УДК 539.3

ЛУЧЕВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ИЗУЧЕНИИ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕПЛОСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН[1]

© 2006 Е.А. Герасименко, В.Е. Рагозина[2]

На основе обобщения теории геометрических и кинематических условий совместности разрывов на случай задания движущейся поверхности разрывов в криволинейной системе координат излагается способ построения приближенных решений краевых задач ударного деформирования лучевым разложением в прифронтовой области. Обсуждаются нелинейные эффекты в закономерностях распространения одномерных цилиндрических ударных волн в зависимости от характера предварительных деформаций, построено приближенное решение с цилиндрической продольной расходящейся ударной волной.

Введение

Приближенный метод построения решений краевых задач для линейных и квазилинейных систем уравнений в окрестностях поверхностей разрывов, называемый лучевым методом, широко используется в теории пластического течения и в динамике деформирования. Его развитие непосредственным образом связано с исследованиями ученых Самарского государственного университета [1, 2]. Не случайно наиболее полный и наиболее квалифицированный обзор работ, обобщающий этот метод [3], был посвящен светлой памяти Г.И. Быковцева, долгое время возглавлявшего кафедру механики деформируемого твердого тела Самарского госуниверситета. Именно профессором Г.И. Быковцевым вместе с учениками была разработана теория рекуррентных условий совместности разрывов функций и их производных на движущихся поверхностях разрывов, обобщающая представления Т. Томаса [4] для геометрических и кинематических условий совместно-

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.
[2]Герасименко Екатерина Андреевна (ekaterina_gerasi@mail.ru), Рагозина Виктория Евгеньевна (ragozina@vlc.ru), Институт автоматики и процессов управления ДВО РАН, 690041, Россия, г. Владивосток, ул. Радио, 5.

сти разрывов. С использованием таких рекуррентных ограничений, накладываемых на разрывы геометрией и кинематикой движущейся поверхности разрывов, были построены приближенные решения целого ряда краевых задач идеальной пластичности [1], гиперболической теории теплообмена [2], динамики линейной [5] и нелинейной [6] упругой среды. Использовались эти зависимости и для изучения условий существования ударных волн [7, 8]. Позднее на данной основе был предложен способ построения приближенных решений краевых задач ударного деформирования [9, 10]. Оказалось, что с помощью построенных таким образом прифронтовых разложений решений возможно построение алгоритмов отслеживания положений волновых фронтов в процессе численного решения краевых задач ударного деформирования [11, 12].

Часто решение краевой задачи вследствие ее симметрии существенно упрощается при использовании соответствующей криволинейной системы координат. Однако теория, построенная Г.И. Быковцевым [13], изначально подразумевает прямоугольную декартову систему координат. Отдельные условия совместности в криволинейных координатах записаны в [14]. Ранее [15] нами были получены рекуррентные соотношения, аналогичные [13] в произвольной системе координат, что потребовало новых корректных определений для δ-производных по времени от функций, определенных как в пространстве, так и на движущейся поверхности. Настоящей статьей иллюстрируем использование этих соотношений при изучении закономерностей распространения одномерных ударных возмущений при наличии цилиндрической симметрии.

1. Условия совместности разрывов в криволинейных координатах

Для описания положения частиц сплошной среды и их движения в евклидовом пространстве E^3 введем две пространственные стационарные системы координат: произвольную криволинейную систему координат x^i ($i = 1, 2, 3$) и декартову систему координат z_i. Всюду в дальнейшем, если не оговорено иное, латинские индексы принимают значения $1, 2, 3$. Ко- и контравариантный метрический тензор (g_{ij} и g^{ij}), а также символы Кристоффеля 1-го и 2-го рода ($\Gamma_{i,jk}$ и Γ^i_{jk}) вычисляются по стандартным формулам:

$$\begin{gathered} g_{ij} = \frac{\partial z_k}{\partial x^i}\frac{\partial z_k}{\partial x^j}, \quad g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j, \\ \Gamma^i_{jk} = g^{im}\Gamma_{m,jk}, \quad \Gamma_{m,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m}\right). \end{gathered} \tag{1.1}$$

В (1.1) и в дальнейшем принято суммирование по повторяющимся индексам. Рассмотрим в E^3 гладкую поверхность $\Sigma(t)$, положение которой с течением времени задается уравнениями $x^i = x^i\left(y^1, y^2, t\right)$, и каждая ее точка движется в направлении своей единичной нормали с сохранением постоянных значений y^1, y^2, так что

$$\dot{x}^i\left(y^\alpha, t\right) = G\nu^i. \tag{1.2}$$

В (1.2) и далее греческие индексы принимают значения $1,2$; G — скорость поверхности Σ в направлении нормали.

Во многих задачах механики и математической физики часто необходимо проследить изменение со временем различных по типу тензорных полей в данной точке $\Sigma(t)$. В качестве характеристики такого изменения используют δ-производную по времени. Исходно определение δ-производной записывалось для декартовой пространственной системы координат. Однако есть много случаев движения Σ с ненулевой гауссовой кривизной, для которых особенности решения удобнее изучать в пространственных криволинейных координатах. Один из простейших примеров — движение одномерных цилиндрических или сферических волн. Для решения таких задач необходимо уточнение операции δ-дифференцирования, но в согласовании со следующими требованиями: δ-производная должна определять тензорный объект; различные виды δ-дифференцирования не должны противоречить друг другу; для предельного случая перехода от x^i к z_i δ-производные должны вычисляться по известным классическим формулам [13]. В зависимости от типа тензорного поля δ-производная должна определяться по-разному.

Рассмотрим, к примеру, как вычисляется δ-производная для поля тензора, заданного всюду в рассматриваемой области и, в частности, на Σ, т.е. тензора вида $A^i_j\left(x^k\left(y^\alpha, t\right), t\right)$. Для этого проведем дифференцирование инвариантного объекта $A^i_j \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}_i$, где $\boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}^j$ — ко- и контравариантные базисные векторы системы x^i. Для такого объекта получим:

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(A^i_j \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}_i\right)\Big|_{y^\alpha=\text{const}} = \frac{dA^i_j}{dt}\Big|_{y^\alpha=\text{const}} \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}_i + A^i_j \frac{d\boldsymbol{e}^j}{dt}\Big|_{y^\alpha=\text{const}} \boldsymbol{e}_i + \\
+ A^i_j \boldsymbol{e}^j \frac{d\boldsymbol{e}_i}{dt}\Big|_{y^\alpha=\text{const}} = \left\{\frac{\partial A^i_j}{\partial t} + \left(\frac{\partial A^i_j}{\partial x^k} + A^m_j \Gamma^i_{mk} - A^i_m \Gamma^m_{kj}\right) G\nu^k\right\} \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}_i,
\end{gathered} \tag{1.3}$$

где при выводе учтено, что $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_i\left(x^j\right)$, $\boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{e}^i\left(x^j\right)$ и

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{e}_k, \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}^i}{\partial x^j} = -\Gamma^i_{kj} \boldsymbol{e}^k.$$

Из (1.3) следует, что величина в фигурных скобках может быть названа компонентами δ-производной. Она складывается из мгновенного изменения в данной точке пространства и производной вдоль выбранной лучевой траектории.

