

РОСТ НЕКОТОРЫХ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛЕЙБНИЦА

© 2006 С.М. Рацеев¹

В работе получены оценки роста многообразий алгебр Лейбница с нильпотентным коммутантом над полем произвольной характеристики, а также доказывается отсутствие многообразий алгебр Лейбница с промежуточным ростом между полиномиальным и экспоненциальным в случае основного поля произвольной характеристики, не равной двум.

Введение

Линейная алгебра над полем K называется алгеброй Лейбница, если в ней выполняется тождество

$$(xy)z = (xz)y + x(yz). \quad (i)$$

Алгебры Лейбница являются обобщениями алгебр Ли.

Характеристика основного поля K , если это специально не оговорено, везде считается произвольной. В элементах скобки опускаются при их левонормированной расстановке, то есть $a_1 a_2 \dots a_n = (\dots (a_1 a_2) \dots a_n)$. Все необъясняемые ниже понятия можно найти в монографии [1].

Пусть V — многообразие алгебр Лейбница, $L(X) = K(X, V)$ — относительно свободная алгебра данного многообразия, где $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ — счетное множество свободных образующих. С помощью тождества (i) любой элемент из $L(X)$ представим в виде линейной комбинации полиномов, имеющих левонормированный вид. Пусть $P_n(V)$ — линейное подпространство в пространстве $L(X)$, состоящее из полилинейных элементов степени n от переменных $x_1, \dots, x_n$. Важной числовой характеристикой многообразия V является последовательность $c_n(V) = \dim P_n(V)$, $n = 1, 2, \dots$, асимптотическое поведение которой называют ростом многообразия V . Например, если $c_n(V) \leq a^n$ и $c_n(V)$ не ограничена никаким полиномом, то V называют многообразием экспоненциального роста.

¹Рацеев Сергей Михайлович (RatseevSM@rambler.ru), кафедра алгебро-геометрических вычислений Ульяновского государственного университета, 432700, Россия, г. Ульяновск, ул. Льва Толстого, 42.

При экспоненциальном росте многообразия V вводятся в рассмотрение следующие пределы, которые называются соответственно нижней и верхней экспонентой:

$$\underline{\text{EXP}}(V) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}, \quad \overline{\text{EXP}}(V) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(V)}.$$

Если эти два предела совпадают, то это обозначается как $\text{EXP}(V)$. В ассоциативном случае М.В. Зайцев и А. Джамбруно [4] доказали целочисленность экспоненты произвольного многообразия при основном поле нулевой характеристики. В случае многообразий алгебр Ли при $\text{char} K = 0$ построен пример разрешимого многообразия (см. [5]), верхняя и нижняя экспоненты которого находятся в интервале $(3, 4)$, а в работе [2] С.П. Мищенко показал, что не существует многообразий алгебр Ли с экспонентой, принадлежащей интервалу $(1, 2)$ и приведены примеры многообразий экспоненциального роста с экспонентой 2. Пусть $N_s A$ — многообразие алгебр Ли, определяемое тождеством

$$(x_1 x_2) \dots (x_{2s+1} x_{2s+2}) = 0. \quad (\text{ii})$$

В работе [3] В.М. Петроградский доказал, что экспоненты подмногообразий в $N_s A$ являются целочисленными в случае основного поля произвольной характеристики.

1. Понятие m -алгоритма и его свойство

В данном пункте для удобства изложения материала приводятся понятие m -алгоритма и его свойство, введенное В.М. Петроградским в работе [3]. Здесь оно немного изменено для удобства дальнейших записей.

На множестве $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ переменные упорядочены стандартным образом, то есть $x_i < x_j$ при $i < j$. Введем частичный порядок на множестве непересекающихся подмножеств в $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Пусть A и B — два таких подмножества. Определим $A < B$, если $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$. Непересекающиеся подмножества $I_1, \dots, I_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$, некоторые из которых могут быть пустыми, назовем цепочками, а $(I_1, \dots, I_k)$ — набором цепочек. Скажем, что $(I_1, \dots, I_k)$ — убывающий набор цепочек, если $I_{i_1} > \dots > I_{i_l}$, где $(I_{i_1}, \dots, I_{i_l})$ получается из $(I_1, \dots, I_k)$ путем удаления всех пустых компонент. Если в $(I_1, \dots, I_k)$ не все цепочки пустые, то будем говорить, что это непустой набор цепочек.

