УДК 519.999

О МЕРЕ ОБЪЕДИНЕНИЯ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК, ПОКРЫТЫХ k РАЗ k-КРАТНЫМИ РАСТЯЖЕНИЯМИ ИНТЕРВАЛОВ[1]

© 2006 К.Е. Тихомиров[2]

В работе рассматривается проблема оценки меры объединения точечных множеств, покрытых k раз в k раз расширенными интервалами, которая была поставлена в 1992 году (труды международной конференции в Израиле). Доказано, что эта проблема эквивалентна некоторой комбинаторной матричной задаче. Кроме того, показано, что ее положительное решение позволяет усилить теорему Марцинкевича, связанную со структурой замкнутых множеств на прямой, и установить некоторые новые свойства суммируемых функций.

Введение

Отправной точкой для настоящей работы послужила следующая проблема, поставленная И.Я. Новиковым на международной конференции "Интерполяционные пространства и смежные области" (Израиль, 1992 год) [1]. Пусть $n \in \mathbb{N}$; $a_i, \delta_i \in \mathbb{R}$; $\delta_i \geqslant 0$ $(i = 1,..,n)$. Определим множество:

$$\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n) = \{t\in\mathbb{R} : \exists k\in\{1,..,n\} : \mathrm{card}\{i : t\in(a_i, a_i + k\delta_i)\} \geqslant k\}, \qquad (i)$$

где, как обычно, $\mathrm{card}E$ — количество элементов множества E. Иначе говоря, Ω содержит $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i, a_i + \delta_i)$, пересечения вида $(a_i, a_i + 2\delta_i) \cap (a_j, a_j + 2\delta_j)$ $(i \neq j)$ и т.д. Пусть $|\Omega|$ — лебегова мера множества Ω.

Проблема 1. Существует ли константа C, не зависящая от n, a_i, δ_i, такая, что $|\Omega| \leqslant C \sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i$?

Несложный анализ показывает, что решение проблемы 1 является весьма важным в связи с теорией интегралов Марцинкевича, введенных в [2]

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

[2]Тихомиров Константин Евгеньевич (ktikhomirov@yandex.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

(см. также [3] и [4, гл. 1, § 2]). Напомним, что свойства интегралов Марцинкевича существенным образом используются при доказательстве целого ряда замечательных результатов в теории рядов Фурье [5, гл. 4].

Буквально полгода назад было анонсировано положительное решение проблемы 1 [6]. Тем не менее полное доказательство, насколько нам известно, еще не опубликовано.

Центральным в настоящей работе является § 3, в котором приведено доказательство эквивалентности проблемы 1 и комбинаторной проблемы 2, связанной с некоторым свойством $(0,1)$-матриц. Перед этим в § 2 изучаются свойства множеств Ω, используемые в дальнейшем. В последней части работы рассматривается следствие положительного решения проблемы 1 для суммируемых функций. Начнем же мы с доказательства того, что предположение о существовании абсолютной константы C для множеств Ω является усилением известной теоремы, утверждающей сходимость почти всюду интеграла Марцинкевича [4, гл. 1].

1. Связь с теоремой Марцинкевича

Пусть F — замкнутое множество на $\mathbb{R}$; $\delta(z)$ обозначает расстояние от F до z; $\gamma > 0$.

Теорема 1.1 (Марцинкевич). Интеграл

$$I(x) = \int_{-1}^{1} \frac{\delta(x+y)^{\gamma}}{|y|^{1+\gamma}}\, dy \tag{1.1}$$

сходится для почти всех $x \in F$.

Предположение о положительной разрешимости проблемы 1 является усилением теоремы 1.1, что будет показано в дальнейшем.

Рассмотрим конечную или счетную систему интервалов $\{T_i\}$. Обозначим через $r_i(x)$ расстояние от x до i-го интервала, а через $\lambda_i(x)$ — относительное расстояние, равное $\dfrac{r_i(x)}{|T_i|}$.

Лемма 1.1. Пусть $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система попарно непересекающихся интервалов, причем множество $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i$ ограничено; $F = \mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i$; $\gamma > 0$. Тогда для почти всех $x \in F$ сходимость интеграла (1.1) эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda_i(x)^{1+\gamma}}$.

Доказательство. Так как множество CF, по условию, ограничено, то вместо интеграла (1.1) можно рассматривать интеграл

$$J(x) = \int\limits_{x+y \in CF} \frac{\delta(x+y)^{\gamma}}{|y|^{1+\gamma}} dy = \int\limits_{CF} \frac{\delta(z)^{\gamma}}{|z-x|^{1+\gamma}} dz = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{T_i} \frac{\delta(z)^{\gamma}}{|z-x|^{1+\gamma}} dz = \sum_{i=1}^{\infty} J_i(x).$$

Поскольку на интервале T_i функция $\delta(z)$ равна $\min(\sup T_i - z, z - \inf T_i)$, справедлива следующая оценка:

$$J_i(x) \leqslant \left(\frac{|T_i|}{2}\right)^\gamma \int\limits_{T_i} \frac{dz}{|z-x|^{1+\gamma}} = \frac{1}{2^\gamma}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{|T_i|^\gamma}{r_i(x)^\gamma} - \frac{|T_i|^\gamma}{(r_i(x)+|T_i|)^\gamma}\right) = \frac{1}{2^\gamma} b_i(x),$$

где $b_i = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\lambda_i(x)^\gamma} - \frac{1}{(\lambda_i(x)+1)^\gamma}\right) < \infty$, если $\lambda_i(x) > 0$. Если же $\lambda_i(x) \geqslant 1$, то для любых $a, b \in T_i$: $\frac{|x-a|}{|x-b|} < 2$, и поэтому

$$J_i(x) = \int\limits_{T_i} \frac{\delta(z)^\gamma}{|z-x|^{1+\gamma}}\,dz \geqslant \int\limits_{\inf T_i + \frac{1}{4}|T_i|}^{\sup T_i - \frac{1}{4}|T_i|} \frac{\left(\frac{1}{4}|T_i|\right)^\gamma}{|z-x|^{1+\gamma}}\,dz \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{1+2}\left(\frac{1}{4}|T_i|\right)^\gamma \int\limits_{T_i} \frac{dz}{|z-x|^{1+\gamma}} = \frac{1}{3\cdot 4^\gamma} b_i(x).$$

Так как $|\{x \in F : \exists i \geqslant m : \lambda_i(x) < 1\}| \leqslant 2\sum\limits_{i=m}^{\infty} |T_i| \to 0$ при $m \to \infty$, то получаем, что для почти всех x, начиная с некоторого номера $m(x)$:

$$\frac{1}{3\cdot 4^\gamma} b_i(x) \leqslant J_i(x) \leqslant \frac{1}{2^\gamma} b_i(x),$$

то есть сходимость интеграла (1.1) эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(x)$. Нетрудно проверить, что общий член этого ряда стремится к нулю тогда и только тогда, когда $\lambda_i(x) \to \infty$; в этом случае

$$b_i(x) = \frac{1}{\gamma\lambda_i(x)^\gamma}\left(1 - \exp\left[\gamma \ln\left(1 - \frac{1}{\lambda_i(x)+1}\right)\right]\right) \sim \frac{1}{\lambda_i(x)^{1+\gamma}}.$$

Лемма доказана.