Другой часто встречаемый случай — тензоры вида $A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_r}\left(y^\alpha, t\right)$, заданные только на Σ, но имеющие пространственные индексы (например, вектор нормали $\nu^i(y^\alpha, t)$). На основании соображений, аналогичных предыдущим, можно получить:

$$\frac{\delta A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_r}}{\delta t} = \frac{\partial A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_r}}{\partial t} + \Big\{ \Gamma^{i_1}_{mk} A^{m i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots j_r} + \cdots + \Gamma^{i_s}_{mk} A^{i_1 i_2 \ldots m}_{j_1 j_2 \ldots j_r} - \\ - \Gamma^{m}_{j_1 k} A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{m j_2 \ldots j_r} - \cdots - \Gamma^{m}_{j_r k} A^{i_1 i_2 \ldots i_s}_{j_1 j_2 \ldots m} \Big\} G \nu^k. \tag{1.4}$$

Отметим, что (1.3) может быть сведена к (1.4), поскольку $A^i_j\left(x^k(y^\alpha, t), t\right) = \tilde{A}^i_j(y^\alpha, t)$, поэтому в качестве основной формулы будем использовать (1.4). Ее интерпретация: (1.4) определяет производную по времени вдоль лучевой траектории.

Для тензоров, которые заданы только на Σ и имеют только поверхностные индексы, к примеру первая $a_{\alpha\beta}(y^\gamma, t)$ и вторая $b_{\alpha\beta}(y^\gamma, t)$ квадратичные формы поверхности, в качестве аксиомы примем

$$\frac{\delta a_{\alpha\beta}}{\delta t} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial t}. \tag{1.5}$$

И последнее. Могут быть тензоры, имеющие пространственные и поверхностные индексы, к примеру, касательные векторы $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}$. Обобщением (1.4, 1.5) будет для них формула

$$\frac{\delta A^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n}}{\delta t} = \frac{\partial A^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n}}{\partial t} + \Big\{ \Gamma^{i_1}_{lk} A^{l i_2 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n} + \cdots + \\ + \Gamma^{i_s}_{lk} A^{i_1 \ldots l\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n} - \Gamma^{l}_{j_1 k} A^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{l j_2 \ldots j_r\, \beta_1 \ldots \beta_n} - \cdots - \Gamma^{l}_{j_r k} A^{i_1 \ldots i_s\, \alpha_1 \ldots \alpha_m}_{j_1 \ldots l\, \beta_1 \ldots \beta_n} \Big\} G \nu^k. \tag{1.6}$$

Перечислим некоторые важные свойства операции, определенной в (1.6), не останавливаясь на их доказательствах, найти которые можно в [15].

Во-первых, δ-производная является тензором того же порядка и типа, что и исходный. Во-вторых, для нее выполняется правило Лейбница дифференцирования произведения. В-третьих, в рассматриваемом случае евклидова пространства вычисление δ-производной перестановочно с операцией тензорного дифференцирования по y^α [15]. В-четвертых, вычисление δ-производной перестановочно по отношению к операции свертывания по латинским или греческим индексам.

Для геометрических характеристик Σ на основании (1.6) получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}\right) = (G\nu^i)_{,\alpha},\\
&\frac{\delta \nu^i}{\delta t} = -a^{\alpha\beta}\frac{\partial x^i}{\partial y^\beta}G_{,\alpha}, \qquad \frac{\delta \nu_i}{\delta t} = -g_{ij}\frac{\partial x^j}{\partial y^\beta}a^{\alpha\beta}G_{,\alpha},\\
&\frac{\delta a_{\alpha\beta}}{\delta t} = -2Gb_{\alpha\beta}, \qquad \frac{\delta a^{\alpha\beta}}{\delta t} = 2Gb^{\alpha\beta},\\
&\frac{\delta b_{\alpha\beta}}{\delta t} = -Gc_{\alpha\beta} + G_{,\alpha\beta}, \qquad \frac{\delta b^{\alpha\beta}}{\delta t} = 3Gc^{\alpha\beta} + a^{\alpha\gamma}a^{\beta\sigma}G_{,\gamma\sigma},\\
&\frac{\delta c_{\alpha\beta}}{\delta t} = a^{\sigma\gamma}\left(b_{\gamma\beta}G_{,\alpha\sigma} + b_{\gamma\alpha}G_{,\beta\sigma}\right),\\
&\frac{\delta c^{\alpha\beta}}{\delta t} = a^{\gamma\alpha}\left(b^{\tau\beta}G_{,\gamma\tau} + 2Gb^{\alpha\beta}c_{\gamma\sigma}\right) + a^{\sigma\beta}\left(b^{\tau\alpha}G_{,\sigma\tau} + 2Gb^{\gamma\alpha}c_{\gamma\sigma}\right).
\end{aligned} \tag{1.7}$$

В формулах (1.7) $c_{\alpha\beta}$ — компоненты третьей квадратичной формы Σ.

Рассмотрим теперь функцию $f\left(x^i, t\right)$, которая соответствует компонентам некоторого тензорного поля, непрерывного и непрерывно дифференцируемого требуемое число раз в рассматриваемой области E^3, кроме поверхности Σ. На Σ функция f или ее производные определенного порядка могут иметь разрывы первого рода. Область, в сторону которой движется Σ, и функции в этой области в дальнейшем обозначаются знаком "+", остальную часть E^3 и функции в ней обозначим знаком "–". На Σ f не определена, но определены ее предельные значения f^+ и f^-, взятые по разные стороны от поверхности Σ. Тогда, вычисляя ковариантную производную $f^{\pm}_{,i}$ и частную производную $\dot f^{\pm}$, получим

$$\begin{aligned}
&f^{\pm}_{,i} = \frac{\partial f^{\pm}}{\partial \nu}\nu_i + a^{\alpha\beta}x^j_\beta f^{\pm}_{,j}x_{i,\alpha},\\
&\dot f^{\pm} = \frac{\delta f^{\pm}}{\delta t} - f^{\pm}_{,j}G\nu^j,\\
&\frac{\partial f^{\pm}}{\partial \nu} = f^{\pm}_{,j}\nu^j, \qquad x_i = g_{ik}x^k.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Здесь и далее индексом после запятой обозначено ковариантное дифференцирование, если не оговорено иное. Из (1.8) можно получить величины, определенные на Σ, — разрывы функции f и ее производных:

$$\begin{aligned}
&[f_{,i}] = \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]\nu_i + a^{\alpha\beta}\,[f]_{,\beta}\,x_{i,\alpha},\\
&\left[\dot f\right] = \frac{\delta\,[f]}{\delta t} - \left[\frac{\partial f}{\partial \nu}\right]G,\\
&[f] = f^+ - f^-.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Соотношения (1.9) носят название геометрических и кинематических условий совместности 1-го порядка.

Для исследования поведения решений в динамических задачах в областях, примыкающих к поверхностям, где имеют разрыв искомая функция или ее производные, применяются различные приближенные методы, в частности, лучевой метод [3, 10]. В нем необходимо знать рекуррентные соотношения на разрывы производных от поля f произвольного порядка. Такие соотношения были получены в [13] для случая декартовой системы координат. В [15] было показано, что в криволинейной пространственной системе координат их обобщением будут соотношения:

$$\left[f^{(k)}_{,i\nu\ldots\nu}\right] = \left[f^{(k)}_{,\nu\ldots\nu}\right]\nu_i + a^{\alpha\beta}x^{\cdot}_{i,\beta}\Bigg\{\left[f^{(k-1)}_{,\nu\ldots\nu}\right]_{,\alpha} -$$
$$-\sum_{s=3}^{k}\sum_{p=0}^{s-3} C^{k-s}_{k-1}(s-1)!\left[f^{(k-s)}_{,\nu\ldots\nu}\right]_{,\alpha}\varkappa_1^{s-2-p}\varkappa_2^{p+1}\Bigg\} +$$
$$+ b^{\alpha\beta}x^{\cdot}_{i,\beta}\sum_{s=2}^{k}\sum_{p=0}^{s-2} C^{k-s}_{k-1}(s-1)!\left[f^{(k-s)}_{,\nu\ldots\nu}\right]_{,\alpha}\varkappa_1^{s-2-p}\varkappa_2^{p},$$

