

УДК 517.982.27

О ДОПОЛНЯЕМОСТИ ПОДПРОСТРАНСТВ СИММЕТРИЧНОГО ПРОСТРАНСТВА, ПОРОЖДЕННЫХ СЖАТИЯМИ И ТРАНСЛЯЦИЯМИ¹

© 2006 К.В. Лыков²

В работе рассмотрены бесконечномерные подпространства симметричного пространства, которые порождаются сжатиями и трансляциями одной функции. Изучается вопрос о дополняемости таких подпространств, показана связь с пространством мультипликаторов. Также приведена характеристика пространств L_p в классе всех симметричных пространств. Работа дополняет результаты статьи [1], в которой разобран конечномерный случай.

Введение

Пусть E — симметричное пространство на $[0, 1]$, $a \in E$. Обозначим через $a_{n,k}(t)$ функцию, определенную на

$$\Delta_{n,k} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right],$$

и равноизмеримую с функцией $\sigma_{2^{-n}}a(t)$ (σ_t — оператор растяжения). Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ рассмотрим линейную оболочку функций $\{a_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$, которую обозначим $Q_{a,n}$.

В статье [1] рассмотрена связь между равномерной дополняемостью пространств $Q_{a,n}$ и пространством мультипликаторов $M(E)$ (см. §2). В частности, доказано, что если $a \in M(E)$, то подпространства $Q_{a,n}$ равномерно дополняемы. В сепарабельном пространстве верно и обратное утверждение. Кроме того, в [1] дается характеристика пространств L_p в классе всех симметричных пространств на $[0, 1]$.

В настоящей работе исследуется дополняемость пространства Q_a , являющегося замыканием линейной оболочки функций

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором С.В. Асташкиным.

²Лыков Константин Владимирович (alkv@list.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$a_k(t) = \begin{cases} a(2^k t - 1), & \text{если } t \in \Delta_k = (2^{-k}, 2^{-k+1}], \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Рассматривается связь с пространством мультипликаторов. Показано, что если $a \in M(E)$, то пространство $\mathcal{Q}_a$ дополняемо. Дана новая характеристика пространств L_p . В последней части работы сформулированы некоторые вопросы и возможные ответы на них.

1. Предварительные сведения

Мы будем рассматривать вещественные функции, заданные на отрезке $I = [0, 1]$ или на квадрате $I \times I$ с обычной мерой Лебега, измеримые и почти всюду конечные. Мы будем также отождествлять функции, равные почти всюду.

Функцией распределения функции $x(t)$, $t \in I$ или $I \times I$, называется функция

$$n_x(\tau) = \mu\{t : |x(t)| > \tau\}, \quad \tau > 0.$$

Таким образом, независимо от области задания функции $x(t)$ функция распределения определена на полуоси $(0, +\infty)$.

Две функции $x(t)$ и $y(t)$ называются равноизмеримыми, если их функции распределения совпадают.

Перестановкой функции $x(t)$ называется неотрицательная функция $x^*(t)$, определенная на $[0, 1]$, равноизмеримая с $x(t)$, убывающая и непрерывная слева. Перестановка всегда существует, единственна и ее можно определить по формуле ([2, С. 83]):

$$x^*(t) = \inf\{\tau : n_x(\tau) < t\}.$$

Напомним, что два пространства Ω_1 и Ω_2 с мерами μ_1 и μ_2 соответственно называются изоморфными, если после отбрасывания из них подмножеств меры нуль можно установить взаимно однозначное соответствие между оставшимися частями, сохраняющее классы измеримых множеств и меру множеств. Известно (см. [3]), что любое измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ с мерой Лебега, $\mu A < \infty$, изоморфно отрезку $[0, \mu A]$ с мерой Лебега. Как следствие получаем, что между $I = [0, 1]$ и $I \times I$ существует изоморфизм. Этот изоморфизм устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями на отрезке и функциями на квадрате, сохраняющее функции распределения и, следовательно, перестановки.

В пространстве $S[0, 1]$ всех измеримых вещественных почти всюду конечных функций на I можно ввести метрику по формуле

$$\rho(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} dt.$$

Сходимость в этой метрике эквивалентна сходимости по мере. Пространство $S[0, 1]$ не нормируемо.

Напомним также, что банахово пространство E функций из $S[0, 1]$ называется симметричным, если

1) из того, что $y \in E$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$ почти всюду следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$ (т. е. E является идеальной структурой);

2) из того, что $y \in E$ и $x(t)$ равноизмерима с $y(t)$, вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Условия 1 и 2 эквивалентны одному:

1') если $y \in E$ и $x^*(t) \leq y^*(t)$, то $x \in E$ и $\|x\|_E \leq \|y\|_E$.

Аналогичные определения имеют место и для пространств, заданных на $I \times I$. Основные сведения о симметричных пространствах можно найти в [2].