Определим индуктивно понятие m -алгоритма выделения убывающего набора цепочек $\Omega = (\Omega_1, \dots, \Omega_k)$ из $(I_1, \dots, I_k)$ при некотором фиксированном числе m следующим образом. Рассмотрим компоненту I_1 . Полагаем $J_1 = I_1$, $\tilde{I}_1 = \emptyset$. Возможны два случая:

- 1) $|J_1| \leq m$, то полагаем $\Omega_1 = \emptyset$, $S_1 = \emptyset$, $F_1 = J_1$;
- 2) $|J_1| > m$, тогда в качестве S_1 определим подмножество в J_1 , состоящее из m минимальных элементов, $\Omega_1 = J_1 \setminus S_1$, $F_1 = \emptyset$.

Пусть построены $\Omega_1, \dots, \Omega_i, S_1, \dots, S_i, F_1, \dots, F_i$ из соответствующих компонент $I_1, \dots, I_i, i \geq 1$. Цепочку I_{i+1} разбиваем на две непересекающиеся части J_{i+1} и $\tilde{I}_{i+1}$ ($I_{i+1} = J_{i+1} \cup \tilde{I}_{i+1}$), где к J_{i+1} относятся все элементы из I_{i+1} , меньшие элементов множества $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_i$ при $\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_i \neq \emptyset$, иначе $J_{i+1} = I_{i+1}$. Множества $\Omega_{i+1}, S_{i+1}, F_{i+1}$ определяются из пунктов 1 и 2, где индекс 1 заменяется на $i+1$.

Если из $(I_1, \dots, I_k)$ с помощью m -алгоритма построен убывающий набор цепочек $(\Omega_1, \dots, \Omega_k)$, то следующим шагом применяем m -алгоритм к $(\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_k)$ и т.д. Верхний индекс будет означать номер шага, на котором возникли данные множества, а к первоначальному набору цепочек прикрепим индекс 1.

Лемма 1. Пусть с помощью m -алгоритма на d -м шаге из первоначального набора $(I_1, \dots, I_k)$ получается непустой убывающий набор цепочек $\Omega^d = (\Omega_1^d, \dots, \Omega_k^d)$. Тогда существует возрастающий набор сегментов $S_{i_1}^1 < S_{i_2}^2 < \dots < S_{i_d}^d$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_d$, и каждый сегмент состоит из m элементов.

Доказательство. Пусть $\Omega_{i_d}^d \neq \emptyset$. Тогда $\emptyset \neq S_{i_d}^d \subset \tilde{I}_{i_d}^{d-1}$. Выберем максимальный индекс $i_{d-1} < i_d$, при котором $\Omega_{i_{d-1}}^{d-1} \neq \emptyset$. Аналогично получаем, что $\emptyset \neq S_{i_{d-1}}^{d-1} \subset \tilde{I}_{i_{d-1}}^{d-2}$, а из определения m -алгоритма следует, что $S_{i_{d-1}}^{d-1} < \tilde{I}_{i_d}^{d-1}$, то есть $S_{i_{d-1}}^{d-1} < S_{i_d}^d$. Далее поступаем аналогично и получаем нужное неравенство. Лемма доказана.

2. Асимптотическое поведение роста подмногообразий в $\widetilde{N_s A}$

Определим многообразие алгебр Лейбница $\widetilde{N_s A}$ тождеством (ii).

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $Y = \{y_1, \dots, y_n\} \subset X$. Через $P_n(Y)$ обозначим пространство полилинейных элементов от переменных Y степени n . Предположим, что для подпространства $U \subset L(X)$ размерность $U \cap P_n(Y)$ не зависит от множества Y , а зависит только от n . В этом случае в качестве Y берем множество $\{x_1, \dots, x_n\}$ и обозначаем

$$P_n(U) = U \cap P_n(Y), \quad c_n(U) = \dim_K P_n(U).$$

Мы будем работать со следующими векторными пространствами:

$$R_{c,n} = P_n((L^2)^c / (L^2)^{c+1}), \quad c = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $P_n(\widetilde{N_s A}) \cong \bigoplus_{c=1}^s R_{c,n}$. Данный изоморфизм имеет место в силу того, что $L / (L^2)^{s+1} \cong K(X, \widetilde{N_s A})$. Пространство $R_{c,n}$ представимо в виде линейной оболочки следующих элементов:

$$R_{c,n} = \langle (x_{11} \dots x_{1a_1})(x_{21} \dots x_{2a_2}) \dots (x_{c1} \dots x_{ca_c}) \mid \quad (2.1) \\ a_i \geq 2, \quad i = 1, \dots, c; \quad a_1 + \dots + a_c = n; \quad \{x_{ij}\} = \{x_1, \dots, x_n\} >_K \rangle.$$

Заметим, что в элементах пространства $R_{c,n}$ можно менять местами переменные в любой i -й скобке, $i = 1, \dots, c$, начиная с 3-й позиции, поскольку, меняя местами две рядом стоящие переменные, мы дополнительно получаем элемент из $(L^2)^{c+1}$ за счет тождества (i). Данное свойство назовем (*).