$$\left[f^{(k)}_{,t\nu\ldots\nu}\right] = \frac{\delta\left[f^{(k-1)}_{,\nu\ldots\nu}\right]}{\delta t} - G\left[f^{(k)}_{,\nu\ldots\nu}\right] + (k-1)a^{\alpha\beta}G_{,\beta}\Bigg\{\left[f^{(k-2)}_{,\nu\ldots\nu}\right]_{,\alpha} -$$
$$-\sum_{s=3}^{k-1}\sum_{p=0}^{s-3} C^{k-s-1}_{k-2}(s-1)!\left[f^{(k-s-1)}_{,\nu\ldots\nu}\right]_{,\alpha}\varkappa_1^{s-2-p}\varkappa_2^{p+1}\Bigg\} +$$
$$+(k-1)b^{\alpha\beta}G_{,\beta}\sum_{s=2}^{k-1}\sum_{p=0}^{s-2} C^{k-s-1}_{k-2}(s-1)!\left[f^{(k-s-1)}_{,\nu\ldots\nu}\right]_{,\alpha}\varkappa_1^{s-2-p}\varkappa_2^{p},$$

$$f^{(k)}_{,i\nu\ldots\nu} = f_{,ij\ldots m}\nu^j\ldots\nu^m, \qquad f^{(k)}_{,t\nu\ldots\nu} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{,j\ldots m}\nu^j\ldots\nu^m,$$
$$f^{(k)}_{,\nu\ldots\nu} = f_{,ij\ldots m}\nu^i\nu^j\ldots\nu^m \tag{1.10}$$

причем в формулах для $f^{(k)}_{,i\nu\ldots\nu}$ и $f^{(k)}_{,t\nu\ldots\nu}$ свертка с компонентами $\nu^j\ldots\nu^m$ проводится $(k-1)$-раз, $f_{,ij\ldots m}$ — обозначена k-я ковариантная производная. В (1.10) $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — обозначения, принятые для главных кривизн Σ. Отметим, что область применения полученных формул не ограничивается тематикой настоящей статьи. Они имеют универсальный характер в евклидовом пространстве и могут применяться при решении динамических задач со слабыми волнами или же для задач, включающих стационарные поверхности разрывов и т.д.

2. Модельные соотношения упругой среды с малой нелинейностью

Движение нелинейной изотропной упругой среды в криволинейной пространственной системе координат Эйлера x^i задано уравнениями:

$$
\begin{gathered}
v^i = \dot{u}^i + u^i_{,j} v^j, \qquad \sigma^{ij}_{,j} = \rho\left(\dot{v}^i + v^i_{,j} v^j\right), \\
\alpha_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u^k_{,j}\right), \qquad \sigma^i_j = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{\partial W}{\partial \alpha^j_k}\left(\delta^i_k - 2\alpha^i_k\right), \\
\rho = \rho_0 \left(1 - 2I_1 + 2I_1^2 - 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1 I_2 - \frac{8}{3}I_3\right)^{1/2}, \\
I_1 = \alpha^i_i, \qquad I_2 = \alpha^i_j \alpha^j_i, \qquad I_3 = \alpha^i_j \alpha^j_k \alpha^k_i, \\
\dot{u}^i = \frac{\partial u^i}{\partial t}, \qquad u^i_{,j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{jk} u^k, \qquad u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - \Gamma^k_{ij} u_k.
\end{gathered}
\tag{2.1}
$$

Здесь u^i и v^i — компоненты векторов перемещения и скорости; α_{ij} — компоненты тензора деформаций Альманси; σ^i_j — смешанные компоненты тензора напряжений Эйлера–Коши; ρ и ρ_0 — плотность среды в текущем и свободном состоянии; W — функция упругого потенциала среды. Система (2.1) определяет движение среды всюду, где входящие в нее функции непрерывны и дифференцируемы требуемое число раз. Этой системе соответствует адиабатическое приближение, означающее постоянство энтропии в области, где выполняется (2.1). Для конкретизации типа нелинейно-упругой среды зададим функцию W ее разложением в ряд Тейлора в окрестности свободного состояния. Если считать среду изотропной, то это разложение можно провести по инвариантам тензора деформаций:

$$
W = \frac{\lambda}{2}I_1^2 + \mu I_2 + l I_1 I_2 + m I_1^3 + n I_3 + \xi I_2^2 + \eta I_1^2 I_2 + \varkappa I_1 I_3 + \chi I_1^4 + \cdots. \tag{2.2}
$$

В (2.2) λ, μ — упругие модули второго порядка; l, m, n — модули третьего порядка; ξ, η, $\varkappa$, χ — модули четветого порядка; многоточием обозначены слагаемые более высоких порядков малости по деформациям. Ограничимся в дальнейшем представлением (2.2), тем самым считая, что среда имеет малую нелинейность. Объединение (2.1) и (2.2) приводит к замкнутой системе уравнений нелинейно-упругой изотропной среды. Для некоторых из рассматриваемых в дальнейшем задач, в которых нас будут интересовать прежде всего сдвиговые деформационные процессы, принимается модель несжимаемой изотропной нелинейно-упругой среды ($\rho \equiv \rho_0$). Для несжимаемой среды $W = W(I_1, I_2)$, а в представлении степенным рядом

$$
W = (a - \mu)I_1 + aI_2 + bI_1^2 - \varkappa I_1 I_2 - \theta I_1^3 + cI_1^4 + dI_2^2 + kI_1^2 I_2 + \cdots, \tag{2.3}
$$

в которой учтено, что в этом случае $I_1 \leqslant 0$, $I_2 \geqslant 0$, так что все упругие постоянные в (2.3) μ, a, b, $\varkappa$, θ, c, d, k положительны.

В основе построения модели упругого тела лежат законы сохранения массы, импульса и энергии, следствиями которых в дифференциальной форме являются уравнения (2.1). Предположение о разрывах функций, входящих в (2.1), имеющих место на движущихся в пространстве поверхностях, позволяет определить понятие обобщенного решения. Для такого типа решения малая по толщине область быстрого изменения характеристик задачи заменяется на поверхность разрывов. В дальнейшем будем рассматривать поверхности разрывов градиента перемещений — ударные или сильные волны. На ударных волнах не выполняются уравнения (2.1), но справедливы динамические условия совместности, следующие из интегральных законов сохранения:

$$\begin{aligned}
&\left[\rho\left(v^i\nu_i - G\right)\right] = 0,\\
&\left[\sigma^{ij}\right]\nu_j = \rho^+\left(v^{j+}\nu_j - G\right)\left[v^i\right],\\
&\sigma^{ij+}\left[v_i\right]\nu_j = \rho^+\left(v^{j+}\nu_j - G\right)\left(\frac{[v_i]\left[v^i\right]}{2} - [e]\right) - \left[q^j\right]\nu_j.
\end{aligned}\tag{2.4}$$

Первое уравнение в (2.4) — следствие закона сохранения массы, второе — закона сохранения импульса, третье — закона сохранения энергии, причем в нем e — удельная плотность внутренней энергии, q^i — компоненты вектора теплового потока. Кроме динамических условий совместности на Σ разрывы функций связаны геометрическими и кинематическими условиями совместности (1.9), а разрывы их производных k-го порядка условиями (1.10).