Вернемся опять к множествам Ω. Формулу (i) легко распространить на случай бесконечной системы интервалов $\{(a_i, a_i + \delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$, а именно:

$$\Omega_\infty = \{t \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : \mathrm{card}\{i : t \in (a_i, a_i + k\delta_i)\} \geqslant k\}$$

Наряду с множеством Ω_∞, рассмотрим множество Ω_∞^-, которое строится аналогично и в некотором смысле симметрично Ω_∞ относительно интервалов $(a_i, a_i + \delta_i)$:

$$\Omega_\infty^- = \{t \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : \mathrm{card}\{i : t \in (a_i - (k-1)\delta_i, a_i + \delta_i)\} \geqslant k\}.$$

Определение 1.1. Перестановку $\{\lambda_i^*(x)\}$ последовательности $\{\lambda_i(x)\}$ будем называть неубывающей, если для всех i: $\lambda_i^*(x) \leqslant \lambda_{i+1}^*(x)$.

Лемма 1.2. Пусть $x \notin \Omega_\infty \cup \Omega_\infty^- \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(a_i - \delta_i, a_i + 2\delta_i)$. Тогда неубывающая перестановка последовательности $\{\lambda_i(x)\}$ является мажорантой для последовательности $\left\{\left\lfloor \frac{i-1}{4} \right\rfloor + 1\right\}$.

Доказательство. Неубывающая перестановка последовательности $\{\lambda_i(x)\}$ существует, так как $\lambda_i(x) \to \infty$ (в противном случае x принадлежал бы Ω_∞ или Ω_∞^-). Предположим, что существует $m \in \mathbb{N}$: $\lambda_m^*(x) < \left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor + 1$. Если $m \in \{1,..,4\}$, то $\lambda_m^*(x) < 1$, и сразу приходим к противоречию, так как $x \notin (a_m - \delta_m, a_m + 2\delta_m)$. Если же $m > 4$, то, учитывая, что $\operatorname{card}\{i : \lambda_i^*(x) \leqslant \lambda_m^*(x)\} \geqslant m$, получаем:

$$\operatorname{card}\left\{i : x \in \left(a_i - \left(\left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor + 1\right)\delta_i, a_i + \left(\left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor + 2\right)\delta_i\right)\right\} \geqslant m \geqslant$$

$$\geqslant 4\left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor + 1 = 2\left(\left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor + 2\right) + \left(2\left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor - 3\right) \geqslant 2\left(\left\lfloor\frac{m-1}{4}\right\rfloor + 2\right) - 1,$$

откуда, очевидно, следует, что $x \in \Omega_\infty$ или $x \in \Omega_\infty^-$. Таким образом, для всех $i \in \mathbb{N}$: $\lambda_i^*(x) \geqslant \left\lfloor\frac{i-1}{4}\right\rfloor + 1$.

Следствие 1.1. Пусть $\{T_i\}$, F определены как раньше. Тогда если проблема 1 имеет положительное решение, то для почти каждой точки $x \in F$ существует такое $m(x) \in \mathbb{N}$, что неубывающая перестановка последовательности $\{\lambda_i(x)\}_{i=m(x)}^\infty$ мажорирует последовательность $\left\{\left\lfloor\frac{i-m(x)}{4}\right\rfloor + 1\right\}_{i=m(x)}^\infty$.

Доказательство. Выберем натуральное m и определим множества Ω_∞ и Ω_∞^- для подсистемы интервалов $\{T_i\}_{i=m}^\infty$, положив $a_i = \inf T_i$, $\delta_i = |T_i|$. Пусть

$$M(m) = \Omega_\infty \cup \Omega_\infty^- \cup \bigcup_{i=m}^\infty (a_i - \delta_i, a_i + 2\delta_i).$$

Тогда, в силу предположения, $|M(m)| \leqslant (2C+1)\sum\limits_{i=m}^\infty \delta_i \to 0$ при $m \to \infty$. Поэтому для почти всех $x \in F$ существует $m(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $x \notin M(m(x))$, и утверждение справедливо, согласно лемме 1.2.

Замечание 1.1. Теорема 1.1 с учетом леммы 1.1 может быть сформулирована следующим образом: при любом расположении ограниченной системы попарно непересекающихся интервалов на числовой прямой ряд $\sum\limits_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i(x)^{1+\gamma}}$ сходится почти всюду. Если абсолютная константа C существует для множеств Ω, следствие 1.1 дает более сильное ограничение на $\lambda_i(x)$: почти везде ряд $\sum\limits_{i=1}^\infty \frac{1}{\lambda_i^*(x)^{1+\gamma}}$ сходится, и его остаток мажорируется рядом $\sum\limits_{i=1}^\infty \frac{1}{\left(\left\lfloor\frac{i-1}{4}\right\rfloor + 1\right)^{1+\gamma}}$.

2. Свойства множеств Ω

Так как

$$\Omega(a_1,..,a_i,..,a_j,,..,a_n,\delta_1,..,\delta_i,..,\delta_j,..,\delta_n) =$$
$$= \Omega(a_1,..,a_j,..,a_i,,..,a_n,\delta_1,..,\delta_j,..,\delta_i,..,\delta_n),$$

то в дальнейшем будем предполагать, что $a_{i+1} \geqslant a_i$, и только такие значения $a_1,..,a_n$ считать допустимыми. Формулу (i) можно переписать в следующем виде:

$$\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n) = \bigcup_{M\subset\{1,..,n\}} \bigcap_{i\in M} (a_i, a_i + \operatorname{card} M\delta_i). \tag{2.1}$$

Предложение 2.1. Функция $2n$ переменных $|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|$ непрерывна в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n_+$.

Доказательство. Пусть a_i, δ_i, $i = 1,..,n$ — некоторые значения аргументов; $\Delta(a_i), \Delta(\delta_i)$, $i = 1,..,n$ — соответствующие приращения; $\Delta(a) = \max_i |\Delta(a_i)|$, $\Delta(\delta) = \max_i |\Delta(\delta_i)|$; $a_i^* = a_i + \Delta(a_i)$, $\delta_i^* = \delta_i + \Delta(\delta_i)$, $i = 1,..,n$. Используя формулу (2.1), оценим приращение рассматриваемой функции:

$$\Big||\Omega(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1^*,..,\delta_n^*)| - |\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\Omega(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1^*,..,\delta_n^*) \triangle \Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{M\subset\{1,..,n\}} \Big|\bigcap_{i\in M}(a_i^*, a_i^* + \operatorname{card} M\delta_i^*) \triangle \bigcap_{i\in M}(a_i, a_i + \operatorname{card} M\delta_i)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{M\subset\{1,..,n\}} \sum_{i\in M} \Big|(a_i^*, a_i^* + \operatorname{card} M\delta_i^*) \triangle (a_i, a_i + \operatorname{card} M\delta_i)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{M\subset\{1,..,n\}} \sum_{i\in M} \Big(|\Delta(a_i)| + \operatorname{card} M|\Delta(\delta_i)|\Big) < 2^n n\Big(\Delta(a) + n\Delta(\delta)\Big) \to 0$$

при $\Delta(a), \Delta(\delta) \to 0$.

