УДК 543.544.25

КРИТЕРИЙ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

 В.Н. Орлов[1]

В статье приводятся задачи с единственным решением нелинейных дифференциальных уравнений с подвижными особыми точками. Также рассматривается критерий существования подвижных особых точек дифференциального уравнения Риккати в комплексной области.

К уравнению Риккати, не разрешаемому в квадратурах, приводит ряд задач теории оптимального управления [1–6], при определенных значениях параметров к ним сводятся нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка — уравнения Пенлеве [7–9].

К настоящему времени известны следующие основные результаты, касающиеся существования подвижных особых точек решений дифференциальных уравнений Риккати.

Определение 1. Особые точки решения дифференциального уравнения, положение которых зависит от начальных данных, называют подвижными особыми точками решений дифференциальных уравнений.

Характер подвижных особых точек может быть разный: типа полюса разной кратности, критического полюса и т.д. Уравнения Риккати, скалярное и матричное, относятся к определенному классу нелинейных дифференциальных уравнений, решения которых имеют только подвижные особые точки типа полюса определенной кратности. Этот класс уравнений называют классом $\boldsymbol{P}$-типа.

Наличие подвижных особых точек нарушает ряд условий теорем существования решений указанных выше уравнений, и к таким уравнениям нельзя применять существующие методы решения, так как они не адаптированы к подвижным особым точкам решений этих уравнений. В связи с этим предпринимались попытки решений дифференциальных уравнений данного класса [10–19], но все они не представляли единого подхода к решению указанного класса нелинейных дифференциальных уравнений.

[1]Орлов Виктор Николаевич, кафедра информатики и вычислительной техники Чувашской государственной сельскохозяйственной академии, 428000, Россия, г. Чебоксары, ул. К. Маркса, 29.

Один из вариантов решения нелинейных дифференциальных уравнений данного класса требует решения следующих задач:

а) доказательство теорем существования решения в области аналитичности как для исходного, так и инверсного нелинейных дифференциальных уравнений. Доказательство теоремы существования решения в окрестности подвижной особой точки;

б) получение подвижных особых точек решений рассматриваемых нелинейных дифференциальных уравнений с заданной точностью;

в) построение приближенных решений рассматриваемых дифференциальных уравнений как в области аналитичности, так и в окрестности подвижных особых точек;

г) исследование влияния погрешности исходных данных и подвижных особых точек на приближенное решение указанных уравнений.

Данные задачи решены в вещественной области автором в работе [20], а ниже предлагается обобщение результатов, опубликованных ранее [21], на комплексную область. Эти результаты необходимы для решения указанной выше второй задачи в комплексной области.

В работе [22] доказано существование решения скалярного дифференциального уравнения Риккати

$$\omega_1'(z) = \omega_1^2(z) + r(z) \tag{1}$$

в окрестности подвижной особой точки z^* в виде:

$$\omega_1(z) = (z - z^*)^p \sum_0^\infty C_{1,n}(z - z^*)^n \tag{2}$$

и для нестационарного матричного дифференциального уравнения Риккати

$$Y_1'(z) = -A(z) \cdot Y_1(z) + Y_1^2(z) + B(z) \tag{3}$$

в следующем виде:

$$Y_1(z) = (z - z^*)^p \sum_0^\infty C_{2,n}(z - z^*)^n, \tag{4}$$

где $p = -1$, $A(z)$, $B(z)$, C — матрицы размерности $m \times m$, а также указаны области представлений (2) и (4). В (3), (4) используется обозначение:

$$Y_1(z) = \|Y_{ij}(z)\|, \qquad i, j = 1, \ldots, m.$$

Теорема 1. Если z^* — подвижная особая точка решения задачи Коши для уравнения (1), то $|\omega_1(z)| \to \infty$ при $z \to z^*$.

Доказательство теоремы основано на результатах теоремы существования решения в окрестности подвижной особой точки, доказанной в работе [22].

Теорема 2. Если z^* — подвижная особая точка решения задачи Коши для уравнения (3), то $|Y_{ij}| \to \infty$ при $z \to z^*$ $(i, j = 1, \dots, m)$.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Введем следующие определения.

Определение 2. Линию в некоторой области комплексной плоскости назовем правильной, если для координаты точек этой линии существует взаимно однозначное соответствие.

Определение 3. Линию в некоторой области комплексной плоскости назовем неправильной в направлении оси OX (OY), если на этой линии существуют, по крайней мере, две точки имеющие одинаковые вторые (первые) координаты.