3. Возможные скорости и типы одномерных цилиндрических ударных волн

Рассмотрим в цилиндрической системе координат $x^1 = r$, $x^2 = \phi$, $x^3 = z$ случай, когда физические проекции вектора перемещений u_r, u_ϕ, u_z зависят только от r, t, причем это выполнено как для предварительных деформаций, так и для послеударного процесса. В соответствии с типом задачи вектор нормали возможных ударных волн имеет компоненты $\nu_r = \pm 1$, $\nu_\phi = \nu_z = 0$. В дальнейшем рассмотрим случай расходящихся волн, т.е. $\nu_r = 1$. В качестве основной характеристики разрыва на Σ выберем вектор

$$\begin{aligned}
&\left[u^i_{,j}\right]\nu^j = \tau\nu^i + \gamma\mu^i,\\
&\tau = \left[u^i_{,j}\right]\nu^j\nu_i, \qquad \mu^i\mu_i = 1, \qquad \nu^i\mu_i = 0,
\end{aligned}\tag{3.1}$$

который выделяет нормальную составляющую разрыва τ и ортогональное дополнение $\gamma\mu^i$, вычисляемое проектированием на касательную к Σ плоскость. Проекции $\gamma\mu^i$ на касательные векторы $\dfrac{\partial x^i}{\partial y^\alpha}$ обозначим τ^α, тогда для нашей задачи

$$\tau = [u_{r,r}], \qquad \tau^1 = \left[\frac{\partial u^2}{\partial r}\right] = \frac{1}{r}\left[u_{\phi,r}\right], \qquad \tau^2 = \left[\frac{\partial u^3}{\partial r}\right] = [u_{z,r}],$$

$$u_{r,r} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad u_{\phi,r} = \frac{\partial u_\phi}{\partial r}, \qquad u_{z,r} = \frac{\partial u_z}{\partial r}.$$

В дальнейшем будем работать с более удобными физическими проекциями:

$$\tau_r = \tau, \qquad \tau_\phi = r\tau^1, \qquad \tau_z = \tau^2. \tag{3.2}$$

Вычислив согласно (2.1) тензоры деформаций α_{ij} и напряжений σ_{ij} и подставляя их наряду с (3.1) и (3.2) в динамическое условие совместности, следующее из закона сохранения импульса (второе из уравнений (2.4)), приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered} F\tau_r + K\tau_\phi + L\tau_z + M\tau_r\tau_\phi + N\tau_r\tau_z = 0, \\ P\tau_r + Q\tau_\phi + R\tau_z + S\tau_r\tau_\phi + T\tau_\phi\tau_z = 0, \\ V\tau_r + W\tau_\phi + X\tau_z + Y\tau_r\tau_z + Z\tau_\phi\tau_z = 0. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Коэффициенты, входящие в (3.3), являются функциями предварительных деформаций u_r/r, u_ϕ/r, u_z/r, $u_{r,r}$, $u_{\phi,r}$, $u_{z,r}$, $g_1 = \dot{u}_r/C_1$, $g_2 = \dot{u}_\phi/C_1$, $g_3 = \dot{u}_r/C_2$, $g_4 = \dot{u}_\phi/C_2$, компонент волнового вектора разрывов τ_r, τ_ϕ, τ_z, скорости волны G, а также упругих модулей среды; $C_1 = \sqrt{\lambda + 2\mu/\rho_0}$ и $C_2 = \sqrt{\mu}/\rho_0$ соответствуют скоростям продольной и поперечной волн в линейном приближении.

Для большей наглядности формул знак "+" у всех величин, соответствующих деформациям перед Σ, опущен. При записи (3.3) предполагалось, что каждая из величин $u_{r,r}$, $u_{\phi,r}$, $u_{z,r}$, $\frac{u_r}{r}$, $\frac{u_\phi}{r}$ является малой как до Σ, так и после, а также то, что τ_r, τ_ϕ, τ_z — малые величины одного порядка малости с деформациями. Из (3.3) получаем три возможные скорости ударных волн. Предполагая $G \approx C_1 + \ldots$, где многоточием обозначены все невыписанные нелинейные слагаемые, из последних двух уравнений в (3.3) получим следующие соотношения для компонент разрыва:

$$\begin{gathered} \tau_\phi \approx \left(A_1\frac{u_\phi}{r} + A_2 u_{\phi,r}\right)\tau_r, \qquad \tau_z \approx A_2 u_{z,r}\tau_r, \\ A_1 = 1 + A_0, \qquad A_2 = -2 - A_0, \qquad A_0 = \frac{3\mu - l - \frac{3}{2}n}{\lambda + \mu}, \end{gathered} \tag{3.4}$$

откуда следует, что на такой волне поперечные составляющие разрыва имеют второй порядок малости по отношению к продольной. Из (3.4) следует, что на этой волне поперечные составляющие изменяются неравноправно: если приближенно считать $\alpha_{rz} \approx \frac{u_{z,r}}{2}$ и $\alpha_{r\phi} \approx \frac{1}{2}\left(u_{\phi,r} - \frac{u_\phi}{r}\right)$, то из (3.4) получим $\tau_\phi \approx 2A_2\alpha_{r\phi}\tau_r - \frac{u_\phi}{r}\tau_r$, $\tau_z \approx 2A_2\alpha_{rz}\tau_r$. Определим плоскость поляризации волны положением векторов $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\mu}$. Для $\boldsymbol{\mu}$ из (3.4) следует:

$$\frac{\mu_\phi}{\mu_z} = \frac{\tau_\phi}{\tau_z} \approx \frac{u_{\phi,r} - \frac{u_\phi}{r}}{u_{z,r}} - \frac{\frac{u_\phi}{r}}{A_2 u_{z,r}}. \tag{3.5}$$

Если перед ударной волной присутствуют только скручивающие деформации $\left(u_{z,r} = 0, \quad u_{\phi,r} \neq 0\right)$ или же только антиплоская деформация $\left(u_{z,r} \neq 0, \quad u_{\phi,r} = u_{\phi} = 0\right)$, то в этих случаях из (3.5) следует неизменность типа деформации за волной. Такое же заключение невозможно сделать в общем случае произвольных предварительных деформаций: для них может поменяться направленность предварительного сдвига, причем изменение это зависит от текущего положения волны (от r) и от констант материала, что отличает рассматриваемый случай от плоских ударных волн, где вектор $\boldsymbol{\mu}$ полностью определялся только предварительными сдвиговыми деформациями [10]. В соответствии с принятой в литературе терминологией, назовем эту волну квазипродольной. С учетом (3.4) из (3.3) для ее скорости получим:

$$\begin{aligned} G^I \quad \approx \quad & C_1 \Big\{ 1 + a_1\tau_r + a_2 u_{r,r} + a_3 g_1 + a_4 \frac{u_r}{r} + a_5 \tau_r^2 + \\ & + a_6 u_{r,r}\tau_r + a_7 g_1 \tau_r + a_8 \frac{u_r}{r}\tau_r + a_9 u_{r,r}^2 + a_{10} u_{r,r} g_1 + \\ & + a_{11} \frac{u_r}{r} u_{r,r} + a_{12} u_{\phi,r}^2 + a_{13} \frac{u_\phi}{r} u_{\phi,r} + a_{14} u_{z,r}^2 + \\ & + a_{15} g_1^2 + a_{16} \frac{u_r}{r} g_1 + a_{17} \frac{u_\phi}{r} g_2 + a_{18} \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + a_{19} \left(\frac{u_\phi}{r}\right)^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Коэффициенты a_i здесь являются функциями упругих модулей. Скорость G^I в линейном приближении зависит от поля предварительных объемных деформаций и от τ_r. Зависимость G^I от сдвиговых деформаций и их разрывов является эффектом более высокого порядка малости. Если предварительные сдвиговые деформации отсутствуют, то на основании (3.4) волна становится чисто продольной.