В общем случае множество $\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)$ может состоять из нескольких интервалов, попарно непересекающихся и не имеющих общих граничных точек. Тем не менее, в контексте проблемы 1 достаточно рассматривать только множества Ω со связными замыканиями $\overline{\Omega}$; это будет доказано ниже, но сначала рассмотрим лемму.

Лемма 2.1. Пусть $a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n$ — допустимые значения параметров; $\Delta > 0$ таково, что $a_{i+1} \geqslant a_i + \Delta$;

$$\Theta = \Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n) \cap (a_{i+1}, +\infty);$$
$$\Theta_\Delta = \Omega(a_1,..,a_i,a_{i+1}-\Delta,..,a_n-\Delta,\delta_1,..,\delta_n) \cap (a_{i+1}-\Delta, +\infty),$$

тогда $|\Theta| \leqslant |\Theta_\Delta|$.

Доказательство. Пусть $t \in \Theta$, тогда, в соответствии с (2.1), существует $M \subset \{1,..,n\}$:

$$t \in \bigcap_{j\in M\cap\{1,..,i\}} (a_j, a_j + \operatorname{card} M\delta_j) \cap \bigcap_{j\in M\cap\{i+1,..,n\}} (a_j, a_j + \operatorname{card} M\delta_j) \cap (a_{i+1}, +\infty).$$

Так как $t > a_{i+1} \geqslant a_j + \Delta$ для любого $j \in \{1,..,i\}$, то из принадлежности t интервалу $(a_j, a_j + \operatorname{card} M\delta_j)$, где $j \leqslant i$, следует принадлежность $t - \Delta$ тому же интервалу, то есть

$$t - \Delta \in \bigcap_{j\in M\cap\{1,..,i\}} (a_j, a_j + \operatorname{card} M\delta_j).$$

Кроме того, очевидно, что

$$t-\Delta \in \bigcap_{j\in M\cap\{i+1,..,n\}} (a_j-\Delta, a_j-\Delta+\mathrm{card} M\delta_j)\cap(a_{i+1}-\Delta,+\infty).$$

Таким образом, $t-\Delta\in\Theta_\Delta$. Получаем, что $\{t : t-\Delta\in\Theta_\Delta\}\supset\Theta$, откуда следует соотношение для мер.

Предложение 2.2. Для любых допустимых значений параметров $a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n$ существуют такие $a_1^*,..,a_n^*$, что

$$|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|\leqslant|\Omega(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1,..,\delta_n)|,$$

и $\overline{\Omega}(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1,..,\delta_n)$ — связное множество (отрезок).

Доказательство. Пусть $a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n$ — некоторые значения параметров. Введем обозначения:

$$\Omega_i=\Omega(a_1,..,a_i,\delta_1,..,\delta_i).$$

Тогда $\Omega_i\subset\Omega_{i+1}$, $i=1,..,n-1$. Далее, из (i) следует, что

$$\Omega_i\cap(-\infty,a_{i+1}]=\Omega_{i+1}\cap(-\infty,a_{i+1}];\ \Omega_{i+1}\supset(a_{i+1},\sup\Omega_{i+1}),$$

поэтому $\Omega_{i+1}=\Omega_i\cup(a_{i+1},\sup\Omega_{i+1})$. Множества Ω_i и $(a_{i+1},\sup\Omega_{i+1})$ имеют непустое пересечение, если $\sup\Omega_i>a_{i+1}$. В этом случае

$$(a_{i+1},\sup\Omega_i)\subset(a_i,\sup\Omega_i)\subset\Omega_i,$$

то есть $\Omega_{i+1}=\Omega_i\cup[\sup\Omega_i,\sup\Omega_{i+1})$. Таким образом,

$$\overline{\Omega}_{i+1}=\overline{\Omega}_i\cup\overline{(\max(a_{i+1},\sup\Omega_i),\sup\Omega_{i+1})}$$

Значит, если множество $\overline{\Omega}_i$ несвязное, то $\overline{\Omega}_{i+1}$ тоже. Поэтому для доказательства предложения достаточно показать, что если

$$\max\{i:\overline{\Omega}_i\text{ — связное}\}=i_0<n,$$

то существуют $a_1',..,a_n'$ такие, что

$$\max\{i:\overline{\Omega}_i'=\overline{\Omega(a_1',..,a_i',\delta_1,..,\delta_i)}\text{ — связное}\}\geqslant i_0+1,$$

и

$$|\Omega(a_1',..,a_n',\delta_1,..,\delta_n)|=|\Omega'|\geqslant|\Omega|.$$

Рассмотрим следующие значения параметров: $a_j'=a_j$, $j=1,..,i_0$; $a_j'=a_j-\Delta$, $j=i_0+1,..,n$, где $\Delta=a_{i_0+1}-\sup\Omega_{i_0}$. Тогда $\Omega_i'=\Omega_i$, $i=1,..,i_0$; $a_{i_0+1}'=a_{i_0+1}-(a_{i_0+1}-$ $-\sup\Omega_{i_0})=\sup\Omega_{i_0}'$, поэтому множество $\overline{\Omega}_{i_0+1}$ связное. Используя лемму (2.1), получаем:

$$\begin{aligned}\left|\Omega'\right|&=\left|\Omega'\backslash(\Omega'\cap(a_{i_0+1}',+\infty))\right|+\left|\Omega'\cap(a_{i_0+1}',+\infty)\right|\geqslant\\&\geqslant\left|\Omega'\cap(-\infty,a_{i_0+1}']\right|+\left|\Omega\cap(a_{i_0+1},+\infty)\right|=\left|\Omega_{i_0}'\right|+\left|\Omega\cap(a_{i_0+1},+\infty)\right|=\\&=\left|\Omega\cap(-\infty,a_{i_0+1}']\right|+\left|\Omega\cap(a_{i_0+1},+\infty)\right|=\\&=\left|\Omega\backslash(\Omega\cap(a_{i_0+1}',+\infty))\right|+\left|\Omega\cap(a_{i_0+1}',+\infty)\right|=\left|\Omega\right|.\end{aligned}$$

Следующая теорема определяет способ нахождения параметров a_i, соответствующих множествам Ω с максимально возможной при данных $\delta_1,..,\delta_n$ мерой.

