью второго уравнения системы (2.14) можно установить, что вектор $\mathbf{a}$, обладая произвольным модулем, должен составлять с вектором $\mathbf{n}$ угол $\pm\pi/4$. Поэтому нормали к характеристическим поверхностям образуют конус с углом полураствора $\pi/4$ и осью, ориентированной вдоль вектора $\mathbf{n}$. Конус характеристических направлениеи для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия[9]. Ясно, что на основании $\mathbf{n}\cdot\mathbf{N}=0$ характеристическими поверхностями являются также и интегральные поверхности поля $\mathbf{n}$ (т.е. поверхности, составленные из интегральных кривых поля $\mathbf{n}$). Все это указывает на гиперболичность системы уравнений (2.13), описывающей пространственное пластическое течение на ребре призмы Треска.

Если удается найти решение системы кинематических уравнений (2.11) относительно приращений перемещений $d\mathbf{u}$, то затем можно найти тензор приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, а вместе с ними и точную ориентацию собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$.

3. Уравнения математической теории пластичности для грани призмы Кулона–Треска

Рассмотрим также основные уравнения теории идеальной пластичности для грани призмы Треска. Напряженные состояния, соответствующие граням призмы Треска, могут реализовываться лишь в исключительных случаях, поскольку ассоциированный закон течения в этом случае устанавливает весьма сильные кинематические ограничения на процесс пластического течения: одна из главных скоростей пластических деформаций должна быть равна нулю, и триэдр главных осей тензора приращений пластических деформаций жестко предписан тензором напряжений. Совершенно иная ситуация наблюдается в случае, когда напряженное состояние соответствует

[9]Этот результат был получен в работе [2].

ребру призмы Треска: ни одно из главных приращений пластических деформаций здесь принципиально определить нельзя, а триэдр главных осей тензора приращений пластических деформаций не предписывается жестко триэдром главных напряжений (они могут отличаться друг от друга поворотами в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$).

Для грани призмы Треска, задаваемой уравнением $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, тензор напряжений имеет вид

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_2\mathbf{I} - (\sigma_2 - \sigma_3)\mathbf{n}\otimes\mathbf{n} + 2k\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}. \tag{3.1}$$

Поэтому уравнения равновесия получаются в виде (ср. (1.7))

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}\Sigma_2 + \operatorname{div}(\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) + \\ + \left[\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad}(\Sigma_3 - \Sigma_2)\right]\mathbf{n} = \mathbf{0},\end{gathered} \tag{3.2}$$

где введены безразмерные главные напряжения $\Sigma_2 = \sigma_2/(2k)$, $\Sigma_3 = \sigma_3/(2k)$, или

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\nabla}\Sigma_2 + (\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l} + \mathbf{l}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\left[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n})\right] + \\ + \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})(\Sigma_3 - \Sigma_2) = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Проектируя векторное уравнение (3.3) на главные оси тензора напряжений, определяемые ориентациями $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, находим

направление $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Sigma_3 + \mathbf{n}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}) = 0; \tag{3.4}$$

направление $\mathbf{l}$:

$$(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Sigma_2 + (\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l}) + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\{\mathbf{l}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]\} = 0; \tag{3.5}$$

направление $\mathbf{m}$:

$$(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Sigma_2 + \mathbf{m}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] + (\Sigma_3 - \Sigma_2)\{\mathbf{m}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}]\} = 0. \tag{3.6}$$

Если оказывается возможным введение триортогональной координатной системы с координатными линиями, являющимися линиями главных напряжений, то полученные только что соотношения можно рассматривать как соотношения вдоль взаимно ортогональных изостат. Тогда можно ввести кривизны $\varkappa_{ij}$ ($\varkappa_{ij}$ есть кривизна проекции изостаты с номером i, причем проектирование осуществляется параллельно направлению j на локальную координатную плоскость, ортогональную этому направлению, и, учитывая, что

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{l} = \varkappa_{32} + \varkappa_{23}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{m} = \varkappa_{13} + \varkappa_{31}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n} = \varkappa_{12} + \varkappa_{21}, \tag{3.7}$$

а также

$$\begin{aligned}&\mathbf{l}\cdot[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = -\varkappa_{23}, \quad \mathbf{l}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = -\varkappa_{32},\\ &\mathbf{m}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = -\varkappa_{13}, \quad \mathbf{m}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = -\varkappa_{31},\\ &\mathbf{n}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = -\varkappa_{12}, \quad \mathbf{n}\cdot[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = -\varkappa_{21},\end{aligned} \tag{3.8}$$

привести уравнения равновесия для грани призмы Треска (3.4)–(3.6) к следующему виду:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Sigma_3 - \kappa_{12} + (\kappa_{12}+\kappa_{21})(\Sigma_3-\Sigma_2) = 0,\\ &(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Sigma_2 + (\kappa_{32}+\kappa_{23}) - \kappa_{32}(\Sigma_3-\Sigma_2) = 0,\\ &(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\Sigma_2 - \kappa_{13} - \kappa_{31}(\Sigma_3-\Sigma_2) = 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь дифференциальные операторы слева суть производные по направлениям линий главных напряжений:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial S_3} = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial}{\partial\xi^3},\\ \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial S_1} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial\xi^1},\\ \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla} &= \frac{\partial}{\partial S_2} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial}{\partial\xi^2}. \end{aligned}$$

Ассоциированный закон течения, сформулированный для грани призмы Треска $\sigma_1-\sigma_2=2k$, устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda,\quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda,\quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Условие соосности тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ для течения на грани призмы Треска $\sigma_1-\sigma_2=2k$ принимает форму

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = (\mathbf{l}\otimes\mathbf{l} - \mathbf{m}\otimes\mathbf{m})d\varepsilon_1^P$$

или также

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^P = -\mathbf{I}d\varepsilon_1^P + 2\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1^P + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_1^P,$$

где, в отличие от течения на ребре призмы Треска, векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{n}$ жестко предписаны тензором напряжений и заданы, если задан тензор напряжений.

Таким образом, система кинематических уравнений для рассматриваемой грани может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{l}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{l}\,\mathrm{tr}((\mathbf{l}\otimes\mathbf{l})\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P),\\ &\mathbf{n}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}^P = \mathbf{0},\\ &\mathrm{tr}(d\boldsymbol{\varepsilon}^P) = 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь содержится пять независимых скалярных уравнений, т.к. первое векторное уравнение дает только два независимых скалярных (скалярное умножение на вектор $\mathbf{l}$ приводит к тождеству), второе векторное уравнение — три независимых скалярных, но одно из них (которое получается скалярным умножением на вектор $\mathbf{l}$) следует из первого векторного уравнения (точнее, из уравнения, которое получается скалярным умножением первого векторного уравнения на вектор $\mathbf{n}$), а третье — одно скалярное уравнение.

Первое из уравнений (3.10) выражает просто тот факт, что вектор $\mathbf{l}$ есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, второе устанавливает, что вектор $\mathbf{n}$ — собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ с нулевым собственным значением, третье — пластическую несжимаемость.

Проектируя уравнения (3.10) на оси некоторой прямоугольной системы координат, находим

$$\begin{aligned} &l_j d\varepsilon^P_{ij} = l_i l_k l_s d\varepsilon^P_{ks}, \\ &n_j d\varepsilon^P_{ij} = 0, \\ &d\varepsilon^P_{jj} = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Три компоненты приращения вектора перемещений du_j, вводимые в (3.11) согласно

$$2d\varepsilon^P_{ij} = \partial_i(du_j) + \partial_j(du_i),$$

должны, таким образом, удовлетворять *пяти* независимым уравнениям. Следовательно, полученная система кинематических уравнений при течении на грани призмы Треска не является правильно определенной.