Теперь рассмотрим волны, для которых продольная составляющая разрыва мала относительно поперечных. Эти волны в дальнейшем будем называть квазипоперечными. Считая для них $G \approx C_2 + \ldots$, из (3.3) можно получить две различные формулы для скорости. Обозначим $G = G^{II}$ или $G = G^{III}$ в соответствии с номером уравнения в (3.3), откуда была вычислена скорость. Из первого уравнения (3.3) для τ_r получим:

$$\tau_r = -\frac{A_1}{2}\Psi - A_0 \frac{u_\phi}{r}\tau_\phi + \cdots, \qquad \Psi = \left[u_{\phi,r}^2 + u_{z,r}^2\right]. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что для квазипоперечных волн для цилиндрических задач условие $\Psi = 0$ не влечет за собой $\tau_r = 0$, что выполнялось для плоских одномерных волн [10]. Отметим, что в (3.4), (3.7) везде присутствует константа A_0, определяемая упругими модулями λ, μ, l, n, которая в рассматриваемом приближении отвечает за взаимодействие различных процессов деформации. С учетом (3.7) из остальных уравнений (3.3) получим:

$$
\begin{aligned}
G^{II} \approx C_2 \Big\{ & 1 + b_1 u_{r,r} + b_2 g_3 + b_3 \frac{u_r}{r} + b_4 \tau_\varphi^2 + b_5 u_{\varphi,r} \tau_\varphi + \\
& + b_6 \frac{u_\varphi}{r} \tau_\varphi + b_7 \tau_z^2 + b_8 u_{z,r} \tau_z + b_9 u_{r,r}^2 + b_{10} u_{r,r} g_3 + \\
& + b_{11} \frac{u_r}{r} u_{r,r} + b_{12} u_{\varphi,r}^2 + b_{13} \frac{u_\varphi}{r} u_{\varphi,r} + b_{14} u_{z,r}^2 + \\
& + b_{15} \frac{u_\varphi}{r} g_4 + b_{16} \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + b_{17} \left(\frac{u_\varphi}{r}\right)^2 + \cdots \Big\}.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Формула для G^{III} аналогична (3.8), но следует помнить, что входящие в них функции различны. Коэффициенты в формуле для G^{III} обозначим d_i. Как и прежде b_i, d_i являются алгебраической суммой упругих модулей.

На каждой из волн Σ^{II}, Σ^{III}, которым соответствуют найденные скорости G^{II}, G^{III}, кроме (3.7) есть еще одно условие, связывающее между собой τ_r, τ_φ, τ_z. Эти условия определяются из (3.3) после исключения из этой системы G^{II} или G^{III}. Так, для значения скорости G^{II} выполняется:

$$
\begin{aligned}
& \tau_\varphi u_{z,r} \left\{ h_1 \tau_\varphi + h_2 u_{\varphi,r} + h_3 \frac{u_\varphi}{r} \right\} + \tau_z \Big\{ h_4 \frac{u_r}{r} + h_5 \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + \\
& + h_6 \frac{u_r}{r} u_{r,r} + h_7 \left(\frac{u_\varphi}{r}\right)^2 + h_8 \frac{u_\varphi}{r} u_{\varphi,r} + h_9 u_{\varphi,r}^2 + h_{10} u_{z,r}^2 + \\
& + h_{11} u_{z,r} \tau_z \Big\} + \tau_\varphi \tau_z \left\{ h_{12} u_{\varphi,r} + h_{13} \frac{u_\varphi}{r} \right\} + \cdots = 0.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

В (3.9) $h_i = h_i(\lambda, \mu, l, m, n, \varkappa, \chi, \eta, \xi)$, $i = 1, \ldots, 13$. За исключением частного случая, когда $h_4 = 4 - \dfrac{3n}{2\mu}$ обращается в ноль, следствием (3.9) будет невозможность на Σ^{II} совместно присутствия τ_φ и τ_z одного порядка малости. Поскольку экспериментальные данные дают отрицательные значения модулей l, m, n, то можно считать, что это выполняется для любых нелинейно–упругих сжимаемых материалов. Для них наличие предварительных объемных деформаций, созданных за волной Σ^I, приводит к условию

$$
\tau_z \approx -\frac{h_1 \tau_\varphi + h_2 u_{\varphi,r} + h_3 \frac{u_\varphi}{r}}{h_4 \frac{u_r}{r} + \cdots} \tau_\varphi u_{z,r} + \cdots . \tag{3.10}
$$

Из (3.10) можно сделать вывод, что баланс между τ_φ и τ_z на Σ^{II} также определяется не только предварительными деформациями, но и видом среды (ее модулями) и расстоянием до нагружаемой поверхности. Также из полученного условия следует, что на Σ^{II} основной составляющей разрыва оказывается τ_φ, а τ_r и τ_z имеют относительно нее второй порядок малости, если считать, что $u_{\varphi,r}$, $u_{z,r}$, $\dfrac{u_\varphi}{r}$, $\dfrac{u_r}{r}$ — величины одного порядка малости.

По аналогии с (3.9) для скорости G^{III} также есть связь между τ_ϕ и τ_z:

$$\begin{aligned}
\tau_\phi \left\{ e_1 \frac{u_r}{r} + e_2 \left(\frac{u_r}{r}\right)^2 + e_3 \frac{u_r}{r} u_{r,r} + e_4 \frac{u_\phi}{r} u_{\phi,r} + e_5 \left(\frac{u_\phi}{r}\right)^2 + \right.\\
\left. + e_6 u_{\phi,r}^2 + e_7 u_{z,r}^2 + e_8 \frac{u_\phi}{r} \tau_\phi + e_9 u_{\phi,r} \tau_\phi \right\} +\\
+ \tau_z \left\{ e_{10} u_{\phi,r} u_{z,r} + + e_{11} u_{\phi,r} \tau_z + e_{12} \frac{u_\phi}{r} u_{z,r} + e_{13} \frac{u_\phi}{r} \tau_r \right\} +\\
+ e_{14} \tau_\phi \tau_z u_{z,r} + \dots = 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$e_i = e_i\left(\lambda, \mu, l, m, n, \varkappa, \chi, \eta, \xi\right), \quad i = 1, \dots, 14$$

причем $e_1 = -h_4$, что определяет на Σ^{III} ситуацию, обратную рассмотренной выше:

$$\tau_\phi \approx -\frac{e_{10} u_{\phi,r} u_{z,r} + e_{11} u_{\phi,r} \tau_z + e_{12} \frac{u_\phi}{r} u_{z,r} + e_{13} \frac{u_\phi}{r} \tau_z}{e_1 \frac{u_r}{r} + \cdots} \tau_z + \cdots . \tag{3.12}$$

Т.е. на Σ^{III} основная составляющая разрыва — τ_z, а остальные — малые более высокого порядка.

До сих пор был оставлен открытым вопрос о том, какая из квазипоперечных волн движется быстрее. С целью ответа на него рассмотрим два наиболее типичных случая предварительных деформаций в среде. Предположим, во-первых, что до момента ударного воздействия в среде есть объемные и антиплоские деформации, т.е. до прохождения Σ^I $u_r^+ \neq 0$, $u_z^+ \neq 0$, $u_\phi^+ = 0$. Из (3.5) в этом случае получим, что за Σ^I поле деформаций не меняет своего типа. Провести точный сравнительный анализ G^{II} и G^{III} невозможно, поскольку предварительные деформации, входящие в формулы для них, в (3.8), вообще говоря, различные. Тем не менее, известно, что на каждой из этих волн τ_r меняется очень мало. Для послеударных времен, когда Σ^{II} не отходит далеко от Σ^{III}, это позволяет приближенно считать $u_r^+\big|_{\Sigma^{II}} \approx u_r^+\big|_{\Sigma^{III}}$ и $u_{r,r}^+\big|_{\Sigma^{II}} \approx u_{r,r}^+\big|_{\Sigma^{III}}$. Тогда, отбрасывая в формулах скоростей квадратичные слагаемые, получим

$$G^{II} - G^{III} \approx (b_3 - d_3) \frac{u_r}{r}, \tag{3.13}$$

откуда можно считать $G^{II} < G^{III}$, если только $u_r > 0$ (т.е. для ударных волн сжатия). Полученная оценка будет справедлива не только для рассматриваемого частного случая предварительных деформаций. В соответствии с ней квазипоперечная волна, на которой в основном меняется антиплоская деформация, движется быстрее, чем волна, которая изменяет прежде всего кручение среды. Пусть теперь для нашего случая за Σ^I идет Σ^{III}; учитывая, что $u_\phi^+\big|_{\Sigma^{III}} = 0$, из (3.12) получим

$$\tau_\phi\big|_{\Sigma^{III}} = 0, \qquad \tau_z|_{\Sigma^{III}} \neq 0, \qquad \tau_r|_{\Sigma^{III}} \ll \tau_z. \tag{3.14}$$

Следом за Σ^{III} движется Σ^{II}, на которой выполняется условие (3.10).