Теорема 2.1. Для любых допустимых значений параметров $a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n$:

$$|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)| \leqslant |\Omega(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1,..,\delta_n)|,$$

где

$$a_i^* = \sup\Omega(a_1^*,..,a_{i-1}^*,\delta_1,..,\delta_{i-1}),\ i = 2,..,n.$$

Доказательство. Пусть $a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n$ — допустимые значения параметров. Тогда, в соответствии с предложением 2.2, существуют $a_1',..,a_n'$ такие, что замыкание множества $\Omega' = \Omega(a_1',..,a_n',\delta_1,..,\delta_n)$ является связным, и $|\Omega(a_1',..,a_n',\delta_1,..,\delta_n)| \geqslant |\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|$. Определим параметры $a_1^*,..,a_n^*$:

$$a_1^* = a_1',\ a_i^* = \sup\Omega(a_1^*,..,a_{i-1}^*,\delta_1,..,\delta_{i-1}),\ i = 2,..,n.$$

Поскольку $(a_i^*,\sup\Omega(a_1^*,..,a_i^*,\delta_1,..,\delta_i)) \subset \Omega(a_1^*,..,a_i^*,\delta_1,..,\delta_i)$, то замыкание множества $\Omega^* = \Omega(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1,..,\delta_n)$ связное. Рассмотрим две возможные ситуации.

1. Для любого i, соответствующего строго положительному δ_i: $a_i' \leqslant a_i^*$. Если $t \in \Omega' \cap (-\infty, a_n^*]$, то $t \in (a_1', a_n^*] = (a_1^*, a_n^*] \subset \overline{\Omega}^*$.

Если же $t \in \Omega' \cap (a_n^*, +\infty)$, то, согласно (2.1), существует $M \subset \{1,..,n\}$:

$$t \in \bigcap_{i\in M}(a_i', a_i' + \operatorname{card}M\delta_i) \cap (a_n^*, +\infty),$$

а поскольку пересечение непусто, то для всех $i \in M$: $\delta_i > 0$ и $a_i' \leqslant a_i^* \leqslant a_n^*$, и поэтому

$$t \in \bigcap_{i\in M}(a_n^*, a_i' + \operatorname{card}M\delta_i) \subset \bigcap_{i\in M}(a_i^*, a_i^* + \operatorname{card}M\delta_i) \subset \Omega^*$$

Таким образом, $\Omega' \subset \overline{\Omega}^*$, откуда: $|\Omega'| \leqslant |\Omega^*|$.

2. Существует $j \in \{1,..,n\}$: $\delta_j > 0$ и $a_j' > a_j^*$. Пусть

$$l = \min\{j : \delta_j > 0; a_j' > a_j^*\} > 1.$$

Для любого $i \in \{1,..,l-1\}$, такого, что $\delta_i > 0$, справедливо неравенство: $a_i' \leqslant a_i^*$. Поэтому, в соответствии с пунктом *1*, $|\Omega(a_1',..,a_{l-1}',\delta_1,..,\delta_{l-1})| \leqslant |\Omega(a_1^*,..,a_{l-1}^*,\delta_1,..,\delta_{l-1})|$. Это означает, что

$$\sup\Omega(a_1',..,a_{l-1}',\delta_1,..,\delta_{l-1}) = a_1' + |\Omega(a_1',..,a_{l-1}',\delta_1,..,\delta_{l-1})| \leqslant$$
$$\leqslant a_1^* + |\Omega(a_1^*,..,a_{l-1}^*,\delta_1,..,\delta_{l-1})| = a_l^* < a_l'.$$

Тогда точки из непустого интервала $(\sup\Omega(a_1',..,a_{l-1}',\delta_1,..,\delta_{l-1}), a_l')$ не принадлежат Ω', хотя $(a_l', a_l'+\delta_l) \subset \Omega'$, и $\delta_l > 0$. Это возможно только в том случае, если $\overline{\Omega'}$ — несвязное множество, что противоречит условию. Таким образом, доказано, что

$$|\Omega^*| \geqslant |\Omega'| \geqslant |\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|.$$

3. Приведение к комбинаторной проблеме

Рассмотрим матрицу $D = \{d_{ij}\}$ порядка $n \times n$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $d_{ij} \in \{0; 1\}$, $i, j = 1,.., n$;
2) $d_{ij} = 0$, если $j > 1 + n - i$;
3) для любого $i \in \{1,.., n\}$: $D_i = \{j : d_{i+1-j,j} = 1\} \neq \emptyset$.
Условие *3* говорит о том, что на каждой диагонали, содержащей элементы $d_{i+1-j,j}$, $j \in \{1,.., i\}$, имеется хотя бы одна единица.
Для каждого столбца матрицы D определим величину

$$\max_{i\in\{1,...,n-j+1\}} \frac{i \cdot d_{ij}}{\mathrm{card} D_{i+j-1}},$$

а затем найдем сумму

$$\sigma(D) = \sum_{j=1}^{n} \max_{i\in\{1,...,n-j+1\}} \frac{i \cdot d_{ij}}{\mathrm{card} D_{i+j-1}}.$$

Здесь $\mathrm{card} D_{i+j-1}$ — количество единиц на $i+j-1$-й диагонали.

Проблема 2. Существует ли такая константа C', что для любой матрицы D (произвольного порядка), удовлетворяющей условиям *1–3*, выполняется $C'\sigma(D) \geqslant n$?

Мы покажем, что проблемы 1 и 2 эквивалентны. Для этого нам понадобится следующая

Лемма 3.1. Проблема 1 имеет положительное решение в том и только том случае, когда абсолютная константа C' существует для множеств $\Omega = \Omega(a_1,.., a_m, \delta_1,.., \delta_m)$ со связными замыканиями, определяемых параметрами $a_1,.., a_m, \delta_1,.., \delta_m$, такими, что:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = .. = a_m - a_{m-1} = \sup \Omega - a_m.$$

Доказательство. Пусть $a_1,.., a_n, \delta_1,.., \delta_n$ — допустимые значения параметров; $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i > 0$ (случай, когда $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i = 0$, является тривиальным). Тогда, в силу непрерывности меры как функции от a_i, δ_i, для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $\delta'_1,.., \delta'_n \in \mathbb{Q} \cap (0; +\infty)$, что

$$\frac{|\Omega(a_1,.., a_n, \delta'_1,.., \delta'_n)|}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta'_i} > \frac{|\Omega(a_1,.., a_n, \delta_1,.., \delta_n)|}{\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_i} - \varepsilon.$$

Далее воспользуемся теоремой 2.1. Поскольку для любого $h \in \mathbb{R}$:

$$|\Omega(a_1,.., a_n, \delta'_1,.., \delta'_n)| = |\Omega(a_1 + h,.., a_n + h, \delta'_1,.., \delta'_n)|,$$

то параметр a^*_1 можно выбирать произвольно. Возьмем $a^*_1 \in \mathbb{Q}$ и определим $a^*_i, i = 2,.., n$, следующим образом: $a^*_i = \sup \Omega(a^*_1,.., a^*_{i-1}, \delta'_1,.., \delta'_{i-1})$.