4. Соотношения Коши в триортогональной изостатической системе координат

Соотношения Коши, связывающие приращение вектора перемещений с приращением тензора полных деформаций являются фундаментальными уравнениями механики деформируемого твердого тела. С их помощью наиболее просто могут быть выведены все кинематические уравнения теории идеальной пластичности.

Соотношения Коши, записанные для приращений перемещений, имеют форму прямого тензорного уравнения

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}}. \tag{4.1}$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам локального ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{<1>} + \mathbf{m}du_{<2>} + \mathbf{n}du_{<3>}. \tag{4.2}$$

Здесь величины $du_{<j>}$ не являются действительными приращениями, а служат для обозначения физических компонент вектора $d\mathbf{u}$ в триортогональной изостатической координатной сетке. Тем не менее, о величинах $du_{<j>}$ мы, как обычно, будем говорить как о приращениях перемещений, помня, однако, что они таковыми в действительности не являются.

Трехмерный оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, в триортогональной изостатической системе координат ξ^1, ξ^2, ξ^3 есть (h_j — параметры

Ламе рассматриваемой координатной системы)

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial}{\partial\xi^3}. \tag{4.3}$$

Оператор $\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u} = \mathbf{l}\otimes\boldsymbol{\nabla}du_{<1>} + \mathbf{m}\otimes\boldsymbol{\nabla}du_{<2>} + \mathbf{n}\otimes\boldsymbol{\nabla}du_{<3>}+\\ +(du_{<1>})\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{l} + (du_{<2>})\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{m} + (du_{<3>})\,\boldsymbol{\nabla}\otimes\mathbf{n}.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}du_{<1>} &= \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^3},\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<2>} &= \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^3},\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<3>} &= \mathbf{l}\frac{1}{h_1}\frac{\partial du_{<3>}}{\partial\xi^1} + \mathbf{m}\frac{1}{h_2}\frac{\partial du_{<3>}}{\partial\xi^2} + \mathbf{n}\frac{1}{h_3}\frac{\partial du_{<3>}}{\partial\xi^3}\end{aligned} \tag{4.5}$$

или $(d_1 = \mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla},\ d_2 = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla},\ d_3 = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}du_{<1>} &= \mathbf{l}(d_1du_{<1>}) + \mathbf{m}(d_2du_{<1>}) + \mathbf{n}(d_3du_{<1>}),\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<2>} &= \mathbf{l}(d_1du_{<2>}) + \mathbf{m}(d_2du_{<2>}) + \mathbf{n}(d_3du_{<2>}),\\ \boldsymbol{\nabla}du_{<1>} &= \mathbf{l}(d_1du_{<3>}) + \mathbf{m}(d_2du_{<3>}) + \mathbf{n}(d_3du_{<3>}).\end{aligned} \tag{4.6}$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\xi^1} &= -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}\mathbf{m} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^3}\mathbf{n} = -(d_2h_1)\mathbf{m} - (d_3h_1)\mathbf{n},\\ \frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\xi^2} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\mathbf{m} = (d_1h_2)\mathbf{m},\\ \frac{\partial\mathbf{l}}{\partial\xi^3} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}\mathbf{n} = (d_1h_3)\mathbf{n},\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\xi^1} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}\mathbf{l} = (d_2h_1)\mathbf{l},\\ \frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\xi^2} &= -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\mathbf{l} - \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}\mathbf{n} = -(d_1h_2)\mathbf{l} - (d_3h_2)\mathbf{n},\\ \frac{\partial\mathbf{m}}{\partial\xi^3} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}\mathbf{n} = (d_2h_3)\mathbf{n},\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\xi^1} &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^3}\mathbf{l} = (d_3h_1)\mathbf{l},\\ \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\xi^2} &= \frac{1}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}\mathbf{m} = (d_3h_2)\mathbf{m},\\ \frac{\partial\mathbf{n}}{\partial\xi^3} &= -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}\mathbf{l} - \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}\mathbf{m} = -(d_1h_3)\mathbf{l} - (d_2h_3)\mathbf{m},\end{aligned} \tag{4.9}$$

приходим к следующим формулам:

$$
\begin{aligned}
\nabla\otimes\mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1}(d_2h_1)\,\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)\,\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}+\\
&\qquad+\frac{1}{h_2}(d_1h_2)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}+\frac{1}{h_3}(d_1h_3)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n},\\
\nabla\otimes\mathbf{m} &= \frac{1}{h_1}(d_2h_1)\,\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}-\\
&\qquad-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)\,\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}+\frac{1}{h_3}(d_2h_3)\,\mathbf{n}\otimes\mathbf{n},\\
\nabla\otimes\mathbf{n} &= \frac{1}{h_1}(d_3h_1)\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}+\frac{1}{h_2}(d_3h_2)\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}-\\
&\qquad-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Используя (4.6) и (4.10), соотношение (4.4) можно представить следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\nabla\otimes d\mathbf{u} &= \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}\left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>}+\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>}+d_1du_{<1>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>}+\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>}+d_2du_{<2>}\right]+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>}+\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>}+d_3du_{<3>}\right]+\\
&+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>}+d_2du_{<1>}\right]+\\
&+\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>}+d_3du_{<1>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>}+d_1du_{<2>}\right]+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>}+d_3du_{<2>}\right]+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>}+d_1du_{<3>}\right]+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>}+d_2du_{<3>}\right].
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Транспонировав уравнение (4.11), получаем

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\nabla}\otimes d\mathbf{u})^{\mathrm{T}} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}\left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>}+\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>}+d_1du_{<1>}\right]+\\
+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>}+\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>}+d_2du_{<2>}\right]+\\
+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>}+\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>}+d_3du_{<3>}\right]+\\
+\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>}+d_2du_{<1>}\right]+\\
+\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>}+d_3du_{<1>}\right]+\\
+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>}+d_1du_{<2>}\right]+\\
+\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>}+d_3du_{<2>}\right]+\\
+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>}+d_1du_{<3>}\right]+\\
+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>}+d_2du_{<3>}\right].
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Подставляя выражения (4.11) и (4.12) в соотношения Коши (4.1), получим

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}\left[\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>}+\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>}+d_1du_{<1>}\right]+\\
+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}\left[\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>}+\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>}+d_2du_{<2>}\right]+\\
+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}\left[\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>}+\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>}+d_3du_{<3>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>}+d_2du_{<1>}-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>}+d_1du_{<2>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>}+d_3du_{<1>}-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>}+d_1du_{<3>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>}+d_2du_{<1>}-\frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>}+d_1du_{<2>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>}+d_3du_{<2>}-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>}+d_2du_{<3>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}\left[-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>}+d_3du_{<1>}-\frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>}+d_1du_{<3>}\right]+\\
+\frac{1}{2}\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}\left[-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>}+d_3du_{<2>}-\frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>}+d_2du_{<3>}\right].
\end{aligned}
$$

Тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}$, как явствует из только что полученной формулы, симметричен, что и так ясно a priori. Указанную формулу можно несколько преобразовать, вводя нормальные кривизны κ_{ij} триортогональной системы поверхностей $\xi^s = \mathrm{const}$ (κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i, причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j

на плоскость, ортогональную этому направлению[10]) в соответствии с приводимыми ниже равенствами

$$
\begin{array}{lll}
d_1h_3 = h_3\kappa_{32}, & d_2h_3 = h_3\kappa_{31}, & d_3h_2 = h_2\kappa_{21}, \\
d_1h_2 = h_2\kappa_{23}, & d_2h_1 = h_1\kappa_{13}, & d_3h_1 = h_1\kappa_{12}.
\end{array}
\tag{4.13}
$$