Остановимся на вопросе о возможности существования нейтральных волн для нашей задачи. Напомним [10], что в теории плоских одномерных волн нейтральной названа волна, на которой $\tau = 0$ и предварительный сдвиг меняет свое направление, не меняя при этом интенсивности. Для таких волн скорость распространения зависит только от предварительных деформаций среды. Нейтральной волне предшествует волна, изменяющая интенсивность предварительного сдвига, не меняя направления. В нашей задаче Σ^{III} действительно меняет только интенсивность сдвига. Проверим, может ли волна Σ^{II} быть нейтральной в смысле приведенного выше определения. Если это так, то кроме (3.10) необходимо считать $\Psi = \left[u^2_{\phi,r} + u^2_{z,r}\right] = 0$. Из условия $u^+_{\phi,r}\Big|_{\Sigma^{II}} = u^+_{\phi}\Big|_{\Sigma^{II}} = 0$ и из (3.7) это эквивалентно требованию $\tau_r = 0$. Но совместное выполнение (3.10) и $\Psi = 0$ приводит к тому, что $\tau_\phi\Big|_{\Sigma^{II}} = \tau_z|_{\Sigma^{II}} = 0$, что невозможно. Таким образом, для приведенной задачи невозможно появление нейтральной волны.

Рассмотрим еще один вариант предварительного деформирования, считая теперь $u^+_r \neq 0$, $u^+_\phi \neq 0$, $u^+_z = 0$. Здесь на Σ^I остается тот же вариант деформаций, что и перед ней. Но теперь у нас нет квазипоперечной волны, меняющей только направление сдвига: действительно, за Σ^I идет Σ^{III}, на которой из (3.12):

$$\tau_\phi \approx -\frac{e_{11}u_{\phi,r} + e_{13}\dfrac{u_\phi}{r}}{e_1\dfrac{u_r}{r} + \cdots}\tau_z^2 + \cdots \tag{3.15}$$

Поэтому за Σ^{III} появляются все виды деформаций. Тогда на следующей волне Σ^{II} имеем условие (3.10). Ни одна из этих волн не может быть нейтральной, поскольку в нашем случае условие $\tau_r = 0$ означает, что $\Psi = \tau_\phi = 0$ и тем самым $\tau_z = 0$. Если же ослабить требования и считать, что на нейтральной волне наряду с поворотом предварительного сдвига может присутствовать слабое изменение продольного скачка τ_r, то все равно получаем, рассматривая остальные требования, очень жесткие условия на предварительные деформации, скачки и модули среды, связанные, кроме того, с текущим положением волны. Эти условия вряд ли можно выполнить при наличии произвольного ударного воздействия. Проведенное исследование позволяет говорить о том, что для одномерных цилиндрических ударных волн понятие нейтральной волны (ударной волны круговой поляризации) не должно иметь место и в общем случае.

4. Лучевое разложение решений одномерных цилиндрических задач с ударными волнами

Лучевым методом называют способ построения краевых задач динамики сплошных сред путем разложения искомого решения в ряд по типу ряда Тейлора за подвижной поверхностью разрывов. Такое разложение может проводиться по временной или лучевой координате. Последняя представляет собой расстояние, отсчитываемое от поверхности разрывов до данной точки пространства по соответствующему этой точке лучу. В случае слабых волн можно получить и последовательно интегрировать обыкновенные дифференциальные уравнения на коэффициенты лучевого ряда. Для задач с ударными волнами прямое интегрирование невозможно, но модификация метода, предложенная А.А. Бурениным [9, 10], позволяет и в этом случае получить решение, когда послеударное время мало. Таким образом были получены решения ряда одномерных краевых задач с плоскими ударными волнами. Однако такой метод решения можно с успехом перенести на задачи с криволинейными граничными поверхностями, в том числе многомерные задачи, когда необходимо определять геометрию лучевых координат [11]. В настоящей статье в качестве иллюстрации применения лучевого метода и полученных ранее условий совместности разрывов рассмотрим более простую одномерную задачу о нормальном ударе по внутренней границе цилиндрической полости в пространстве, заполненном сплошной средой.

В результате нормального нагружения на внутренней поверхности бесконечного кругового цилиндра радиуса r_0 его граница $L(t)$ начинает двигаться по закону

$$\begin{gathered} u_r\Big|_{L(t)} = g(t), \qquad t \geqslant 0, \\ g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} g_n t^n, \qquad g_1 > 0, \qquad L(t) = r_0 + g(t). \end{gathered} \tag{4.1}$$

В (4.1) условие $g_1 > 0$ означает, что воздействие на $L(t)$ сразу создает расходящуюся продольную ударную волну. Функция $g(t)$, определяющая закон движения, представлена рядом Маклорена. Количество членов этого ряда можно ограничить в зависимости от требуемой точности решения. Например, если в искомом решении приемлемо оставить слагаемые до второго порядка по времени, то для $g(t)$ можно принять квадратичную зависимость

$$g(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}. \tag{4.2}$$

С целью упрощения дальнейших выкладок предположим отсутствие в среде предварительных деформаций. Тогда на фронте ударной волны $\Sigma(t)$ получим два краевых условия:

$$\begin{gathered} u_r\Big|_{\Sigma(t)} = 0, \\ \tau_r\Big|_{\Sigma(t)} = -u^-_{r,r}\Big|_{\Sigma(t)}, \qquad \Sigma(t) = r_0 + \int\limits_0^t G(\xi)d\xi. \end{gathered}$$

Искомое решение для поля перемещений представим рядом

$$
\begin{gathered}
u(r,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \varkappa_n \bigg|_{t=t_\Sigma} (t - t_\Sigma)^n\,, \\
t_\Sigma(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{d\xi}{G(\xi)}, \qquad \varkappa_n = \left[\frac{\partial^n u}{\partial t^n}\right]\bigg|_{t=t_\Sigma}.
\end{gathered}
\tag{4.3}
$$

В нашем случае лучевая координата совпадает с радиальной r, под $u(r,t)$ будем понимать единственную ненулевую компоненту u_r вектора перемещений, относительно нее предполагаем сколь угодно высокую гладкость в окрестности $L(t)$.