Пусть $\Omega^* = \Omega(a^*_1,.., a^*_n, \delta'_1,.., \delta'_n)$, тогда $|\Omega^*| \geqslant |\Omega(a_1,.., a_n, \delta'_1,.., \delta'_n)|$. Если все параметры $a^*_1,.., a^*_{i-1}, \delta'_1,.., \delta'_{i-1}$ рациональны, то, очевидно,

$\sup\Omega(a_1^*,..,a_{i-1}^*,\delta_1',..,\delta_{i-1}')\in\mathbb{Q}$, поэтому $a_1^*,..,a_n^*,\sup\Omega^*\in\mathbb{Q}$. Поскольку все δ_i больше нуля, то $a_1^*<a_2^*<...<a_n^*<\sup\Omega^*$, и, значит, существуют натуральные $m_1,..,m_n$, такие, что

$$\frac{a_2^*-a_1^*}{m_1}=\frac{a_3^*-a_2^*}{m_2}=\frac{a_n^*-a_{n-1}^*}{m_{n-1}}=\frac{\sup\Omega^*-a_n^*}{m_n}=\alpha>0.$$

Рассмотрим теперь новый список параметров $(a_1'',..,a_m'',\delta_1'',..,\delta_m'')$, который получается из $(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1',..,\delta_n')$ присоединением точек $a_j''=a_i^*+\alpha k$, $k\in\{1,..,m_i-1\}$, $i=1,..,n$; соответствующие $\delta_j''=0$. Тогда множества $\Omega(a_1^*,..,a_n^*,\delta_1',..,\delta_n')$ и $\Omega(a_1'',..,a_m'',\delta_1'',..,\delta_m'')$ равны друг другу и оба имеют связные замыкания; $a_2''-a_1''=a_3''-a_2''=..=a_m''-a_{m-1}''=\sup\Omega(a_1'',..,a_m'',\delta_1'',..,\delta_m'')-a_m''=\alpha$. Таким образом,

$$\frac{|\Omega(a_1'',..,a_m'',\delta_1'',..,\delta_m'')|}{\sum\limits_{i=1}^{m}\delta_i''}=\frac{|\Omega^*|}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i'}>\frac{|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|}{\sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i}-\varepsilon,$$

а поскольку ε изначально выбиралось произвольно, получаем утверждение леммы.

Теорема 3.1. Проблема 2 эквивалентна проблеме 1.

Доказательство. Допустим, что проблема 1 решается положительно. Выберем $n\in\mathbb{N}$. Пусть D — матрица порядка n, удовлетворяющая условиям *1–3*. Построим для нее множество $\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)$, где

$$a_i=i-1,\ i=1,..,n;\ \delta_j=\max_{i\in\{1,..,n-j+1\}}\frac{i\cdot d_{ij}}{\mathrm{card}D_{i+j-1}}.$$

Оценим снизу меру этого множества. Возьмем произвольное $i\in\{1,..,n-1\}$. Для любого $j\in D_i$:

$$\delta_j\geqslant\frac{(i-j+1)d_{i-j+1,j}}{\mathrm{card}D_i}=\frac{i-j+1}{\mathrm{card}D_i},$$

поскольку $d_{i-j+1,j}=1$. Следовательно, $i\leqslant j-1+\mathrm{card}D_i\delta_j$, или $a_{i+1}\leqslant a_j+\mathrm{card}D_i\delta_j$. Таким образом,

$$a_{i+1}\in\bigcap_{j\in M}(a_j,a_j+\mathrm{card}M\delta_j],$$

где $M=D_i$. Это означает, что $\sup\Omega(a_1,..,a_i,\delta_1,..,\delta_i)\geqslant a_{i+1}$, то есть $\overline{\Omega}(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)$ — связное множество. Аналогичным образом доказывается, что $\sup\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)\geqslant n$. Тогда меру можно оценить так: $|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|\geqslant n-a_1=n$. С другой стороны, мы предположили, что существует константа C такая, что $C\sum\limits_{j=1}^{n}\delta_j\geqslant|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|$. Получаем:

$$C\sum_{j=1}^{n}\max_{i\in\{1,..,n-j+1\}}\frac{i\cdot d_{ij}}{\mathrm{card}D_{i+j-1}}\geqslant n.$$

Поэтому, если положить $C'=C$, то для матрицы D: $C'\sigma(D)\geqslant n$.

Допустим теперь, что проблема 2 разрешима положительно. Пусть $\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)$ — множество со связным замыканием; $a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}=\sup\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)-a_n=\alpha>0$. Для удобства введем обозначение: $a_{n+1}=\sup\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)$. Согласно формуле (2.1), а также с учетом связности, имеем: для любого $i\in\{1,..,n\}$ существует $M_i\subset\{1,..,i\}$:

$$a_{i+1}\in\bigcap_{j\in M_i}(a_j,a_j+\mathrm{card}M_i\delta_j]$$

Рассмотрим матрицу D порядка n; определим ее через диагонали: $D_i=M_i$, $i=1,..,n$. Тогда, в силу предположения: $C'\sigma(D)\geqslant n$. Элемент d_{ij} равен единице в том и только том случае, когда $j\in D_{i+j-1}$, или, то же самое, $j\in M_{i+j-1}$. Тогда $a_{i+j}\in(a_j,a_j+\mathrm{card}M_{i+j-1}\delta_j]$. В частности, $a_{i+j}\leqslant a_j+\mathrm{card}M_{i+j-1}\delta_j$. Таким образом,

$$\delta_j\geqslant\frac{a_{i+j}-a_j}{\mathrm{card}M_{i+j-1}}=\frac{\alpha\cdot i}{\mathrm{card}D_{i+j-1}}.$$

Это выполняется для всех i, для которых $d_{ij}=1$. Следовательно,

$$\delta_j\geqslant\alpha\cdot\max_{i\in\{1,..,n-j+1\}}\frac{i\cdot d_{ij}}{\mathrm{card}D_{i+j-1}}.$$

Поэтому

$$C'\sum_{j=1}^{n}\geqslant C'\alpha\sigma(D)\geqslant\alpha n=a_{n+1}-a_1=|\Omega(a_1,..,a_n,\delta_1,..,\delta_n)|.$$

Согласно лемме 3.1, этот результат распространяется на все множества Ω.

4. Следствие для суммируемых функций

Теорема, рассматриваемая в этом разделе, является следствием положительного решения проблемы 1; ее формулировка приведена в [6].

Теорема 4.1. Если функция f суммируема на $\mathbb{R}$, то

$$\left|\left\{x:\sup_{\alpha>0}\alpha|\{t>0:|f(x+t)|\geqslant\alpha t\}|\geqslant\lambda\right\}\right|\leqslant\frac{\tilde C}{\lambda}\int\limits_{\mathbb{R}}|f|\,dx,$$

где $\tilde C$ — некоторая константа (не зависящая от f и λ).