Примерами симметричных пространств могут служить пространства L_p , $p \in [1, \infty]$, пространства Лоренца Λ_φ и Марцинкевича M_φ , построенные по неотрицательной возрастающей вогнутой функции $\varphi(t)$.

Для любого симметричного пространства E на $[0, 1]$ справедливы вложения

$$L_\infty \subset E \subset L_1.$$

Изоморфизм между I и $I \times I$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между симметричными пространствами на I и $I \times I$, что позволяет рассматривать пространства только на I . Соответствующие пространства мы будем обозначать $E = E(I)$ и $E(I \times I)$.

Говорят, что идеальная структура обладает свойством Фату, если из того, что последовательность функций $x_n(t) \in E$ сходится почти всюду к функции $x(t)$ и ограничена в E ($\|x_n\|_E \leq C$), следует, что $x \in E$ и

$$\|x\|_E \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_E.$$

Норма в идеальной структуре E называется абсолютно непрерывной, если для функции $x \in E$ и любой убывающей последовательности измеримых множеств e_n с пустым пересечением

$$\|\chi_{e_n} \cdot x\|_E \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Как обычно, χ_e обозначает характеристическую функцию множества e . Структура с абсолютно непрерывной нормой называется правильной. Оказывается, что идеальная структура E сепарабельна тогда и только тогда, когда норма в E абсолютно непрерывна.

Ассоциированным пространством E' к пространству E на $[0, 1]$ называется множество всех функций $x \in S[0, 1]$ таких, что

$$\|x\|_{E'} = \sup \left\{ \int_0^1 |x(t)y(t)| dt : \|y\|_E \leq 1 \right\} < \infty.$$

Ассоциированное пространство к симметричному пространству E само является симметричным. Оно содержится в сопряженном пространстве E^* . Равенство $E' = E^*$ имеет место тогда и только тогда, когда E сепарабельно.

В пространстве $S[0, 1]$ действуют операторы растяжения σ_τ , определяемые формулой ($\tau > 0$) :

$$\sigma_\tau x(t) = \begin{cases} x(\tau^{-1}t), & t \in [0, \min\{\tau, 1\}], \\ 0, & t \in [0, 1] \setminus [0, \min\{\tau, 1\}]. \end{cases}$$

Операторы σ_τ ограниченно действуют в любом симметричном пространстве E . Функция $\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E}$ полумультимпликативна и квазивогнута, причем имеет место неравенство ([2. С. 132]):

$$\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq \max\{1, \tau\}.$$

Фундаментальной функцией пространства E называется функция

$$\varphi(t) = \|\chi_{[0,t]}\|_E.$$

Любое симметричное пространство E , сепарабельное или со свойством Фату, является интерполяционным между L_1 и L_∞ . Это означает, что существует константа $C = C(E)$ такая, что из ограниченности линейного оператора T из L_1 в L_1 и из L_∞ в L_∞ следует ограниченность T из E в E и справедливо неравенство

$$\|T\|_{E \rightarrow E} \leq C \left(\max\{\|T\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty}, \|T\|_{L_1 \rightarrow L_1}\} \right).$$

Замкнутое подпространство Y называется дополняемым в банаховом пространстве X , если существует проектор из X на Y (проектором называется линейный ограниченный оператор P из X на Y , оставляющий элементы Y на месте, т. е. $P(y) = y$ для любого $y \in Y$).

Семейство замкнутых подпространств $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ называется равномерно дополняемым, если существует семейство проекторов $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$,

$$P_\alpha : X \rightarrow Y_\alpha,$$

такое, что

$$\|P_\alpha\|_{X \rightarrow Y_\alpha} \leq C,$$

где C не зависит от $\alpha \in A$.

2. Тензорное произведение и пространство мультимпликаторов

Для двух измеримых функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$, $x, y \in S[0, 1]$, можно определить тензорное произведение $\otimes$:

$$(x \otimes y)(s, t) = x(s)y(t), \quad s, t \in I = [0, 1].$$

Пусть E — симметричное пространство на I .

Определение 2.1. Пространством мультимпликаторов $M(E)$ пространства E называется множество функций $x \in S[0, 1]$, для которых конечен функционал (норма в пространстве $M(E)$):

$$\|x\|_{M(E)} = \sup\{\|x \otimes y\|_{E(I \times I)} : \|y\|_E \leq 1\}.$$

Так как $\|x\|_{M(E)} \geq \varphi^{-1}(1)\|x \otimes \chi_{[0,1]}\| = \varphi^{-1}(1)\|x\|_E$, где $\varphi(t)$ — фундаментальная функция пространства E , то всегда $M(E) \subset E$. Пространство $M(E)$ является симметричным пространством на I . Различные свойства пространства мультипликаторов (общие и для конкретных пространств) можно посмотреть в [4]. В частности, там доказано следующее утверждение.