В результате получим следующие выражения для физических компонент тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в триортогональных координатах ξ^1, ξ^2, ξ^3:

$$
\begin{aligned}
&d\varepsilon_{<11>} = \kappa_{13}du_{<2>} + \kappa_{12}du_{<3>} + d_1du_{<1>}, \\
&d\varepsilon_{<22>} = \kappa_{23}du_{<1>} + \kappa_{21}du_{<3>} + d_2du_{<2>}, \\
&d\varepsilon_{<33>} = \kappa_{32}du_{<1>} + \kappa_{31}du_{<2>} + d_3du_{<3>}, \\
&d\varepsilon_{<12>} = -\kappa_{13}du_{<1>} - \kappa_{23}du_{<2>} + d_2du_{<1>} + d_1du_{<2>}, \\
&d\varepsilon_{<13>} = -\kappa_{12}du_{<1>} - \kappa_{32}du_{<3>} + d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>}, \\
&d\varepsilon_{<23>} = -\kappa_{21}du_{<2>} - \kappa_{31}du_{<3>} + d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>}.
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Здесь ни $d\varepsilon_{<ij>}$, ни $du_{<j>}$ действительными приращениями не являются; $d\varepsilon_{<ij>}$ — физические компоненты тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в изостатической системе координат:

$$
\begin{aligned}
d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_{<11>} + \mathbf{l}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_{<12>} + \mathbf{l}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_{<13>} &+ \\
+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_{<22>} + \mathbf{m}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_{<21>} + \mathbf{m}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_{<23>} &+ \\
+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_{<33>} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_{<31>} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_{<32>}&.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

Уравнения (4.14) можно преобразовать, используя величины γ_{ij} (γ_{ij} — геодезическая кривизна изостатической траектории с номером i на поверхности, ортогональной главному направлению с номером j), лишь знаком отличающиеся от κ_{ij}. Если имеется некоторая кривая на поверхности, параметризованная натуральным параметром s, $\mathbf{t}$ — единичный вектор, направленный по касательной к кривой и в сторону возрастающих значений параметра, $\mathbf{t}^*$ — единичный вектор, расположенный в касательной плоскости ортогонально вектору $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по нормали к поверхности так, чтобы векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}^*$, $\mathbf{n}$ образовывали правую тройку, то мы определяем

$$
\kappa_n = -\frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\mathbf{n}, \quad \kappa_g = \frac{d\mathbf{t}}{ds}\cdot\mathbf{t}^*
$$

соответственно как нормальную кривизну (кривизна проекции рассматриваемой кривой на плоскость, определяемую векторами $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$) и геодезическую кривизну (кривизна проекции рассматриваемой кривой на касательную плоскость, определяемую векторами $\mathbf{t}$, $\mathbf{t}^*$) кривой на поверхности. В данном выше определении следует особо обратить внимание на знаки.

[10]Напомним, что справедливы следующие равенства:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{l}\cdot[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = -\kappa_{23}, \quad \mathbf{l}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = -\kappa_{32}, \\
&\mathbf{m}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = -\kappa_{13}, \quad \mathbf{m}\cdot[(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{n}] = -\kappa_{31}, \\
&\mathbf{n}\cdot[(\mathbf{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{l}] = -\kappa_{12}, \quad \mathbf{n}\cdot[(\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{m}] = -\kappa_{21}.
\end{aligned}
$$

Именно поэтому в применяемой нами терминологии γ_{ij} — геодезическая кривизна изостатической траектории с номером i на поверхности, ортогональной главному направлению с номером j. В итоге получаем

$$\begin{aligned}
d\varepsilon_{<11>} &= -\gamma_{13}du_{<2>} - \gamma_{12}du_{<3>} + d_1du_{<1>},\\
d\varepsilon_{<22>} &= -\gamma_{23}du_{<1>} - \gamma_{21}du_{<3>} + d_2du_{<2>},\\
d\varepsilon_{<33>} &= -\gamma_{32}du_{<1>} - \gamma_{31}du_{<2>} + d_3du_{<3>},\\
d\varepsilon_{<12>} &= \gamma_{13}du_{<1>} + \gamma_{23}du_{<2>} + d_2du_{<1>} + d_1du_{<2>},\\
d\varepsilon_{<13>} &= \gamma_{12}du_{<1>} + \gamma_{32}du_{<3>} + d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>},\\
d\varepsilon_{<23>} &= \gamma_{21}du_{<2>} + \gamma_{31}du_{<3>} + d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

5. Кинематические соотношения для пространственного течения в триортогональных изостатических координатах

В приближении жесткопластического анализа имеем $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Ассоциированный закон течения, как известно, устанавливает соосность тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. При использовании критерия текучести Треска следует различать течение на грани (в этом случае уникальный триэдр **l**, **m**, **n** будет однозначно указывать также и главные оси тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$) и течение на ребре, когда равны два главных напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$. В случае течения на ребре равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору **n**, является главным. При соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска сохраняется неопределенность в ориентации собственных векторов **l** и **m** (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору **n**), и они уже, вообще говоря, могут и не быть собственными векторами тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$.

Рассмотрим по отдельности каждый из двух указанных случаев.

1. Течение на грани призмы Кулона—Треска. Триэдр **l**, **m**, **n** есть также и триэдр главных направлений тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Полученная в предыдущем разделе формула для $d\boldsymbol{\varepsilon}$ приводит к шести соотношениям

$$d\varepsilon_1^P = \frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<2>} + \frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<3>} + d_1du_{<1>}, \tag{5.1}$$

$$d\varepsilon_2^P = \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<1>} + \frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<3>} + d_2du_{<2>}, \tag{5.2}$$

$$d\varepsilon_3^P = \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>} + d_3du_{<3>}, \tag{5.3}$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>} + d_2du_{<1>} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>} + d_1du_{<2>} = 0, \tag{5.4}$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>} + d_3du_{<1>} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>} + d_1du_{<3>} = 0, \tag{5.5}$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>} + d_3du_{<2>} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>} + d_2du_{<3>} = 0. \tag{5.6}$$

Вводя кривизны в соотношения (5.1)–(5.6) согласно (4.13), получим (см. также (4.14))

$$d\varepsilon_1^P = \kappa_{13}du_{<2>} + \kappa_{12}du_{<3>} + d_1du_{<1>}, \tag{5.7}$$

$$d\varepsilon_2^P = \kappa_{23}du_{<1>} + \kappa_{21}du_{<3>} + d_2du_{<2>}, \tag{5.8}$$

$$d\varepsilon_3^P = \kappa_{32}du_{<1>} + \kappa_{31}du_{<2>} + d_3du_{<3>}, \tag{5.9}$$

$$-\kappa_{13}du_{<1>} - \kappa_{23}du_{<2>} + d_2du_{<1>} + d_1du_{<2>} = 0, \tag{5.10}$$

$$-\kappa_{12}du_{<1>} - \kappa_{32}du_{<3>} + d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>} = 0, \tag{5.11}$$

$$-\kappa_{21}du_{<2>} - \kappa_{31}du_{<3>} + d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>} = 0. \tag{5.12}$$

Эти соотношения компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13} + d_2 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & -\kappa_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0. \tag{5.14}$$

Второе из матричных соотношений выражает соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций.