Обозначим через S_{km}^* следующее подмножество симметрической группы S_{km} порядка km :

$$S_{km}^* = \{\sigma \mid \sigma \in S_{km}, \sigma(im+1) < \sigma(im+2) < \dots < \sigma(im+m), i = 0, \dots, k-1\}.$$

Очевидно, что $|S_{km}^*| = \frac{(km)!}{(m!)^k}$.

Пусть V — некоторое фиксированное подмногообразие в $\widetilde{N_s A}$. Обозначим $\widetilde{L} = K(X, V)$. Тогда

$$P_n(V) \cong \bigoplus_{c=1}^s R_{c,n}(V); \quad R_{c,n}(V) = P_n\left((\widetilde{L}^2)^c / (\widetilde{L}^2)^{c+1}\right), c = 1, 2, \dots, s. \quad (2.2)$$

Для многообразия V введем следующие числовые характеристики. Пусть произвольные положительные целые числа k и n фиксированы, причем $1 \leq k \leq s$. Скажем, что некоторое целое неотрицательное число m обладает свойством $Q(n, k, V)$, если существует такое c , $k \leq c \leq s$, что в пространстве $R_{c,n}(V)$ найдется некоторый набор линейно независимых элементов следующего вида:

$$a_\sigma = (t_1) \dots (t_{i_1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(m)}) \dots (t_{i_2} x_{\sigma(m+1)} x_{\sigma(m+2)} \dots x_{\sigma(2m)}) \dots \dots (t_{i_k} x_{\sigma((k-1)m+1)} x_{\sigma((k-1)m+2)} \dots x_{\sigma(km)}) \dots (t_c), \quad \sigma \in S_{km}^*, \quad (2.3)$$

где t_j , $j = 1, \dots, c$, являются некоторыми мономами, зависящими не менее чем от двух переменных, и этот набор мономов одинаковый для всех элементов a_σ , $\sigma \in S_{km}^*$. Заметим, что если число m обладает свойством $Q(n, k, V)$, то $0 \leq m < n$. Определим значение $m_n(k, V)$ следующим образом: если среди неотрицательных целых чисел, меньших чем n , нет таких, которые обладают свойством $Q(n, k, V)$, то положим $m_n(k, V) = -1$, иначе определим $m_n(k, V)$ как наибольшее из этих чисел, обладающих свойством $Q(n, k, V)$. Введем еще одну характеристику многообразия V :

$$d(V) = \max\{k \mid \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n(k, V) = +\infty, k = 1, \dots, s\}.$$

Лемма 2. Многообразие $V \subseteq \widetilde{N_s A}$ является нильпотентным в том и только том случае, когда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n(1, V) < +\infty$.

Доказательство. Необходимое условие нильпотентности многообразия $V \subseteq \widetilde{N_s A}$ является очевидным. Докажем достаточность.

Пусть $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n(1, V) < +\infty$. Тогда последовательность $m_n(1, V)$, $n = 1, 2, \dots$, является ограниченной: существует такое целое $A \geq 0$, что $m_n(1, V) \leq A$ для любого n . Фиксируем произвольное целое c , $1 \leq c \leq s$, и рассмотрим пространство $R_{c,N}$, где $N = (A+2)s+1$. Пусть $f(x_1, \dots, x_N)$ — некоторый базисный элемент пространства $R_{c,N}$ вида (2.1). Элемент $f(x_1, \dots, x_N)$

есть произведение с скобок, одна из которых содержит не менее чем $A+3$ переменных:

$$f(x_1, \dots, x_N) = \dots (x_{i_1} x_{i_2} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_m}) \dots, \quad m \geq A+1.$$