Замечание 4.1. Утверждение теоремы является корректным в том смысле, что измеримо множество $\left\{x:\sup\limits_{\alpha>0}\alpha|\{t>0:|f(x+t)|\geqslant\alpha t\}|\geqslant\lambda\right\}$, поскольку измерима функция $g(x)=\sup\limits_{\alpha>0}\alpha|\{t>0:|f(x+t)|\geqslant\alpha t\}|$.

Действительно, так как функция $|f|$ суммируема на всей прямой, то множество $\{t>0:|f(x+t)|\geqslant\alpha t\}$ имеет конечную меру при любых допустимых x,α. Далее, из того, что для любой последовательности $\gamma_n\to+0$:

$$\{t>0:|f(x+t)|\geqslant\alpha t\}=\bigcap_n\{t>0:|f(x+t)|\geqslant(\alpha-\gamma_n)t\},$$

следует непрерывность $|\{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha t\}|$ слева как функции от α. Значит, $g(x)$ представима в виде:

$$g(x) = \sup_{\alpha\in\mathbb{Q}_+} \alpha|\{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha t\}| = \lim_{n\to\infty} g_n(x);$$

$g_n(x) = \max\limits_{\alpha} \alpha|\{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha t\}|$, где максимум берется по первым n положительным рациональным числам (если их как-нибудь пронумеровать). Также для любой последовательности $\gamma_n \to +0$ справедливо:

$$\{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha t\} = \bigcap_n \{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha(t - \gamma_n)\},$$

а поскольку

$$|\{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha(t - \gamma_n)\}| = \gamma_n + |\{t > \gamma_n : |f(x + t)| \geqslant \alpha(t - \gamma_n)\}| =$$

$$= \gamma_n + |\{t > 0 : |f(x + \gamma_n + t)| \geqslant \alpha t\}|,$$

то мера множества $\{t > 0 : |f(x + t)| \geqslant \alpha t\}$ непрерывна справа как функция от x. Следовательно, функции $g_n(x)$ измеримы, что влечет за собой измеримость $g(x)$ [7, гл. IV, § 2].

В дальнейшем через $\varphi_{m,n}(x)$, $m, n \in \mathbb{N}$ будем обозначать финитную ограниченную функцию на $\mathbb{R}$, принимающую значения из множества $\left\{\dfrac{j}{m}\right\}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, и постоянную на полуинтервалах $\left(\dfrac{i}{mn}; \dfrac{i+1}{mn}\right]$, $i \in \mathbb{Z}$. Пусть также

$$M_{z,\lambda}(a; b) = \left\{x : \sup_{\alpha\in(a;b)} \alpha|\{t > 0 : |z(x + t)| \geqslant \alpha t\}| > \lambda\right\},$$

где $z(x)$ — некоторая суммируемая на $\mathbb{R}$ функция.

Прежде чем мы приступим к доказательству теоремы 4.1, рассмотрим лемму, которая позволит упростить постановку задачи, сделав ее "более дискретной".

Лемма 4.1. Для того чтобы утверждение теоремы 4.1 было верным для всех суммируемых на $\mathbb{R}$ функций, достаточно, чтобы для любой функции $\varphi_{m,n}(x)$ и любого $\lambda \geqslant \frac{2}{m}$ выполнялось

$$|M_{\varphi_{m,n},\lambda}(0; n)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m,n}\, dx.$$

Доказательство. Пусть f — суммируемая на $\mathbb{R}$ неотрицательная функция; $\lambda > 0$. Очевидно следующее:

$$M_{f,\lambda}(0; \infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_{f,\lambda}(0; k);\;\; M_{f,\lambda}(0; k) \subset M_{f,\lambda}(0; k + 1),$$

то есть $|M_{f,\lambda}(0; \infty)| = \lim\limits_{k\to\infty} |M_{f,\lambda}(0; k)|$. Таким образом, $|M_{f,\lambda}(0; \infty)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda} I_f$ тогда и только тогда, когда для всех k: $|M_{f,\lambda}(0; k)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda} I_f$, где $I_f = \int\limits_{\mathbb{R}} f dx$.

Зафиксируем k. Выберем любое $\varepsilon > 0$. В силу суммируемости f, существует такое $r \in \mathbb{Q} \cap (0;\infty)$, что

$$|\{x : f(x) \geqslant \varepsilon; x \notin (-r;r]\}| < \varepsilon;\ I_f - \int_{-r}^{r} f dx < \varepsilon.$$

Пусть $[f(x)]_l$ — срезка функции $f(x)$ числом $l \geqslant \frac{1}{2}$ такая, что

$$I_f - \int_{\mathbb{R}} [f(x)]_l\, dx < \varepsilon;\ |\{x : f(x) \neq [f(x)]_l\}| < \varepsilon$$

Согласно теореме Лузина [7, гл. XVII, § 2], существует такая непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $\omega(x)$, что

$$|\{x : [f(x)]_l \neq \omega(x)\}| \leqslant \frac{\varepsilon}{2l};\ 0 \leqslant \omega(x) \leqslant l.$$

Поскольку $\omega(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[-r;r]$, то существует такое $\mu > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in [-r;r]$ с условием $|x_2 - x_1| < \mu$ выполняется: $|\omega(x_1) - \omega(x_2)| \leqslant \varepsilon^2$. Выберем теперь натуральные m, n, для которых:

$$m \geqslant \max\left(\frac{2}{\lambda}, \frac{1}{\varepsilon^2}, \frac{2r}{\varepsilon}\right);\ n \geqslant k;\ mn \geqslant \frac{1}{\mu};\ mnr \in \mathbb{N}.$$

Для таких m и n существует функция $\varphi_{m,n}(x)$, равная нулю на множестве $\mathbb{R}\backslash(-r;r]$ и удовлетворяющая условию:

$$|\omega(x) - \varphi_{m,n}(x)| \leqslant \min\left(\varepsilon^2, \frac{\varepsilon}{2r}\right)$$