Как отмечалось выше (см. раздел **3**), в случае пространственного течения на грани призмы Кулона—Треска $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$ ассоциированный закон течения устанавливает жесткую (без неопределенности, характерной для ребра призмы Треска) соосность тензоров $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ и $\boldsymbol{\sigma}$ и еще следующие соотношения для главных значений тензора приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_1^P = d\lambda, \quad d\varepsilon_2^P = -d\lambda, \quad d\varepsilon_3^P = 0,$$

откуда сразу же следует соотношение несжимаемости

$$d\varepsilon_1^P + d\varepsilon_2^P = 0.$$

Следовательно, для анализа кинематики пространственного течения на грани призмы Кулона—Треска достаточно воспользоваться полученными только что матричными уравнениями (5.13), (5.14), положив в них $d\varepsilon_3^P = 0$ и $d\varepsilon_1^P = -d\varepsilon_2^P$. В результате находим следующие уравнения, выражающие в изостатической координатной системе кинематическое ограничение $d\varepsilon_3^P = 0$, условие несжимаемости и условие соосности:

$$\kappa_{32}du_{<1>} + \kappa_{31}du_{<2>} + d_3du_{<3>} = 0; \tag{5.15}$$

$$d_1du_{<1>} + d_2du_{<2>} + \kappa_{23}du_{<1>} + \kappa_{13}du_{<2>} + (\kappa_{12} + \kappa_{21})du_{<3>} = 0; \tag{5.16}$$

$$\begin{gathered} d_2du_{<1>} + d_1du_{<2>} - \kappa_{13}du_{<1>} - \kappa_{23}du_{<2>} = 0, \\ d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>} - \kappa_{12}du_{<1>} - \kappa_{32}du_{<3>} = 0, \\ d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>} - \kappa_{21}du_{<2>} - \kappa_{31}du_{<3>} = 0. \end{gathered} \tag{5.17}$$

Нетрудно видеть, что если напряженное состояние соответствует грани призмы Кулона—Треска и уже определено, то изостатическую координатную сетку (если таковая существует) можно считать известной. Но в таком случае *три* неизвестных величины $du_{<j>}$ должны удовлетворять *пяти* уравнениям (5.15), (5.16), (5.17)[11]. Ниже мы увидим, что подобной проблемы не возникает, например, в случае плоского деформированного состояния, поскольку тогда соотношение (5.15) и два из трех соотношений (5.17) удовлетворяются тождественно.

2. Течение на ребре призмы Кулона—Треска. Триэдр $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, вообще говоря, не будет триэдром главных направлений тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$. Из ассоциированного закона течения можно вывести условие несжимаемости и лишь тот факт, что $\mathbf{n}$ есть собственный вектор тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$, т.е. соотношения:

$$\begin{aligned} &d\varepsilon_{<11>} + d\varepsilon_{<22>} + d\varepsilon_3 = 0;\\ &d\varepsilon_{<13>} = 0,\\ &d\varepsilon_{<23>} = 0. \end{aligned}$$

Полученная выше формула для $d\boldsymbol{\varepsilon}$ позволяет представить приведенные выше соотношения в следующем виде:

$$\begin{aligned} d_1du_{<1>} + d_2du_{<2>} + d_3du_{<3>} +& \\ +(\kappa_{23}+\kappa_{32})du_{<1>} + (\kappa_{13}+\kappa_{31})du_{<2>} &+ (\kappa_{12}+\kappa_{21})du_{<3>} = 0; \end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned} d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>} - \kappa_{12}du_{<1>} - \kappa_{32}du_{<3>} = 0,\\ d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>} - \kappa_{21}du_{<2>} - \kappa_{31}du_{<3>} = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Таким образом, в случае течения на ребре призмы Кулона—Треска *три* неизвестных величины $du_{<j>}$ должны удовлетворять *трем* уравнениям (5.18), (5.19), т.е. задача расчета приращений перемещений по известному напряженному состоянию является правильно определенной.

Докажем, что система, состоящая из уравнений (5.18), (5.19), гиперболична и определим ее характеристические направления. Обозначим через $N_{<j>}$ физические компоненты вектора $\mathbf{N}$ единичной нормали к характеристическому элементу относительно пространственного базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{<1>} & N_{<2>} & N_{<3>}\\ N_{<3>} & 0 & N_{<1>}\\ 0 & N_{<3>} & N_{<2>} \end{vmatrix} = 0$$

или с учетом $N^2_{<1>} + N^2_{<2>} + N^2_{<3>} = 1$

$$N_{<3>}(2N^2_{<3>} - 1) = 0$$

[11]Т.е. на приращения перемещений $du_{<j>}$ в триортогональной изостатической координатной сетке в случае пространственного пластического течения на грани призмы Кулона—Треска имеется слишком много ограничивающих соотношений. Поэтому, если в действительности реализуется течение на грани, то некоторые из приведенных соотношений (5.15), (5.16), (5.17) должны удовлетворяться тождественно либо следовать из остальных соотношений.

имеет три различных действительных корня

$$N_{<3>} = 0, \quad N_{<3>} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}},$$

что указывает на гиперболичность системы уравнений (5.18), (5.19). Конус характеристических направленией для системы кинематических уравнений пространственной задачи математической теории пластичности (в случае течения на ребре призмы Треска) тот же самый, что и для системы уравнений равновесия.

6. Уравнения совместности приращений малых деформаций в триортогональной криволинейной сетке изостат

Сформулируем, следуя [3], уравнения совместности приращений малых деформаций в триортогональной криволинейной сетке линий главных напряжений ξ^1, ξ^2, ξ^3.

Уравнение совместности малых деформаций в приращениях, как известно, имеет вид

$$-d\mathbf{S} = \boldsymbol{\nabla}\times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \tag{6.1}$$

где тензор второго ранга $d\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора приращений полных деформаций

$$d\mathbf{P} = (\boldsymbol{\nabla}\times d\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}}. \tag{6.2}$$

Тензор несовместности $d\mathbf{S}$ симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^{\mathrm{T}}. \tag{6.3}$$

Тензор $d\mathbf{P}$ антисимметричен, поскольку:

$$(\boldsymbol{\nabla}\times d\boldsymbol{\varepsilon})^{\mathrm{T}} = -(d\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\nabla}). \tag{6.4}$$

Физические компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ вычисляются в форме [6]:

$$
\begin{aligned}
dS_{<11>} = {}&\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left\{\frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial(h_2d\varepsilon_{<32>})}{\partial\xi^3}-\frac{\partial(h_3d\varepsilon_{<33>})}{\partial\xi^2}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{d\varepsilon_{<12>}}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}+\frac{d\varepsilon_{<23>}}{h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}+\frac{d\varepsilon_{<22>}}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}\right\}-\\
&-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left\{\frac{1}{h_3}\left[\frac{\partial(h_2d\varepsilon_{<22>})}{\partial\xi^3}-\frac{\partial(h_3d\varepsilon_{<23>})}{\partial\xi^2}\right]-\right.\\
&\left.-\frac{d\varepsilon_{<32>}}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}-\frac{d\varepsilon_{<13>}}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}-\frac{d\varepsilon_{<33>}}{h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}\right\}+\\
&+\frac{1}{h_1^2h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}\left[\frac{\partial(h_1d\varepsilon_{<21>})}{\partial\xi^2}-\frac{\partial(h_2d\varepsilon_{<22>})}{\partial\xi^1}\right]+\\
&+\frac{1}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}\left[\frac{d\varepsilon_{<31>}}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}+\frac{d\varepsilon_{<12>}}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}+\frac{d\varepsilon_{<11>}}{h_1h_2}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\right]-\\
&-\frac{1}{h_1^2h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\left[\frac{\partial(h_3d\varepsilon_{<33>})}{\partial\xi^1}-\frac{\partial(h_1d\varepsilon_{<31>})}{\partial\xi^3}\right]+\\
&+\frac{1}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\left[\frac{d\varepsilon_{<21>}}{h_2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}+\frac{d\varepsilon_{<13>}}{h_3h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^3}+\frac{d\varepsilon_{<11>}}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}\right],
\end{aligned}
\tag{6.5}
$$