Элемент $f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$ равен нулю в $R_{c,N}$, где $\sigma = (1j_1)(2j_2) \dots (mj_m)$ — элемент симметрической группы S_N . Из определения пространств $R_{c,n}$ следует, что и $f(x_1, \dots, x_N) = 0$, то есть $R_{c,N} = 0$. Таким образом, $P_N(\widetilde{L}^2) = P_N((\widetilde{L}^2)^{s+1})$, что означает нильпотентность многообразия V . Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть $V \subseteq \widetilde{N_s A}$ и $d(V) \geq 1$. Тогда для любого $r \in \{1, 2, \dots, d(V)\}$ и любого n будет выполняться следующее неравенство:

$$n - rm_n(r, V) \leq 2s + r - 1.$$

Доказательство. Если группу S_{am} рассматривать как подгруппу S_{bm} при $b \geq a$, то $S_{am}^* \subseteq S_{bm}^*$. Поэтому $m_n(r, V) \geq m_n(d(V), V)$ для любого $r \in \{1, 2, \dots, d(V)\}$ и любого n , что влечет $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n(r, V) = +\infty$, так как $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n(d(V), V) = +\infty$.

Предположим, что неравенство в утверждении леммы не выполняется для некоторых N и $r_0 \in \{1, 2, \dots, d(V)\}$:

$$N - r_0 m_N(r_0, V) \geq 2s + r_0.$$

Тогда любые наборы элементов вида (2.3) из $R_{c,N}$ a_σ степени N , $\sigma \in S_{r_0 \widetilde{m}}^*$ при $\widetilde{m} = m_N(r_0) + 1$ будут линейно зависимы для любого $c \geq r_0$. Пусть $n \geq N$ и $m \geq \widetilde{m}$. Определим инъективное отображение $\phi: S_{r_0 \widetilde{m}}^* \rightarrow S_{r_0 m}^*$ следующим образом: пусть $\sigma \in S_{r_0 \widetilde{m}}^*$, $i \in \{0, 1, \dots, r_0 - 1\}$, $j \in \{1, 2, \dots, \widetilde{m}\}$, положим

$$\phi(\sigma)(im + j) = \begin{cases} \sigma(i\widetilde{m} + j), & 1 \leq j \leq \widetilde{m}, \\ r_0 \widetilde{m} + i(m - \widetilde{m}) + j - \widetilde{m}, & \widetilde{m} + 1 \leq j \leq m. \end{cases}$$

Если число m не слишком большое, то есть позволяет рассматривать элементы степени n вида (2.3) для некоторых c , $r_0 \leq c \leq s$, то для таких c , благодаря свойству (*), будут линейно зависимы любые наборы элементов вида

$$\begin{aligned} & (t_1) \dots (t_{i_1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(\widetilde{m})} x_{r_0 \widetilde{m}+1} \dots x_{r_0 \widetilde{m}+m-\widetilde{m}}) \dots \\ & \dots (t_{i_2} x_{\sigma(\widetilde{m}+1)} x_{\sigma(\widetilde{m}+2)} \dots x_{\sigma(2\widetilde{m})} x_{r_0 \widetilde{m}+m-\widetilde{m}+1} \dots x_{r_0 \widetilde{m}+2(m-\widetilde{m})}) \dots \\ & \dots (t_{i_{r_0}} x_{\sigma((r_0-1)\widetilde{m}+1)} x_{\sigma((r_0-1)\widetilde{m}+2)} \dots x_{\sigma(r_0 \widetilde{m})} x_{r_0 \widetilde{m}+(r_0-1)(m-\widetilde{m})+1} \dots x_{r_0 \widetilde{m}+r_0(m-\widetilde{m})}) \dots (t_c), \\ & \sigma \in \phi(S_{r_0 \widetilde{m}}^*) \subseteq S_{r_0 m}^*, \end{aligned}$$

где моном t_i , $i = 1, \dots, c$, содержит не менее двух переменных. Поэтому $m_n(r_0, V) < \widetilde{m}$ для любого $n \geq N$. Противоречие с тем, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} m_n(r_0, V) = +\infty$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть V — подмногообразие в $\widetilde{N_s A}$. Тогда существуют такие константы N , α и β , что для любого $n \geq N$ будет выполняться неравенство

$$n^\beta (d(V))^n \leq c_n(V) \leq n^\alpha (d(V))^n.$$

Доказательство. Если многообразие V нильпотентно, то по лемме 2 $d(V) = 0$ и все очевидно. Поэтому пусть $d(V) \geq 1$. Из определения значений $m_n = m_n(d(V))$, $d = d(V)$ и леммы 3 следует, что

$$0 \leq n - dm_n \leq 2s + d - 1$$

для любого n . Тогда

$$c_n(V) \geq |S_{dm_n}^*| = \frac{(dm_n)!}{[m_n!]^d} \geq \frac{(n - 2s - d + 1)!}{[(\frac{n}{d})!]^d} \geq \frac{1}{n^{2s+d-1}} \frac{n!}{[(\frac{n}{d})!]^d}.$$

Далее применяем формулу Стирлинга и получаем нижнюю оценку для $c_n(V)$.