на полуинтервале $(-r;r]$. Из последнего неравенства следует, что

$$\left|\int_{-r}^{r} \omega(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}} \varphi_{m,n}(x)\, dx\right| \leqslant 2r \sup_{x \in (-r;r]} |\omega(x) - \varphi_{m,n}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Возьмем произвольную точку $x \in M_{f,\lambda}(0;k)$. Тогда для нее существует $\alpha \in (0;k)$: $\alpha|\{t > 0 : f(x+t) \geqslant \alpha t\}| > \lambda$. Учитывая условия, которым удовлетворяют функции f, $[f]_l$, ω, $\varphi_{m,n}$, запишем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned}
\lambda &< \alpha|\{t > 0 : f(x+t) \geqslant \alpha t\}| = \alpha|\{t : f(x+t) \geqslant \alpha t; t \in (0;\varepsilon/\alpha)\}| + \\
&\quad + \alpha|\{t : f(x+t) \geqslant \alpha t; t \geqslant \varepsilon/\alpha; x+t \notin (-r;r]\}| + \\
&\quad + \alpha|\{t : f(x+t) \geqslant \alpha t; t \geqslant \varepsilon/\alpha; x+t \in (-r;r]\}| \leqslant \\
&\leqslant \varepsilon + \alpha\varepsilon + \alpha|\{t : f(x+t) \geqslant \alpha t; t \geqslant \varepsilon/\alpha; x+t \in (-r;r]\}| \leqslant \\
&\leqslant (1+2\alpha)\varepsilon + \alpha|\{t : [f(x+t)]_l \geqslant \alpha t; t \geqslant \varepsilon/\alpha; x+t \in (-r;r]\}| \leqslant \\
&\leqslant (1+3\alpha)\varepsilon + \alpha|\{t : \omega(x+t) \geqslant \alpha t; t \geqslant \varepsilon/\alpha; x+t \in (-r;r]\}| \leqslant \\
&\leqslant (1+3\alpha)\varepsilon + \alpha|\{t : \omega(x+t) - \varepsilon^2 \geqslant (\alpha - \alpha\varepsilon)t; t \geqslant \varepsilon/\alpha; x+t \in (-r;r]\}| \leqslant \\
&\leqslant (1+3\alpha)\varepsilon + \alpha|\{t > 0 : \varphi_{m,n}(x+t) \geqslant (\alpha - \alpha\varepsilon)t\}| = \\
&= (1+3\alpha)\varepsilon + \frac{1}{1-\varepsilon}(\alpha - \alpha\varepsilon)|\{t > 0 : \varphi_{m,n}(x+t) \geqslant (\alpha - \alpha\varepsilon)t\}|.
\end{aligned}$$

Значит,

$$(\alpha - \alpha\varepsilon)|\{t > 0 : \varphi_{m,n}(x + t) \geqslant (\alpha - \alpha\varepsilon)t\}| > (\lambda - (1 + 3k)\varepsilon)(1 - \varepsilon) = \lambda_\varepsilon,$$

и, следовательно, $x \in M_{\varphi_{m,n},\lambda_\varepsilon}(0; n)$. Таким образом,

$$M_{f,\lambda}(0; k) \subset M_{\varphi_{m,n},\lambda_\varepsilon}(0; n).$$

По предположению леммы,

$$|M_{\varphi_{m,n},\lambda_\varepsilon}(0; n)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda_\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{m,n}\, dx,$$

поэтому

$$|M_{f,\lambda}(0; k)| \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda_\varepsilon} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{m,n}\, dx \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda_\varepsilon}\Big(\int\limits_{-r}^{r} \omega(x)\, dx + \varepsilon\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda_\varepsilon}\Big(\int\limits_{-r}^{r} [f(x)]_l\, dx + \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2l}2l\Big) \leqslant \frac{\tilde{C}}{\lambda_\varepsilon}\left(I_f + 4\varepsilon\right).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем требуемое соотношение.

Доказательство теоремы 4.1 Пусть $\varphi_{m,n}(x)$ — некоторая функция, удовлетворяющая ранее перечисленным условиям; $\lambda \geqslant \dfrac{2}{m}$. Обозначим через $\varphi_{m,n}[i]$ значение функции на полуинтервале $\left(\dfrac{i}{mn}; \dfrac{i+1}{mn}\right]$. Определим следующие множества:

$$\mathcal{P} = \{i : \varphi_{m,n}[i] \neq 0\},$$

$$\mathcal{A}_{\alpha,x} = \left\{i : \exists t > 0 : t \in \left(\frac{i}{mn} - x; \frac{i+1}{mn} - x\right]; \varphi_{m,n}[i] \geqslant \alpha t\right\},$$

$$\mathcal{B}_{\alpha,x} = \left\{i : \forall t \in \left(\frac{i}{mn} - x; \frac{i+1}{mn} - x\right] : t > 0; \varphi_{m,n}[i] \geqslant \alpha t\right\}.$$

Замечание 4.2. График функции $\varphi_{m,n}(t)$ на плоскости ty представляет собой совокупность горизонтальных промежутков — множеств вида $\left(\dfrac{i}{mn}; \dfrac{i+1}{mn}\right] \times \{\varphi_{m,n}[i]\}$. $\mathcal{A}_{\alpha,x}$ определяет, какие из этих множеств имеют непустое пересечение с частью плоскости, ограниченной лучами

$$t = x; y > 0 \;\text{ и }\; y = \alpha(t - x); y > 0.$$

В $\mathcal{B}_{\alpha,x}$ содержатся i, соответствующие только тем промежуткам, которые целиком принадлежат упомянутой части плоскости.
Очевидно, что для любых допустимых x и α:

$$\mathcal{A}_{\alpha,x}, \mathcal{B}_{\alpha,x} \subset \mathcal{P} = \left\{i : \varphi_{m,n}[i] \geqslant \frac{1}{m}\right\};\; \mathcal{B}_{\alpha,x} \subset \mathcal{A}_{\alpha,x}.$$

Если $\alpha \leqslant n$, то также справедливо $\mathcal{A}_{\alpha,x} \subset \mathcal{B}_{\alpha/3,x-\frac{1}{mn}}$. Действительно

$$\mathcal{A}_{\alpha,x} = \left\{i : \exists t > 0 : t + x \in \left(\frac{i}{mn}; \frac{i+1}{mn}\right]; \varphi_{m,n}[i] \geqslant \alpha t\right\} =$$

$$= \left\{ i : \exists t'(i) > \frac{1}{mn} : t'(i) + \left(x - \frac{1}{mn}\right) \in \left(\frac{i}{mn}; \frac{i+1}{mn}\right]; \varphi_{m,n}[i] \geqslant \alpha t'(i) - \frac{\alpha}{mn} \right\}.$$

Рассмотрим $i \in \mathcal{A}_{\alpha,x}$. Если t'' таково, что $t'' + \left(x - \frac{1}{mn}\right) \in \left(\frac{i}{mn}; \frac{i+1}{mn}\right]$, то $|t'' - t'(i)| < \frac{1}{mn}$, и, значит, $t'' > 0$.

Далее, если $\alpha t'(i) - \frac{\alpha}{mn} < \frac{\alpha}{3} t''$, то $t'(i) < \frac{3}{2}\left[\frac{1}{mn} + \frac{1}{3}(t'' - t'(i))\right] < \frac{3}{2}\frac{4}{3}\frac{1}{mn} = \frac{2}{mn}$, откуда следует $\frac{\alpha}{3} t'' < \frac{\alpha}{mn} \leqslant \frac{1}{m}$, поэтому $\varphi_{m,n}[i] \geqslant \frac{\alpha}{3} t''$.