$$
\begin{aligned}
dS_{<12>} = {}&\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left\{\frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial(h_3d\varepsilon_{<33>})}{\partial\xi^1}-\frac{\partial(h_1d\varepsilon_{<31>})}{\partial\xi^3}\right]-\right.\\
&\left.-\frac{d\varepsilon_{<21>}}{h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}-\frac{d\varepsilon_{<13>}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^3}-\frac{d\varepsilon_{<11>}}{h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}\right\}-\\
&-\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial}{\partial\xi^3}\left\{\frac{h_2}{h_1h_3}\left[\frac{\partial(h_3d\varepsilon_{<23>})}{\partial\xi^1}-\frac{\partial(h_1d\varepsilon_{<21>})}{\partial\xi^3}\right]+\right.\\
&\left.+\frac{d\varepsilon_{<31>}}{h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}-\frac{d\varepsilon_{<13>}}{h_1}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}\right\}+\\
&+\frac{1}{h_1h_2^2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\left[\frac{\partial(h_2d\varepsilon_{<23>})}{\partial\xi^3}-\frac{\partial(h_3d\varepsilon_{<33>})}{\partial\xi^2}\right]+\\
&+\frac{1}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\left[\frac{d\varepsilon_{<12>}}{h_3h_1}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^1}+\frac{d\varepsilon_{<23>}}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}+\frac{d\varepsilon_{<22>}}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}\right]+\\
&+\frac{1}{h_1h_2^2h_3}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}\left[\frac{\partial(h_1d\varepsilon_{<21>})}{\partial\xi^2}-\frac{\partial(h_2d\varepsilon_{<22>})}{\partial\xi^1}\right]+\\
&+\frac{1}{h_3h_2}\frac{\partial h_3}{\partial\xi^2}\left[\frac{d\varepsilon_{<31>}}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}+\frac{d\varepsilon_{<12>}}{h_1h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}+\frac{d\varepsilon_{<11>}}{h_2h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\right]+\\
&+\frac{1}{h_1h_2^2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}\left[\frac{\partial(h_1d\varepsilon_{<31>})}{\partial\xi^2}-\frac{\partial(h_2d\varepsilon_{<32>})}{\partial\xi^1}\right]+\\
&+\frac{1}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}\left[\frac{d\varepsilon_{<12>}}{h_1h_3}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^3}-\frac{d\varepsilon_{<21>}}{h_2h_3}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^3}\right],
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

где $h_\alpha=\sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ (по α не суммировать) — параметры Ламе; $d\varepsilon_{<ij>}$ — физические компоненты тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}$ в изостатической системе координат,

$$
\begin{aligned}
d\mathbf{S} = {}&\mathbf{l}\otimes\mathbf{l}dS_{<11>}+\mathbf{l}\otimes\mathbf{m}dS_{<12>}+\mathbf{l}\otimes\mathbf{n}dS_{<13>}+\\
&+\mathbf{m}\otimes\mathbf{m}dS_{<22>}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{l}dS_{<21>}+\mathbf{m}\otimes\mathbf{n}dS_{<23>}+\\
&+\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_{<33>}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{l}dS_{<31>}+\mathbf{n}\otimes\mathbf{m}dS_{<32>}.
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Компоненты $dS_{<22>}$, $dS_{<33>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.5). Компоненты $dS_{<23>}$, $dS_{<31>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.6).

Здесь представляется уместным еще раз упомянуть о том, что ни $dS_{<ij>}$, ни $d\varepsilon_{<ij>}$ не являются действительными приращениями величин, находящихся под знаком дифференциала.

Опираясь на приведенные формулы, запишем уравнение совместности для приращений пластических деформаций в изостатической сетке. Мы будем (как принято всюду в настоящей работе) пренебрегать упругими деформациями: $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$.

Поскольку в силу ассоциированного закона течения тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ соосны, то в сетке изостат матрица тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ диагональна

$$\begin{Vmatrix} d\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & d\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{Vmatrix},$$

т.е.

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{l}\otimes\mathbf{l}d\varepsilon_1 + \mathbf{m}\otimes\mathbf{m}d\varepsilon_2 + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}d\varepsilon_3,$$

и в физических компонентах имеем

$$\begin{aligned} dS_{<11>} = -d_2d_2d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_2 + \left(\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2\right)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + \\ + d_3\left(\kappa_{21}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2\right)\right) - d_2\left(\kappa_{31}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2\right)\right) - \\ - \kappa_{23}\kappa_{32}\left(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1\right) - \kappa_{31}d_2d\varepsilon_3 - \\ - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3, \end{aligned} \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned} dS_{<12>} = d_2d_1d\varepsilon_3 + d_2\left[\kappa_{32}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1\right)\right] + \kappa_{31}d_1\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2\right) - \\ - \kappa_{23}d_2d\varepsilon_3 + \kappa_{31}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1\right)\left(\kappa_{32} - \kappa_{23}\right), \end{aligned} \tag{6.9}$$

где, как и ранее, компоненты $dS_{<22>}$, $dS_{<33>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.8), а компоненты $dS_{<23>}$, $dS_{<31>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (6.9).

Для ясного понимания условий применимости полученных выше выражений для физических компонент тензора несовместности еще раз повторим следующее. Ассоциированный закон течения устанавливает соосность тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$ и тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. При использовании критерия текучести Треска следует различать течение на грани (в этом случае уникальный триэдр $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ будет однозначно указывать также и главные оси тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$) и течение на ребре, когда равны два главных напряжения $\sigma_1 = \sigma_2$. В случае течения на ребре равенство двух главных напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ означает, что любое направление, расположенное в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$, является главным. Поэтому при соответствии напряженного состояния ребру призмы Кулона—Треска есть известная доля произвола при выборе собственных векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ (они определены с точностью до поворотов в плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{n}$). Следовательно, векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{m}$ уже могут и не быть собственными векторами тензора приращений пластических деформаций $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$. Следовательно, возможно существование триортогональной сетки линий главных напряжений с локальным триэдром **l**, **m**, **n**, таким, что векторы **l** и **m** не являются собственными для тензора $d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, но тогда формулы (6.8), (6.9) подлежат модификации с целью учета недиагональности матрицы тензора $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$ в базисе **l**, **m**, **n**:

$$\begin{Vmatrix} d\varepsilon_{<11>} & d\varepsilon_{<12>} & 0 \\ d\varepsilon_{<12>} & d\varepsilon_{<22>} & 0 \\ 0 & 0 & d\varepsilon_3 \end{Vmatrix}.$$

Подобного рода модификация без труда осуществляется с помощью полученных выше формул для физических компонент тензора несовместности (6.5), (6.6).[12] В результате приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} dS_{<11>} = -d_2d_2d\varepsilon_3 - d_3d_3d\varepsilon_{<22>} + \left(\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2\right)(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_{<22>}) + \\ +d_3\left(\kappa_{21}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_{<22>}\right)\right) - d_2\left(\kappa_{31}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_{<22>}\right)\right) - \\ -\kappa_{23}\kappa_{32}\left(d\varepsilon_{<22>} + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_{<11>}\right) - \kappa_{31}d_2d\varepsilon_3 - \\ -\kappa_{21}d_3d\varepsilon_{<22>} - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_{<22>} - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3 + \\ +2\kappa_{32}d_2d\varepsilon_{<12>} + (2\kappa_{32}\kappa_{13} + \kappa_{23}\kappa_{31} + \kappa_{32}\kappa_{31} + d_2\kappa_{32})d\varepsilon_{<12>}, \end{aligned} \tag{6.10}$$

$$\begin{aligned} dS_{<12>} = d_2d_1d\varepsilon_3 + d_2\left[\kappa_{32}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_{<11>}\right)\right] + \kappa_{31}d_1\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_{<22>}\right) - \\ -\kappa_{23}d_2d\varepsilon_3 + \kappa_{31}\left(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_{<11>}\right)(\kappa_{32} - \kappa_{23}) + \\ +d_3d_3d\varepsilon_{<12>} + (\kappa_{21} + \kappa_{12})d_3d\varepsilon_{<12>} + \\ +(-\kappa_{31}^2 + \kappa_{32}\kappa_{23} + 2\kappa_{13}\kappa_{31} + 2\kappa_{21}\kappa_{12} - \kappa_{21}^2 - \\ -d_2\kappa_{31} + d_3\kappa_{12})d\varepsilon_{<12>}. \end{aligned} \tag{6.11}$$

7. Кинематика плоского пластического течения

Опираясь на полученные в предыдущем разделе статьи результаты, можно исследовать кинематику плоского пластического течения.