Покажем верхнюю оценку. Учитывая свойство (*), число базисных элементов пространства $R_{c,n}(V)$ ограничивается сверху следующим числом:

$$n(n-1)\dots(n-2c+1) \sum_{\substack{a_1+\dots+a_c=n-2c \\ a_i \geq 0}} C_{n-2c}^{a_1} C_{n-2c-a_1}^{a_2} \dots C_{n-2c-a_1-\dots-a_{c-1}}^{a_c} \leq n^{2c} c^{n-2c},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k . Получаем, что $c_n(V) \leq An^\alpha s^n$ для некоторых A , α и любого n . Поэтому если $d(V) = s$, то все уже доказано.

Пусть $d(V) \leq s - 1$. Обозначим $k = d(V) + 1$. Для числа k существует такое m , что любые наборы элементов (2.3) будут линейно зависимы для любого $c \geq k$ и любого n , начиная с некоторого номера N . Фиксируем любое значение c при $k \leq c \leq s$. Для любого $n \geq N$ пространство $R_{c,n}(V)$ есть линейная оболочка элементов вида (2.1), причем таких, что каждый из них, используя свойство (*), не может быть приведен к виду

$$(g_1) \dots (g_{i_1} x_{i_1 1} x_{i_1 2} \dots x_{i_1 m}) \dots (g_{i_2} x_{i_2 1} x_{i_2 2} \dots x_{i_2 m}) \dots (g_{i_k} x_{i_k 1} x_{i_k 2} \dots x_{i_k m}) \dots (g_c), \quad (2.4)$$

где g_j — некоторые мономы, зависящие не менее чем от двух переменных, $\{x_{iab} \mid 1 \leq a \leq k, 1 \leq b \leq m\} \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и

$$\{x_{i_1 1}, x_{i_1 2}, \dots, x_{i_1 m}\} < \{x_{i_2 1}, x_{i_2 2}, \dots, x_{i_2 m}\} < \dots < \{x_{i_k 1}, x_{i_k 2}, \dots, x_{i_k m}\}.$$

Действительно, пусть имеется ненулевой элемент f вида (2.4) для некоторого $n \geq N$. Рассмотрим набор элементов (2.3) степени n , у которых моном t_j имеет ту же длину, что и g_j для любого $j = 1, \dots, c$. Эти элементы $a_\sigma, \sigma \in S_{km}^*$, линейно зависимы в $R_{c,n}$. Переименовав переменные во всех элементах a_σ соответствующим образом, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} & (t_1) \dots (t_{i_1} x_1 x_2 \dots x_m) \dots (t_{i_k} x_{km-m+1} x_{km-m+2} \dots x_{km}) \dots (t_c) = \\ & = \sum_{\sigma \in S_{km}^* \setminus \{e\}} \alpha_\sigma (t_1) \dots (t_{i_1} x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \dots x_{\sigma(m)}) \dots (t_{i_k} x_{\sigma(km-m+1)} x_{\sigma(km-m+2)} \dots x_{\sigma(km)}) \dots (t_c). \end{aligned}$$

Поэтому, если сопоставить каждому элементу ω из (2.1) следующий набор цепочек

$$I(\omega) = (I_1(\omega), I_2(\omega), \dots, I_c(\omega)),$$

где $I_i(\omega) = \{x_{i3}, x_{i4}, \dots, x_{ida_i}\}$, $i = 1, \dots, c$, то элемент f линейно выражается через такие элементы ω , у которых $I_i(f) < I_i(\omega)$ для некоторого $i = i(\omega)$,

причем $I_j(f) = I_j(\omega)$ при $j < i$. Так как размерность пространства $R_{c,n}(V)$ конечна, то f в итоге выражается через элементы требуемого вида. Таким образом, базис пространства $R_{c,n}(V)$ можно выбрать из элементов (2.1) так, что эти базисные элементы не приводятся к виду (2.4). Данные базисные элементы включены в множество таких элементов ω из (2.1), что если к $I(\omega)$ применять m -алгоритм, то на k -м шаге получается пустой набор цепочек (лемма 1).