Из геометрических и кинематических условий совместности (1.9) в рассматриваемом случае следует

$$
\begin{gathered}
[u_{,r(s)}] = G^{-1}\left(\frac{\delta\varkappa_s}{\delta t} - \varkappa_{s+1}\right), \\
[u_{,rr(s)}] = -G^{-3}\frac{\delta G}{\delta t}\left(\frac{\delta\varkappa_s}{\delta t} - \varkappa_{s+1}\right) + G^{-2}\left(\frac{\delta^2\varkappa_s}{\delta t^2} - 2\frac{\delta\varkappa_{s+1}}{\delta t} + \varkappa_{s+2}\right).
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

Закон сохранения импульса на поверхности разрывов (второе из соотношений 2.4) сводится к единственному уравнению, из которого скорость G продольной ударной волны можно выразить через ее интенсивность в виде

$$
\begin{aligned}
&G = C_1\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left(\frac{\varkappa_1}{C_1}\right)^k\right), \\
&\beta_1 = -\frac{9}{4} + \frac{3(l+m+n)}{2(\lambda+2\mu)}, \\
&\beta_2 = -3\left(-\frac{9}{4} + \frac{3(l+m+n)}{2(\lambda+2\mu)}\right)^2 - \frac{3(l+m+n)}{2(\lambda+2\mu)} + \frac{7}{4}, \ \ldots\,.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

На $\Sigma(t)$ внутренние координаты удобно выбрать так, что $y^1 = \phi$, $y^2 = z$. Уравнение движения выпишем до квадратичных слагаемых включительно:

$$
\begin{aligned}
&u_{,rr}\left(1 + \alpha_1 u_{,r} + \alpha_2\frac{u}{r}\right) + \frac{u_{,r}}{r} - \frac{u}{r^2} + \frac{uu_{,r}}{r^2} + \alpha_3\frac{u^2}{r^3} + \alpha_4\frac{u_{,r}^2}{r} + \cdots = \\
&\qquad\qquad = \frac{1}{C_1^2}\left\{\ddot{u}\left(1 - \frac{u}{r}\right) + 2\dot{u}\dot{u}_{,r} + \ldots\right\}, \\
&\alpha_1 = -7 + 6\frac{l+m+n}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{-4\lambda - 2\mu + 2(l+3m)}{\lambda+2\mu}, \\
&\alpha_3 = \frac{5\lambda + 7\mu - 4l - 6m - 3n}{\lambda+2\mu}, \quad \alpha_4 = \frac{-6\lambda - 9\mu + 4l + 6m + 3n}{\lambda+2\mu}.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Предположение о гладкости функции $u(r,t)$ в исследуемой области позволяет продифференцировать уравнение (4.6) до произвольного k-го порядка и записать полученные уравнения, начиная с $k = 0$, в разрывах с учетом условий совместности (4.4). В [10] показано, что в результате получается бесконечная система нелинейных дифференциальных уравнений, связывающая неизвестные функции $\varkappa_n$ с их δ-производными. В отличие от случая слабых волн, в задачах с ударными волнами в каждом из уравнений k-го шага присутствует неизвестная функция $k+1$-го шага, поэтому непосредственное интегрирование становится невозможным. Однако представив неизвестные функции $\varkappa_n$ рядами по δ-производным в окрестности момента времени $t = 0$ и включив эти разложения в (4.3), коэффициенты лучевого ряда можно определить из граничных условий с требуемой степенью точности [10]

$$\varkappa_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\delta^k \varkappa_{n0}}{\delta t^k} t^k, \qquad \frac{\delta^k \varkappa_{n0}}{\delta t^k} = \left.\frac{\delta^k \varkappa_n}{\delta t^k}\right|_{t=0}, \qquad \varkappa_{n0} = \varkappa_n(0). \tag{4.7}$$

Подстановка (4.7) в (4.5) позволяет представить скорость волны G в виде степенного ряда по времени

$$G = C_1 \left\{ 1 + \Gamma + C_1^{-1}\Gamma_1 \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} t + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} C_1^{-1}\Gamma_1 \frac{\delta^2\varkappa_{10}}{\delta t^2} + C_1^{-2}\Gamma_2 \left(\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} \right)^2 \right) t^2 + \ldots \right\}, \tag{4.8}$$

$$\Gamma \approx \beta_1 C_1^{-1}\varkappa_{10} + \beta_2 C_1^{-2}\varkappa_{10}^2, \quad \Gamma_1 \approx \beta_1 + 2\beta_2 C_1^{-1}\varkappa_{10}, \quad \Gamma_2 \approx \beta_2.$$

Последнее представление скорости G позволяет определить время, через которое ударная волна будет занимать положение $r = r(t_\Sigma)$

$$t_\Sigma = C_1^{-1}\left(1 + \beta_1 C_1^{-1}\varkappa_{10} + \beta_2 C_1^{-2}\varkappa_{10}^2 + \ldots\right)^{-1}(r - r_0) - \\ -\left(\frac{1}{2} \frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t} C_1^{-3}\left(\beta_1 + 2\beta_2 C_1^{-1}\varkappa_{10}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \beta_1 C_1^{-1}\varkappa_{10} + \beta_2 C_1^{-2}\varkappa_{10}^2 + \ldots\right)^{-3}(r - r_0)^2 \right) + \ldots . \tag{4.9}$$

Входящие в (4.8)–(4.9) неизвестные величины должны быть определены в ходе решения задачи. На первом шаге метода, записывая уравнение движения (4.6) в разрывах, получим:

$$\frac{\delta\varkappa_1}{\delta t} = \frac{A\varkappa_1\varkappa_2}{C_1} + \frac{D\varkappa_1 C_1}{r_0 + \int_0^t G(\xi)d\xi} + \frac{B\varkappa_1^2}{r_0 + \int_0^t G(\xi)d\xi}, \tag{4.10}$$

где A, B, D — безразмерные коэффициенты, сложным образом зависящие от упругих модулей среды и от искомой функции $\varkappa_1$. Уравнения типа (4.10) обычно называют уравнениями затухания интенсивности разрыва. В отличие от плоской задачи в (4.10) входит величина r_Σ^{-1}, определяющая изменение кривизны волнового фронта. В пределах квадратичного по времени анализа необходимо определить только величины $\varkappa_{10}$, $\dfrac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}$ и $\varkappa_{20}$. Подставляя (4.3), (4.7)-(4.9) в граничное условие (4.2), получим

$$\begin{gathered}
-\varkappa_{10}\left\{t-\frac{v_0}{C_1(1+\Gamma)}t-\frac{1}{2}\frac{at^2}{C_1(1+\Gamma)}+\frac{1}{2}\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}\frac{\Gamma_1 v_0^2 t^2}{[C_1(1+\Gamma)]^3}\right\}- \\
-\frac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}\frac{v_0}{C_1(1+\Gamma)}\left(1-\frac{v_0}{C_1(1+\Gamma)}\right)t^2- \\
-\frac{\varkappa_{20}}{2}\left(1-\frac{v_0}{C_1(1+\Gamma)}\right)^2 t^2 = v_0 t+\frac{at^2}{2}.
\end{gathered} \tag{4.11}$$

В первом приближении отсюда следует

$$\varkappa_{20}\approx -v_0. \tag{4.12}$$

Положив в (4.10) $t=0$ получаем алгебраическое соотношение, связывающее $\varkappa_{10}$, $\varkappa_{20}$, $\dfrac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}$. Это позволяет исключить из (4.11) одну из неизвестных величин, например $\dfrac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}$ и найти выражение для $\varkappa_{20}$. В силу громоздкости последнего здесь его приводить не будем, но $\dfrac{\delta\varkappa_{10}}{\delta t}$ должно быть определено из (4.10) с учетом найденного $\varkappa_{20}$.

Приведем решение для поля перемещений до квадратичных слагаемых включительно

$$\begin{gathered}
u=v_0\left\{1+\left(A_0C_1^{-1}\varkappa_{20}-\frac{B_0}{r_0}v_0+\frac{C_0}{r_0}\right)t_\Sigma+\ldots\right\}(t-t_\Sigma)- \\
-\frac{1}{2}\left(\varkappa_{20}+\ldots\right)(t-t_\Sigma)^2+\ldots .
\end{gathered} \tag{4.13}$$

Индекс "0" соответствует величинам, вычисленным при $t=0$. Разложение $u(r,t)$ в ряд (4.3) можно продолжить и дальше в зависимости от принятого граничного условия. Например, если во всех разложениях учесть еще слагаемые с t^3, то необходимо было бы определить также $\varkappa_{30}$, $\dfrac{\delta^2\varkappa_{10}}{\delta t^2}$ и $\dfrac{\delta\varkappa_{20}}{\delta t}$. Дифференцируя уравнение движения (4.6) и записывая его в разрывах, можно получить связь между $\dfrac{\delta\varkappa_2}{\delta t}$ и $\varkappa_3$, а дифференцируя (4.10), выразить $\dfrac{\delta\varkappa_2}{\delta t}$ через $\dfrac{\delta^2\varkappa_1}{\delta t^2}$. Рассматривая полученные зависимости в привязке к начальному моменту времени, из (4.11) можно определить $\varkappa_{30}$ в зависимости от g_1, g_2, g_3, а значит, будут найдены $\dfrac{\delta\varkappa_{20}}{\delta t}$ и $\dfrac{\delta^2\varkappa_{10}}{\delta t^2}$.