Любое условие пластичности в случае плоского деформированного состояния приводится к виду $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$. В плоскости течения $x_1\,x_2$ имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2. В условиях плоского деформированного состояния имеем $d_3 = 0$, $du_{<3>} = 0$, $d\varepsilon_3^P = 0$, $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{32} = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{13}$, $\kappa_2 = \kappa_{23}$.

Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta. \tag{7.1}$$

Имеется всего одно деривационное соотношение, связывающее кривизны изостатических траекторий, которое имеет вид (см. [3])

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0 \tag{7.2}$$

и удовлетворяется тождественно в силу $\kappa_1 = -d_1\theta$, $\kappa_2 = d_2\theta$.

[12] Она не требуется в плоском и осесимметричном случаях.

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе—Максвелла

$$d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) = 0,\quad d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) = 0, \tag{7.3}$$

или

$$d_1\sigma_1 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_2} = 0,\ d_2\sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\rho_1} = 0, \tag{7.4}$$

где ρ_1, ρ_2 — радиусы кривизны линий главных напряжений, причем эти величины считаются положительными, если с возрастанием натурального параметра вдоль кривой касательная вращается против часовой стрелки, при этом положительное направление вдоль первой траектории выбирается произвольно, а положительное направление вдоль второй траектории определяется вращением против хода часовой стрелки положительного направления первой траектории.

Так как в случае плоской пластической деформации $\sigma_1 - \sigma_2 = 2k$, то уравнения (7.4) приобретают следующий вид:

$$d_1\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_2} = 0,\ d_2\sigma_1 + \frac{2k}{\rho_1} = 0. \tag{7.5}$$

Эта система гиперболична. Характеристики делят пополам угол между главными направлениями напряжений. Вводя в систему (7.5) производные вдоль характеристических направлений (примем, что первая характеристика отклоняется от первого главного направления напряжений, соответствующего наибольшему главному напряжению, на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки)

$$\overline{d_1} = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{2}},\quad \overline{d_2} = \frac{d_1 + d_2}{\sqrt{2}}, \tag{7.6}$$

складывая, а затем вычитая уравнения этой системы, получим интегрируемые соотношения Генки (H. Hencky) вдоль характеристик:

$$\overline{d_1}(\sigma_1 - 2k\theta) = 0,\quad \overline{d_2}(\sigma_1 + 2k\theta) = 0. \tag{7.7}$$

Интересно заметить, что в случае плоской деформации единственная ненулевая компонента $dS_{<33>}$ тензора несовместности $d\mathbf{S} = \boldsymbol{\nabla}\times d\boldsymbol{\varepsilon}\times\boldsymbol{\nabla}$ может быть вычислена по формуле

$$dS_{<33>} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\cdot d\boldsymbol{\varepsilon}) - \Delta d\varepsilon_{jj}.$$

Поэтому в случае плоской деформации условия совместности в приращениях деформаций сводятся к одному уравнению (см. [3])

$$\begin{aligned} dS_{<33>} = -d_1d_1d\varepsilon_2 - d_2d_2d\varepsilon_1 - (d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2)(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \\ -\kappa_2 d_1(2d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - \kappa_1 d_2(2d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2) = 0. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Соотношения Коши в случае плоского деформированного состояния:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \end{pmatrix}, \tag{7.9}$$

$$\begin{pmatrix} -\varkappa_1 + d_2 & -\varkappa_2 + d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ 0 \end{pmatrix} = 0. \tag{7.10}$$

Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить как

$$\begin{aligned} &(\varkappa_2 + d_1)du_{<1>} + (\varkappa_1 + d_2)du_{<2>} = 0, \\ &(-\varkappa_1 + d_2)du_{<1>} + (-\varkappa_2 + d_1)du_{<2>} = 0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

С помощью условия несжимаемости $d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 = 0$ из уравнения (7.8) исключается $d\varepsilon_2$ поэтому получается уравнение только относительно $d\varepsilon_1$. По главной части этого уравнения

$$d_1 d_1 d\varepsilon_1 - d_2 d_2 d\varepsilon_1 + \ \cdots \ = 0$$

легко устанавливается, что кинематические уравнения принадлежат к гиперболическому типу и характеристики являются линиями скольжения.

Ясно, что уравнение второго порядка для $d\varepsilon_1$ может быть заменено системой двух уравнений первого порядка. С этой целью введем обозначения:

$$u = \ln|d\varepsilon_1|, \quad p = d_1 u, \quad q = d_2 u. \tag{7.12}$$

Переменная u — логарифмическое приращение деформации.

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} &d_1 d\varepsilon_1 = p e^u, \\ &d_2 d\varepsilon_1 = q e^u, \\ &d_1 d_1 d\varepsilon_1 = e^u d_1 p + e^u p^2, \\ &d_2 d_2 d\varepsilon_1 = e^u d_2 q + e^u q^2, \end{aligned}$$

уравнение совместности деформаций представим в форме

$$d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(\varkappa_2 p - \varkappa_1 q) + 2(d_1 \varkappa_2 - d_2 \varkappa_1 + \varkappa_2^2 - \varkappa_1^2). \tag{7.13}$$

Заметим далее, что в силу

$$d_2 d_1 - d_1 d_2 = -\varkappa_1 d_1 + \varkappa_2 d_2 \tag{7.14}$$

справедливо соотношение

$$d_2 p - d_1 q = -\varkappa_1 p + \varkappa_2 q. \tag{7.15}$$

Следовательно, относительно величин p и q имеем систему уравнений первого порядка (7.13), (7.15).

Вводя обозначения

$$P = d_1\theta, \quad Q = d_2\theta,$$

систему кинематических уравнений можно привести к следующему симметричному виду:

$$\begin{aligned} &d_2 q - d_1 p = p^2 - q^2 + 3(pQ + qP) + 2(d_1 Q + d_2 P + Q^2 - P^2), \\ &d_2 p - d_1 q = pP + qQ. \end{aligned} \tag{7.16}$$

Напомним, что здесь величины p и q — производные вдоль линий главных напряжений от логарифмического приращения деформации.

Уравнения статики также преобразуются к симметричной форме относительно величин P и Q. Действительно, уравнения равновесия (7.5) с помощью обозначений $P^* = d_1\sigma_1/(2k)$, $Q^* = d_2\sigma_1/(2k)$ представляются как

$$P^* = -Q, \quad Q^* = -P. \tag{7.17}$$

На основании (7.14) находим

$$d_2P^* - d_1Q^* = -\varkappa_1P^* + \varkappa_2Q^* = PP^* + QQ^*$$

и в силу (7.17)

$$d_1P - d_2Q = -2PQ.$$

Переписывая в новых обозначениях деривационную формулу (7.2), имеем

$$d_2P - d_1Q = P^2 + Q^2.$$

Таким образом, получаем систему статических уравнений плоской задачи в форме:

$$\begin{aligned} d_1P - d_2Q &= -2PQ, \\ d_2P - d_1Q &= P^2 + Q^2. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Последняя система уравнений позволяет сформулировать ряд новых результатов, касающихся геометрии поля изостат[13].