Оценим сверху число таких элементов ω . Первые два места в каждой скобке заполняются не более n^{2c} способами, и далее мы их не учитываем. В сегменты $S_1^1, \dots, S_c^k, F_1^1, \dots, F_c^k$ входит не более kmc переменных. Эти переменные выбираются из множества $\{x_1, \dots, x_n\}$, а затем расставляются по c скобкам. Это можно сделать не более $(cn)^{kmc}$ способами. Оставшиеся элементы распределяем по не более $k-1$ убывающим наборам цепочек, что ограничивается числом $(k-1)^n$. Каждый убывающий набор цепочек можно получить не более чем $(n+1)^c$ способами. В итоге получаем, что

$$\dim R_{c,n} \leq n^{2c} (cn)^{kmc} (n+1)^c (k-1)^n.$$

Учитывая разложение (2.2), получим верхнюю оценку. Теорема доказана.

Следствие 1. Не существует подмногообразий в $\widetilde{N_s A}$, рост которых был бы промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным. Если характеристика основного поля не равна двум, то это свойство распространяется на все многообразия алгебр Лейбница.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы.

Пусть $\text{char } K \neq 2$. Тогда если некоторое многообразие алгебр Лейбница имеет промежуточный рост, то, согласно работе [6], оно является подмногообразием в $\widetilde{N_s A}$ для некоторого s . Далее применяем к этому многообразию первое утверждение данного следствия. Следствие доказано.

Следствие 2. Пусть для многообразия алгебр Лейбница V выполняется неравенство $\overline{\text{EXP}}(V) < \sqrt{2}$ и $\text{char } K \neq 2$. Тогда многообразие V имеет полиномиальный рост.

Доказательство. Из условий утверждения следует, что $V \subseteq \widetilde{N_s A}$ для некоторого s ([6]), поэтому к V можно применить теорему.

Следствие 3. Пусть $V \subseteq \widetilde{N_s A}$. Тогда

- 1) $\overline{\text{EXP}}(V) = \overline{\text{EXP}}(V)$;
- 2) экспонента многообразия V является целым числом: $\text{EXP}(V) = d(V) \in \{1, \dots, s\}$.

Автор благодарит С.П. Мищенко и В.М. Петроградского за поддержку и внимание к работе.

Литература

- [1] Бахтурин, Ю.А. Тожества в алгебрах Ли / Ю.А.Бахтурин. – М.: Наука, 1985. – 448 с.
- [2] Мищенко, С.П. Нижние оценки размерностей неприводимых представлений симметрических групп и показателей экспоненты многообразий алгебр Ли / С.П.Мищенко // Матем. сборник. – 1996. – Т. 187. – №1. – С. 83–94.
- [3] Петроградский, В.М. О численных характеристиках подмногообразий трех многообразий алгебр Ли / В.М.Петроградский // Матем. сборник. – 1999. – Т. 190. – №6. – С. 111–126.
- [4] Giambruno, A. On codimension growth of finitely generated associative algebras / A.Giambruno, M.V.Zaicev // Adv. in Math. – 1998. – V. 140. – P. 145–155.
- [5] Zaitcev, M.V. Example of variety of Lie algebras with fractional exponent / M.V.Zaitcev, S.P.Mishchenko // Journal Of Mathematical Sciences. – 1999. – V. 93. – №6. – P. 977–982.
- [6] Мищенко, С.П. Многообразия алгебр Лейбница слабого роста / С.П.Мищенко, О.И.Череватенко // Труды Математического центра имени Н.И.Лобачевского. – Казань: Казанское математическое общество, 2005. – Т. 31. – С. 103–104.

Поступила в редакцию 27/III/2006;
в окончательном варианте — 27/III/2006.

INCREASE OF MANIFOLDS OF THE LEIBNIZ ALGEBRAS

© 2006 S.M.Ratseev²

Let K be a field of any characteristic. In the paper a growth of manifolds of the Leibniz algebras over K with a nilpotent commutator is studied. It is proved that in case of the Leibniz algebras the varieties of intermediate increase are absent since $\text{char}K \neq 2$.

Paper received 27/III/2006.

Paper accepted 27/III/2006.

²Ratseev Sergey Mikhaylovich (RatseevSM@rambler.ru), Dept. of Algebraic and Geometric Computations, Ulyanovsk State University, 432700, Ulyanovsk, Russia.