Определение 4. Неправильную линию в направлении оси OX и OY назовем просто неправильной линией.

Для уравнения (1) рассмотрим инверсное уравнение

$$\omega_2'(z) = -1 - r(z)\omega_2^2(z), \tag{5}$$

полученное из (1) с помощью замены

$$\omega_1(z) = \frac{1}{\omega_2(z)}.$$

Представим решение уравнения (5) в виде:

$$\omega_2(z) = U_2(x, y) + iV_2(x, y)$$

и рассмотрим два фазовых пространства

$$\Phi_1 = \{x, y, U_2(x, y)\}, \qquad \Phi_2 = \{x, y, V_2(x, y)\},$$

характеризующие решения уравнения (5).

Теорема 3. Для того чтобы z^* являлась подвижной особой точкой решения $\omega_1(z)$ дифференциального уравнения Риккати (1), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области G_1 $(z^* \in G_1)$ фазовых пространств Φ_1 и Φ_2 , $U_2(x, y)$ и $V_2(x, y)$ являлись непрерывными функциями своих аргументов и одновременно меняли знаки при переходе через точку $z^*(x^*, y^*)$, двигаясь вдоль некоторой правильной линии L_1 $(z^* \in L_1 \subset G_1)$.

Доказательство необходимости основано на теореме существования решения уравнения (1) в окрестности подвижной особой точки [22], а достаточность на — методах исследования функций нескольких переменных и теореме Больцано–Коши.

Рассмотрим инверсное матричное дифференциальное уравнение

$$Y_2'(z) = A(z) \cdot Y_2(z) + I - Y_2(z) \cdot B(z) \cdot Y_2(z), \tag{6}$$

полученное из (3) с помощью замены

$$Y_1(z) = Y_2^{-1}(z).$$

Представим решение уравнения (6) в виде:

$$Y_2(z) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

где

$$P(x,y) = \|p_{ij}(x,y)\| \qquad \text{и} \qquad Q(x,y) = \|q_{ij}(x,y)\|, \qquad i,j = 1\dots m.$$

Обозначим $\Phi_{ij} = \{x, y, p_{ij}(x,y)\}$ и $F_{ij} = \{x, y, q_{ij}(x,y)\}$ как фазовые пространства решения уравнения (6).

Теорема 4. Для того чтобы z^* была подвижной особой точкой решения $Y_1(z)$ матричного дифференциального уравнения Риккати (3), необходимо и достаточно, чтобы в некоторой области G_2 ($z^* \in G_2$) фазовых пространств Φ_{ij} и F_{ij}, $p_{ij}(x,y)$ и $q_{ij}(x,y)$ были непрерывными функциями своих аргументов и одновременно меняли знаки при переходе через точку $z^*(x^*, y^*)$ двигаясь вдоль некоторой правильной линии L_2 ($z^* \in L_2 \subset G_2$).

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Представление решений уравнений (1) и (3) соответственно в виде:

$$\omega_1(z) = U_1(x,y) + iV_1(x,y) \qquad \text{и} \qquad Y_1(z) = P_1(x,y) + iQ_1(x,y)_1$$

позволяет использовать теорию функций нескольких переменных для исследования поведения функций $U_1(x,y)$, $V_1(x,y)$, $P_1(x,y)$, $Q_1(x,y)$ в соответствующих фазовых пространствах, что существенным образом позволяет оптимизировать алгоритм поиска подвижных особых точек решений указанных выше дифференциальных уравнений.

Литература

[1] Сю, Д. Современная теория автоматического управления и ее приложение / Д. Сю, А. Майер. – М.: Машиностроение, 1972. – 552 с.

[2] Ройтенберг, Я.Н. Автоматическое управление / Я.Н. Ройтенберг. – М.: Наука, 1971. – 396 с.

[3] Kalman, R. Contribution to the Theory of optimal control / R. Kalman // Boletin de la Sociedad Matematica Mexanica. Sequnda serie. –1960. –V. 5. – No. 1. – P. 102–119.

[4] Горин, В.А. Исследование работы дозатора кормов / В.А. Горин, А.П. Конаков, Н.С. Попов // Механизация и электрификация с.-х. – 1981. – No. 1. – С. 24–26.

[5] Bucy R.S. Optimal Filtering for Correlated Noise / R.S. Bucy // J. of Mat. Analysis and Applications. – 1967. – V. 20. – No. 1. – P. 1–8.