Преобразуя систему уравнений (7.18) к характеристическим переменным (см. (7.6)), находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\overline{d_1}(P+Q) &= -(P+Q)^2, \\ \sqrt{2}\,\overline{d_2}(P-Q) &= (P-Q)^2, \end{aligned}$$

или

$$\overline{d_1}\frac{1}{P+Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2}\frac{1}{P-Q} = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{7.19}$$

Вспоминая определение величин P и Q, получим следующие соотношения вдоль характеристик:

$$\overline{d_1}\frac{1}{\varkappa_2-\varkappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{d_2}\frac{1}{\varkappa_2+\varkappa_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tag{7.20}$$

т.е. обратная разность (сумма) кривизн изостатических линий при продвижении вдоль первой (второй) характеристики изменяется пропорционально пройденному пути[14].

---

[13]См. также работу: Радаев, Ю.Н. Дополнительные теоремы теории плоской и осесимметричной задачи математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. – №2(32). – 2004. – С. 41–61.

[14]Этот результат — аналог второй теоремы Генки о геометрии поля скольжения в состоянии плоской деформации (см., например, [7, с. 218]). Вторая теорема Генки непо-

Не представляет труда и вывод соотношений для приращений перемещений вдоль характеристических направлений. Складывая уравнения (7.11), а затем вычитая одно из другого, с учетом (7.6) находим

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,\overline{d_2}(du_{<1>} + du_{<2>}) + (\kappa_2 - \kappa_1)(du_{<1>} - du_{<2>}) = 0, \\ \sqrt{2}\,\overline{d_1}(du_{<1>} - du_{<2>}) + (\kappa_2 + \kappa_1)(du_{<1>} + du_{<2>}) = 0. \end{aligned} \tag{7.21}$$

Замечая далее, что при повороте осей главных напряжений 1, 2 на угол $\pi/4$ по ходу часовой стрелки получаем характеристические оси $\overline{1}$, $\overline{2}$, так что физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно указанных осей вычисляются как ($du_{<\overline{1}>}$, $du_{<\overline{2}>}$ — физические компоненты вектора $d\mathbf{u}$ относительно характеристических осей)

$$\begin{aligned} \sqrt{2}du_{<\overline{1}>} = du_{<1>} - du_{<2>}, \\ \sqrt{2}du_{<\overline{2}>} = du_{<1>} + du_{<2>}. \end{aligned}$$

Следовательно, для физических компонент[15] приращения вектора перемещений имеем

$$\begin{aligned} \overline{d_1}du_{<\overline{1}>} + \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}}du_{<\overline{2}>} = 0, \\ \overline{d_2}du_{<\overline{2}>} + \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}}du_{<\overline{1}>} = 0. \end{aligned} \tag{7.22}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2 + d_1}{\sqrt{2}}\theta = \overline{d_2}\theta, \\ \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}} = \frac{d_2 - d_1}{\sqrt{2}}\theta = -\overline{d_1}\theta, \end{aligned}$$

из (7.22) сразу же получаем соотношения Гейрингер (H. Geiringer) вдоль характеристик

$$\begin{aligned} \overline{d_1}du_{<\overline{1}>} - du_{<\overline{2}>}\overline{d_1}\theta = 0, \\ \overline{d_2}du_{<\overline{2}>} + du_{<\overline{1}>}\overline{d_2}\theta = 0, \end{aligned} \tag{7.23}$$

или на основании $\overline{\kappa_1} = -\overline{d_1}\theta$, $\overline{\kappa_2} = \overline{d_2}\theta$

$$\begin{aligned} \overline{d_1}du_{<\overline{1}>} + \overline{\kappa_1}du_{<\overline{2}>} = 0, \\ \overline{d_2}du_{<\overline{2}>} + \overline{\kappa_2}du_{<\overline{1}>} = 0. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Напомним, что производные по характеристическим направлениям $\overline{1}$, $\overline{2}$ связаны с производными по главным направлениям 1, 2 следующими

средственно следует из (7.20). Действительно, применяя (7.6) к θ, находим

$$\overline{\kappa_1} = \frac{\kappa_2 + \kappa_1}{\sqrt{2}}, \quad \overline{\kappa_2} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{\sqrt{2}},$$

где $\overline{\kappa_1} = -\overline{d_1}\theta$, $\overline{\kappa_2} = \overline{d_2}\theta$ — кривизны характеристических линий, что означает

$$\overline{d_1}\frac{1}{\overline{\kappa_2}} = 1, \quad \overline{d_2}\frac{1}{\overline{\kappa_1}} = 1,$$

а эти соотношения как раз и составляют содержание второй теоремы Генки.

[15]Относительно характеристических направлений.

соотношениями:

$$\sqrt{2}\,\overline{d_1} = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\overline{\overline{S}}_1} = d_1 - d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} - \frac{\partial}{\partial S_2},$$
$$\sqrt{2}\,\overline{d_2} = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial\overline{\overline{S}}_2} = d_1 + d_2 = \frac{\partial}{\partial S_1} + \frac{\partial}{\partial S_2}.$$

Следовательно, соотношения Гейрингер (7.23) могут быть представлены в развернутой форме как

$$\begin{aligned} \frac{\partial du_{<\bar{1}>}}{\partial\overline{\overline{S}}_1} - du_{<\bar{2}>}\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\overline{S}}_1} = 0, \\ \frac{\partial du_{<\bar{2}>}}{\partial\overline{\overline{S}}_2} + du_{<\bar{1}>}\frac{\partial\theta}{\partial\overline{\overline{S}}_2} = 0. \end{aligned} \tag{7.25}$$

8. Кинематика осесимметричного течения

Осесимметричное пластическое течение, когда напряженное состояние соответствует ребру призмы Треска, можно разделить на следующие два типа[16]: 1) тангенциальное напряжение является наибольшим (наименьшим) главным напряжением, а меридиональные главные напряжения равны; 2) тангенциальное напряжение равно одному из меридиональных главных напряжений, а максимальное касательное напряжение в меридиональной плоскости равно пределу текучести k. Первый случай исследуется сравнительно элементарными средствами. Второй случай — состояние "полной пластичности" Хаара—Кармана. Если присвоить тангенциальному главному направлению второй номер и обозначить через σ_3 наибольшее (наименьшее) из двух меридиональных главных напряжений, то приходим к соотношению, характеризующему состояние "полной пластичности"

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k.$$

В осесимметричном случае линии главных напряжений образуют триортогональную координатную сетку ξ^i. При этом ξ^2 — угловая координата. Кроме того, имеем: $d_2 = 0$, $du_{<2>} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $\kappa_{31} = 0$. Поэтому приходим к более простым, по сравнению с общим пространственным случаем, соотношениям, описывающим распределения напряжений и скоростей.

Деривационные соотношения выражаются группой уравнений

$$\begin{aligned} &d_1\kappa_{32} + d_3\kappa_{12} + \kappa_{12}^2 + \kappa_{32}^2 = 0, \\ &d_1\kappa_{23} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{12}\kappa_{21} = 0, \\ &d_3\kappa_{21} + \kappa_{21}^2 + \kappa_{23}\kappa_{32} = 0, \\ &d_3\kappa_{23} = \kappa_{21}(\kappa_{32} - \kappa_{23}). \end{aligned}$$

[16]Тангенциальное напряжение всегда будет главным напряжением при осесимметричном напряженном состоянии.

Уравнения равновесия, сформулированные относительно изостатической сетки, есть

$$\begin{aligned} &d_1\sigma_1 + \kappa_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32}(\sigma_1 - \sigma_3) = 0, \\ &d_3\sigma_3 + \kappa_{21}(\sigma_3 - \sigma_2) + \kappa_{12}(\sigma_3 - \sigma_1) = 0, \end{aligned} \tag{8.1}$$

и при догружении вдоль ребра призмы Треска $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k$ в этих уравнениях следует положить $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 - \sigma_1 = 2k$, $\sigma_3 - \sigma_2 = 2k$.