Аналогичную задачу можно поставить для расходящихся сферических продольных волн. Для них в уравнение затухания (4.10) будет входить средняя кривизна поверхности, что приведет к более быстрому затуханию интенсивности, чем для цилиндрических волн. Для среды с внутренней геометрической связью, которую накладывает условие сохранения объема, авторами рассматривались задачи антиплоского деформирования в нелинейно-упругой несжимаемой среде, а также задача о скручивающем воздействии на границе цилиндрической полости. В каждом из рассмотренных случаев основные этапы решения те же, что и в приведенном примере, а решение может быть выписано с любой степенью точности.

Полученные формулы для перемещений и волнового фронта необходимы для выделения поверхностей разрыва в численных расчетах [11]. Здесь вся область от нагружаемой границы до прифронтовой в качестве решения использует какой-либо конечно-разностный метод, а неизвестные константы, входящие в лучевое разложение, определяются исходя из значений поля перемещений в нескольких узлах сетки, близких к прифронтовой области. Уточнение констант позволяет определить и текущее положение волнового фронта. Такая реализация метода расчетов может быть альтернативой методам сквозного счета, особенно в случаях, когда необходимо знание о точном положении поверхности ударной волны, без размытия последнего.

Заключение

Приближенные решения многих краевых задач ударного деформирования в прифронтовой области строятся методом лучевых разложений. Основные результаты здесь получены для плоских волновых картин. Поэтому закономерно возникает задача обобщения полученных для плоских волн результатов на случай движения волн произвольной геометрии. В настоящей статье эта задача представлена на примере одномерных цилиндрических ударных волн. Применение лучевого метода для волн произвольной геометрии потребовало обобщения понятия дельта-производной тензорных полей, а также рекуррентных соотношений, связывающих разрывы производных произвольного порядка по времени и пространственной координате, на случай криволинейной пространственной системы координат. Кроме того, для таких волновых процессов определены возможные типы и скорости ударных волн. Показано, что на скорости распространения ударных волн влияют как интенсивность разрыва, так и характер предварительных деформаций в среде. По своему типу волны разделяются на квазипродольную волну и две квазипоперечных: на каждой из волн присутствует продольная и поперечная составляющая разрыва, причем одна из них является доминирующей, а вторая имеет относительно нее более высокий порядок малости.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы ”Государственная поддержка ведущих научных школ” (НШ-890.2003.1).

Литература

[1] Быковцев, Г.И. Особые линии и поверхности в пространственных течениях идеальных жесткопластических сред / Г.И. Быковцев, И.А. Власова // Мех. деформ. тв. т. (динамика сплошной среды). – Новосибирск, 1979. – Вып. 41. – С. 31–43.

[2] Шаталов, А.Г. Разрывные решения в связанной задаче термоупругости / А.Г. Шаталов // Механика деформ. сред. Куйбышевский ун-т. – 1979. – Вып. 6. – С. 85–90.

[3] Rossikhin, Yu.A. Ray method for solving dynamic problems connected with propagation of wave surfaces of strong and weak discontinuities / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Appl. mech. rev. – 1995. – V. 48. – No. 1. – P. 1–39.

[4] Томас, Т. Пластическое течение и разрушение в твердых телах / Т. Томас. – М.: Мир, 1964. – 308 с.

[5] Rossikhin, Yu.A. On construction of uniformly fit ray decompositions for solving dynamical problems of linear viscoelasticity (Engl transl) / Yu.A. Rossikhin, M.V. Shitikova // Soviet Appl. Mech. – 1991. – V. 27. – No. 1. – P. 77–82.

[6] Бестужева, А.П. К исследованию нестационарных поверхностных волн в нелинейно-упругих средах / А.П. Бестужева, Г.И. Быковцев, В.Н. Дурова // Прикл. механика. – 1981. – Т. 17. – No. 12. – С. 27–33.

[7] Заварзина, А.А. Об ударных волнах в деформированной упругой среде / А.А. Заварзина, Г.Ф. Филатов // Нелинейные волны деформации: матер. Международного симпозиума. Таллинн, – 1978. – Т. 2. – С. 70–73.

[8] Гринфельд, М.А. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов в нелинейно-упругом материале / М.А. Гринфельд // ПММ. – 1978. – Т. 42. – Вып. 5. – С. 883–898

[9] Буренин, А.А. Лучевой метод решения одномерных задач нелинейной динамической теории упругости с плоскими поверхностями разрывов / А.А. Буренин, Ю.А. Россихин // Прикладные задачи механики деформируемых сред. Владивосток: ДВО АН СССР, 1991.

[10] Буренин, А.А. Об одной возможности построения приближенных решений нестационарных задач динамики упругих сред при ударных воздействиях / А.А. Буренин // Дальневосточный мат. сборник. 1999. Вып. 8. С. 49–72.

[11] Буренин, А.А. Выделение поверхностей разрывов лучевым методом в задачах динамики упругих сред / А.А. Буренин, П.В. Зиновьев, В.Е. Рагозина // Сб. докладов международной научной конференции "Фундаментальные и прикладные вопросы механики". – Хабаровск: ХГТУ, 2003. – С. 64-66

[12] Буренин, А.А. К проблеме выделения поверхностей разрывов в численных методах динамики деформируемых сред / А.А. Буренин, П.В. Зиновьев // Проблемы механики. Сборник статей к 90-летию А.Ю. Ишлинского. – М.: Физматлит, 2003. – С. 146-155.

[13] Быковцев, Г.И. Теория пластичности / Г.И. Быковцев, Д.Д. Ивлев. – Владивосток: Дальнаука, 1998. – 528 с.

[14] Гринфельд, М.А. Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений / М.А. Гринфельд. – М.: Наука, 1990.

[15] Герасименко, Е.А. Геометрические и кинематические ограничения на разрывы функций на движущихся поверхностях / Е.А. Герасименко, В.Е. Рагозина // Дальневосточный мат. сборник. – 2004. – Т. 5. – №1. – С. 100–109.

Поступила в редакцию 19/ V/2006;
в окончательном варианте — 19/ V/2006.

RAY SERIES IN STUDY OF PROPAGATION OF NON-PLANAR SHOCK WAVES[3]

© 2006 E.A. Gerasimenko, V.Y. Ragozina[4]

In this paper a way of forming approximate solutions of shock deformation boundary problems is discussed. The analysis is based on the theory of geometric and kinematic discontinuities compatibility equations when the moving discontinuity surface is determined in a curvilinear coordinate system. We also consider nonlinear effects in regularities of propagating one-dimensional cylindrical shock waves depending on type of initial deformation. Approximate solution with cylindrical longitudinal diverging wave is also obtained.

Paper received 19/ V/2006.
Paper accepted 19/ V/2006.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. Y.N. Radayev.

[4]Gerasimenko Ekaterina Andreevna (ekaterina_gerasi@mail.ru), Ragozina Victoriya Yevgenjevna (ragozina@vlc.ru), Institute of Automatics and Control Processes Far Eastern Branch Russian Academy of Science, Vladivostok, 690041, Russia.