[6] Kalman, R. New results in linear filtering and prediction theory / R. Kalman, R. Bucy // J. Basic Engr.(ASME Trans.). – 1961. – V. 83D. – P. 95–108.

[7] Bureau, F.J. Les equations differentielles du second ordre a points critiques fixes. 1. Les integrales de l'equation A2 de Painleve / F.J. Bureau // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1983. – V. 69. – No. 2. – P. 80–104.

[8] Bureau F.J. Les equations differntielles du second ordre a points critiques fixes. III. Les integrales de l'equation A3 de Painleve / F.J. Bureau // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1983. – V. 69. – No. 11. – P. 614–640.

[9] Bureau, F.J. Les equations differentilles du second ordre a points critiques fixes. II. Les integrales de l'equation A4 de Painleve / F.J. Bureau // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1983. – V. 69. – No. 7–9. – P. 397–433.

[10] Еругин, Н.П. К теории уравнения Риккати / Н.П. Еругин // Докл. АН БССР. – 1958. – Т. 2. – №9. – С. 359–362.

[11] Фильчаков, П.Ф. Про один ефективний метод розв'язання задач Коші для нелінійних диференціальных рівнянь / П.Ф. Фильчаков // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1967. – №1. – С. 43–47.

[12] Фильчаков, П.Ф. Решение нелинейных и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем при помощи степенных рядов / П.Ф. Фильчаков // Укр. матем. журнал. – 1969. – Т. 21. – №2. – С. 220–237.

[13] Фильчаков, П.Ф. Численные и графические методы прикладной математики / П.Ф. Фильчаков. – Киев: Наукова думка, 1970. –800 с.

[14] Синявский, М.Т. Про один численный метод визначення особливых точек интегралов систем нелинейных дифференциальных рівнянь / М.Т. Синявский // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1969. – №7. – С. 597–599.

[15] Callier, F.M. Report on a convergence criterion of the solu-tion of the Riccati differential equation / F.M. Callier, J.L. Willems //Circuit Theory and Design: Proc. Eur. Conf., The Hague, 25–28 Aug. 1981. Amsterdam a.o. 1981. – P. 526–530.

[16] Laub, A Schur techniques for Riccati differential equations / A Laub // J. Lect. Notes and Inf. Sci. – 1982. – V. 39. – P. 165–174.

[17] Sasagawa, T. On the finite escape phenomena for matrix Riccati equations / T. Sasagawa // IEEE Trans. Automat. Contr. – 1982. – V. 27. – №4. – P. 977–979.

[18] Common, A.K. Solutions of the Riccati equation and their re-lation to the Toda lattice / A.K. Common, D.E. Roberts // JK. Phys. A: Mat. and Gen. – 1986. – V. 19. – №10. – P. 1889–1898.

[19] Лосева, Н.В. Исследование нестационарных дифференциальных уравнений Риккати при помощи рядов Вольтерра: автореф. дис. …канд. физ.-мат. наук / Н.В. Лосева. – Л.: ЛГУ, 1981. – 18 с.

[20] Орлов, В.Н. Исследование приближенного решения с подвижными полюсами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: автореф. дис. …канд. физ.-мат. наук / В.Н. Орлов. – Минск: БГУ, 1989. – 18 с.

[21] Орлов, В.Н. Определение подвижной особой точки решения уравнения Риккати на конечном отрезке / В.Н. Орлов // Ленингр. гос. пед. ин.-т. – Л.: 1982. – 11 с. Деп. ВИНИТИ 01.06.82. №2705–82.

[22] Орлов, В.Н. Исследование приближенного решения в окрестности подвижной особой точки для дифференциальных уравнений Раккати / В.Н. Орлов // Известия ИТА ЧР. – Чебоксары, 2001. – С. 182–188.

Поступила в редакцию 27/*IV*/2006;
в окончательном варианте — 27/*IV*/2006.

AN EXISTENCE CRITERION FOR MOVING SINGULAR POINTS OF THE RICCATI DIFFERENTIAL EQUATION

 V.N. Orlov[2]

In the paper a problem concerning unique solutions of non-linear differential equations with moving singular points is studied. An existence criterion of moving singular points of the Riccati differential equation solution in complex area is given.

Paper received 27/*IV*/2006.
Paper accepted 27/*IV*/2006.

[2]Orlov Victor Nickolaevich, Dept. of Informatics and Computational Mathematics, Chuvash State Agricultural Academy, Cheboksary, 428000, Russia.