Условия совместности приращений деформаций выражаются тремя уравнениями относительно изостатических координат

$$\begin{aligned} dS_{<11>} = &-d_3d_3d\varepsilon_2 + \kappa_{21}^2(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2) + d_3\,[\kappa_{21}(d\varepsilon_3 - d\varepsilon_2)] - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\varepsilon_2 + d\varepsilon_3 - 2d\varepsilon_1) - \\ &-\kappa_{21}d_3d\varepsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\varepsilon_3 = 0, \\ dS_{<22>} = &-d_3d_3d\varepsilon_1 - d_1d_1d\varepsilon_3 + (\kappa_{32}^2 - \kappa_{12}^2)(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3) + d_1\,[\kappa_{32}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] - \\ &-\kappa_{12}d_3d\varepsilon_1 - \kappa_{32}d_1d\varepsilon_3 - d_3\,[\kappa_{12}(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3)] = 0, \\ dS_{<33>} = &-d_1d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{23}^2(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1) - d_1\,[\kappa_{23}(d\varepsilon_2 - d\varepsilon_1)] - \kappa_{21}\kappa_{12}(d\varepsilon_1 + d\varepsilon_2 - 2d\varepsilon_3) - \\ &-\kappa_{23}d_1d\varepsilon_2 - \kappa_{21}d_3d\varepsilon_1 - \kappa_{12}d_3d\varepsilon_2 = 0, \end{aligned} \tag{8.2}$$

из которых, в силу тождества Бианки $\boldsymbol{\nabla}\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{0}$, независимы только два, например, первое и третье. Действительно, условия $dS_{<12>} = 0$, $dS_{<23>} = 0$, $dS_{<31>} = 0$ удовлетворяются тождественно в силу $\kappa_{31} = 0$, $\kappa_{13} = 0$, $d_2 = 0$. Это означает, что тензор $d\mathbf{S}$ соосен тензору напряжений и $dS_{<11>} = dS_1$, $dS_{<22>} = dS_2$, $dS_{<33>} = dS_3$. Тождества Бианки при этом сводятся к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} &d_1dS_1 + \kappa_{23}(dS_1 - dS_2) + \kappa_{32}(dS_1 - dS_3) = 0, \\ &d_3dS_3 + \kappa_{12}(dS_3 - dS_1) + \kappa_{21}(dS_3 - dS_2) = 0. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Следовательно, если хотя бы одна из кривизн κ_{23} или κ_{21} отлична от нуля, то из условий $dS_1 = 0$, $dS_3 = 0$ необходимо $dS_2 = 0$.

Независимыми можно также считать два условия $dS_{<11>} = 0$ и $dS_{<22>} = 0$. Если кривизна κ_{32} отлична от нуля, то из уравнений (8.3) необходимо следует $dS_{<33>} = 0$.

Независимые условия совместности $dS_{<11>} = 0$ и $dS_{<22>} = 0$ после исключения из них величины $d\varepsilon_2$ с помощью условия несжимаемости позволяют сформулировать систему двух уравнений второго порядка относительно $d\varepsilon_1$ и $d\varepsilon_3$. Главная часть этой системы есть

$$\begin{aligned} d_3d_3d\varepsilon_1 + d_3d_3d\varepsilon_3 + \cdots &= 0, \\ -\,d_3d_3d\varepsilon_1 - d_1d_1d\varepsilon_3 + \cdots &= 0. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} N_{<3>}^2 & N_{<3>}^2 \\ -N_{<3>}^2 & N_{<1>}^2 \end{vmatrix} = 0,$$

где $N_{<j>}$ — физические компоненты вектора нормали $\mathbf{N}$ к характеристическому элементу относительно базиса $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, при условии $N_{<1>}^2 + N_{<3>}^2 = 1$ приобретает вид

$$N_{<3>}^2(N_{<3>}^2 - N_{<1>}^2) = 0$$

и имеет четыре действительных корня: $N_{<3>} = 0$ (корень кратности два), $N_{<3>} = 1/\sqrt{2}$, $N_{<3>} = -1/\sqrt{2}$, т.е. система уравнений $dS_{<11>} = 0$ и $dS_{<22>} = 0$ принадлежит к гиперболическому типу; направления, ортогональные третьей главной оси напряжений, — характеристические, а остальные характеристические направления делят пополам углы между главными осями напряжений 1 и 3. Следовательно, характеристиками системы уравнений совместности приращений деформаций $dS_{<11>} = 0$ и $dS_{<22>} = 0$ будут изостаты, ортогональные третьему главному направлению, и линии скольжения.

В осесимметричном случае соотношения Коши, связывающие приращения тензора малых деформаций с приращениями перемещений, в криволинейной ортогональной координатной сетке линий главных напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & 0 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ 0 \\ du_{<3>} \end{pmatrix}, \tag{8.4}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ 0 \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0. \tag{8.5}$$

Следовательно, условие несжимаемости и соосности тензора напряжений и тензора скоростей пластических деформаций в сетке линий главных напряжений можно представить как

$$\begin{aligned} &(\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1)du_{<1>} + (\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3)du_{<3>} = 0, \\ &(-\kappa_{12} + d_3)du_{<1>} + (-\kappa_{32} + d_1)du_{<3>} = 0. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Характеристическое уравнение этой системы

$$N_{<1>}^2 - N_{<3>}^2 = 0$$

при условии

$$N_{<1>}^2 + N_{<3>}^2 = 1$$

имеет два действительных различных корня, что указывает на гиперболичность приведенной выше системы уравнений. Характеристические линии являются линиями скольжения.

Литература

[1] Ивлев, Д.Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска, и его обобщениях / Д.Д. Ивлев // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124. – №3. – С. 546–549.(См. также: Ивлев, Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности / Д.Д. Ивлев. – М.: Физматлит, 2001. – С. 15–20.)

[2] Ивлев, Д.Д. О выводе соотношений, определяющих пластическое течение при условии полной пластичности / Д.Д. Ивлев // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. – 1959. – №3. – С. 137.(См. также: Ивлев Д.Д. Механика пластических сред. Т. I. Теория идеальной пластичности. – М.: Физматлит, 2001. – С. 20–21.)

[3] Радаев, Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев. – Самара: Изд-во "Самарский университета", 2004. – 147 с.

[4] Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.

[5] Быковцев, Г.И. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.

[6] Malvern, L. Introduction to the Mechanics of Continuous Medium / L. Malvern. Englewood Cliffs, N. Y.: Prentice – Hall, 1969. 714 p.

[7] Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.

Поступила в редакцию 26/*VI*/2006;
в окончательном варианте — 26/*VI*/2006.

ON KINEMATIC EQUATIONS DETERMINING THREE-DIMENSIONAL PLASTIC FLOW FOR A FACET AND EDGE OF THE TRESCA PRISM

© 2006 Y.N. Radayev[17]

In the present study a system of partial differential equations which describes kinematic of three-dimensional plastic flow for the states corresponding to an edge of the Tresca prism is obtained. The system includes the Cauchy equations and the compatibility equations formulated for displacements and strains increments. These equations are then analysed by the aid of the triorthogonal isostatic co-ordinate net. The system of kinematic equations is shown correctly determines displacements increments and be of the hyperbolic type. Relations for the displacements increments valid along principal stress lines are derived. Kinematic of plane and axial symmetric plastic flow are separately considered for each case. Kinematic equations for states corresponding to a facet of the Tresca prism which are of the less importance are also examined.

Paper received 26/*VI*/2006.
Paper accepted 26/*VI*/2006.

[17]Radayev Yuri Nickolaevich (`radayev@ssu.samara.ru`), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.