Если же $\alpha t'(i) - \frac{\alpha}{mn} \geqslant \frac{\alpha}{3} t''$, то $\varphi_{m,n}[i] \geqslant \alpha t'(i) - \frac{\alpha}{mn} \geqslant \frac{\alpha}{3} t''$.

Таким образом, для любого числа t'', такого, что $t'' + \left(x - \frac{1}{mn}\right) \in \left(\frac{i}{mn}; \frac{i+1}{mn}\right]$, выполняется $t'' > 0$; $\varphi_{m,n}[i] \geqslant \frac{\alpha}{3} t''$; то есть $i \in \mathcal{B}_{\alpha/3, x - \frac{1}{mn}}$, и имеет место приведенное выше включение.

Рассмотрим систему отрезков $\{S_i\}$, $i \in \mathcal{P}$, определяемых следующим образом: $S_i = [a_i; a_i + \delta_i]$, где $a_i = \frac{i}{mn} - \frac{12\varphi_{m,n}[i]}{\lambda mn}$, $\delta_i = \frac{12\varphi_{m,n}[i]}{\lambda mn}$. Пусть также

$$\Omega^- = \{t \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{N} : \operatorname{card}\{i : t \in [a_i - (k-1)\delta_i; a_i + \delta_i]\} \geqslant k\}$$

Покажем, что $|M_{\varphi_{m,n},\lambda}(0;n)| \leqslant |\Omega^-|$:

$$|M_{\varphi_{m,n},\lambda}(0;n)| = \left|\left\{x : \sup_{\alpha \in (0;n)} \alpha |\{t > 0 : |\varphi_{m,n}(x+t)| \geqslant \alpha t\}| > \lambda\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \frac{n}{j}\left|\left\{t > 0 : |\varphi_{m,n}(x+t)| \geqslant \frac{n}{j} t\right\}\right| > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \frac{n}{j}\frac{1}{mn}\operatorname{card}\mathcal{A}_{\frac{n}{j},x} > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \frac{n}{j}\frac{1}{mn}\operatorname{card}\mathcal{B}_{\frac{n}{3j},x-\frac{1}{mn}} > \frac{\lambda}{2}\right\}\right| =$$

$$= \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \operatorname{card}\mathcal{B}_{\frac{n}{3j},x} > \frac{\lambda m j}{2}\right\}\right|.$$

Если $i \in \mathcal{B}_{\frac{n}{3j},x}$, то $x \leqslant \frac{i}{mn}$ и $\varphi_{m,n}[i] \geqslant \frac{n}{3j}\left(\frac{i+1}{mn} - x\right)$, откуда заключаем, что $x \in \left[\frac{i+1}{mn} - \frac{\varphi_{m,n}[i]}{n/3j}; \frac{i}{mn}\right]$. Длина отрезка $\left[\frac{i+1}{mn} - \frac{\varphi_{m,n}[i]}{n/3j}; \frac{i}{mn}\right]$ оценивается сверху следующим образом: $3j\frac{\varphi_{m,n}[i]}{n} - \frac{1}{mn} < 3j\frac{\varphi_{m,n}[i]}{n} = \delta_i \frac{\lambda mn}{12}\frac{3j}{n} = \frac{\lambda m j}{4}\delta_i$. Значит, $x \in \left[\frac{i}{mn} - \frac{\lambda m j}{4}\delta_i; \frac{i}{mn}\right]$, и

$$\left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \operatorname{card}\mathcal{B}_{\frac{n}{3j},x} > \frac{\lambda m j}{2}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \operatorname{card}\left\{i : x \in \left[\frac{i}{mn} - \frac{\lambda m j}{4}\delta_i; \frac{i}{mn}\right]\right\} > \frac{\lambda m j}{2}\right\}\right| =$$

$$= \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \operatorname{card}\left\{i : x \in \left[a_i - \left(\frac{\lambda m j}{4} - 1\right)\delta_i; \frac{i}{mn}\right]\right\} > \frac{\lambda m j}{2}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\left\{x : \exists j \in \mathbb{N} : \operatorname{card}\left\{i : x \in \left[a_i - \left(\left\lfloor\frac{\lambda m j}{2}\right\rfloor - 1\right)\delta_i; \frac{i}{mn}\right]\right\} > \left\lfloor\frac{\lambda m j}{2}\right\rfloor\right\}\right| \leqslant |\Omega^-|.$$

Предпоследнее неравенство выполняется в силу того, что $\lambda m \geqslant 2$, и, как следствие, $\left\lfloor\frac{\lambda m j}{2}\right\rfloor \geqslant \frac{\lambda m j}{4}$.

Если проблема 1 имеет положительное решение, то $|\Omega^-| \leqslant C \sum\limits_i \delta_i$, и поэтому:

$$|M_{\varphi_{m,n},\lambda}(0; n)| \leqslant |\Omega^-| \leqslant C \sum_i \frac{12\varphi_{m,n}[i]}{\lambda mn} =$$

$$= \frac{12C}{\lambda} \sum_i \frac{\varphi_{m,n}[i]}{mn} = \frac{12C}{\lambda} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_{m,n}(x)\, dx.$$

Если положить $\tilde{C} = 12C$, то придем к утверждению теоремы.

Литература

[1] Novikov, I. A list of open problems / I. Novikov // Israel Math. Conf. Proc. – 1992. – V. 5. – P. 290.

[2] Marcinkievicz, J. Sur quelques intégrales du type de Dini / J. Marcinkievicz // An. Soc. Polon. Math. – 1938. – V. 17. – P. 42–50.

[3] Calderon, A.P. On an integral of Marcinkiewicz / A.P. Calderon // Studia Math. – 1976. – V. 57. – P. 279–284.

[4] Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. – М.: Мир, 1973. – 342 с.

[5] Зигмунд, А. Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. Т. 1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.

[6] Лукашенко, Т.П. Множества точек, покрытых n раз n-кратными расширениями отрезков, и мера их объединения / Т.П. Лукашенко // Сборник тезисов 13-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". – Саратов, 2006. – С. 106–107.

[7] Натансон, И.П. Теория функций вещественной переменной / И.П. Натансон. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Поступила в редакцию 1/*VIII*/2006;
в окончательном варианте — 1/*VIII*/2006.

ON MEASURE OF A UNION OF POINT SETS k TIMES COVERED BY k-FOLD EXTENDED INTERVALS[3]

© 2006 K.E. Tikhomirov[4]

In the paper the problem of estimating a measure of a union of point sets covered k times by k-fold extended intervals is formulated. It was formulated in 1992 (Proceedings of Israel Mathematical Conference). It is proved that this problem is equivalent to a combinatorial matrix problem. Moreover, the positive answer on it allows to strengthen the Marcinkiewicz theorem related to the structure of closed sets of reals and to establish new properties of integrable functions.

Paper received 1/*VIII*/2006.
Paper accepted 1/*VIII*/2006.

---

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. S.V. Astashkin.

[4]Tikhomirov Konstantin Evgenyevich (`ktikhomirov@yandex.ru`), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.