Теорема 2.1 ([4, теорема 1.14]). Пусть E — симметричное пространство на I , сепарабельное или со свойством Фату. Оператор

$$B: E \times E \rightarrow E(I \times I), \quad B(x, y)(s, t) = x \otimes y$$

ограничен тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что для любых $m \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^m \in \mathbb{R}^m$

$$K_E^m(\alpha) \leq C \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i \chi_{(\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}]} \right\|_E,$$

где

$$K_E^m(\alpha) = \sup \left\| \sum_{i=1}^m \alpha_i y_i \right\|_E,$$

а супремум берется по всем $y \geq 0$, $y \in E$, $\|y\|_E = 1$ и всем наборам функций y_i с дизъюнктными носителями,

$$n_{y_i}(s) = \frac{1}{m} n_y(s), \quad s > 0$$

($n_y(s)$ — функция распределения функции $y(t)$).

Далее нам понадобится следующий аналог приведенной теоремы.

Теорема 2.2. Пусть E — произвольное симметричное пространство на I . Тогда $y \in M(E)$ тогда и только тогда, когда существует константа $C > 0$ такая, что для произвольного набора действительных чисел $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^\infty$ справедливо неравенство:

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty \alpha_i y_i \right\|_E \leq C \left\| \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \chi_{\Delta_i} \right\|_E, \quad (2.1)$$

где χ_{Δ_i} — характеристическая функция множества

$$\Delta_i = (2^{-i}, 2^{-i+1}],$$

а

$$y_i = \begin{cases} y(2^i t - 1), & \text{если } t \in \Delta_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если $x \notin E$, полагаем $\|x\|_E = \infty$.

Доказательство. В силу симметричности пространств E и $M(E)$ можно считать, что $y = y^*$ ($y^*(t)$ — перестановка функции $y(t)$).

Пусть $y \in M(E)$, $x = \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \chi_{\Delta_i}$.

Тогда функция

$$y \otimes x = y(t) \cdot \sum_{i=1}^\infty \alpha_i \chi_{\Delta_i}(s)$$

равноизмерима с функцией $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i$.

Поэтому

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \right\|_E = \left\| y(t) \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{\Delta_i}(s) \right\|_{E \times E} \leq \|y\|_{M(E)} \cdot \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{\Delta_i} \right\|_E$$

и (2.1) выполнено с $C = \|y\|_{M(E)}$.

Пусть теперь $y \in E$ и выполнено (2.1). Нетрудно видеть, что для любого $x \in E$ функции $y \otimes x$ и $y \otimes x^*$ равноизмеримы. Поэтому сразу можно считать, что $x = x^*$. В этом случае справедливы неравенства:

$$x_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} x(2^{-i+1}) \chi_{\Delta_i}(t) \leq x(t) \leq \sum_{i=1}^{\infty} x(2^{-i}) \chi_{\Delta_i}(t) = \sigma_2 x_1(t),$$

где σ_τ — оператор растяжения.

Поэтому

$$\begin{aligned} \|y \otimes x\|_{E \times E} &\leq \|y \otimes \sigma_2 x_1\|_{E \times E} = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x(2^{-i}) y_i \right\|_E \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} x(2^{-i}) \chi_{\Delta_i} \right\|_E = \\ &= C \|\sigma_2 x_1\|_E \leq C \|\sigma_2\|_{E \rightarrow E} \cdot \|x_1\|_E \leq 2C \|x\|_E \end{aligned}$$

(так как $\|\sigma_\tau\|_{E \rightarrow E} \leq \max\{1, \tau\}$).

Т. е. $\|y \otimes x\|_{E \times E} \leq 2C \|x\|_E$, поэтому $y \in M(E)$ и $\|y\|_{M(E)} \leq 2C$.

Доказательство закончено.

Следствие 2.1. Оператор

$$B: E \times E \rightarrow E(I \times I), \quad B(x, y)(s, t) = x \otimes y$$

ограничен тогда и только тогда, когда существует $C > 0$ такое, что для всех $y \in E$, $\|y\|_E = 1$, и любого набора вещественных чисел $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^{\infty}$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i y_i \right\|_E \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \chi_{\Delta_i} \right\|_E. \quad (2.2)$$

Δ_i и y_i означают тоже, что и в теореме 2.2.

Доказательство. Ограниченность оператора B равносильна условию $M(E) = E$ (с эквивалентностью норм в силу теоремы Банаха об обратном операторе). Если выполнено (2.2), то, очевидно, выполнено и (2.1) для любого $y \in E$, $\|y\|_E \leq 1$. По теореме 2.2 $y \in M(E)$.

Обратно, если $y \in M(E) = E$, то выполнено (2.1). При этом, как следует из доказательства теоремы 2.2, в (2.1) в качестве C можно положить константу вложения E в $M(E)$.

3. Подпространства, порожденные сжатиями и трансляциями

Пусть E — симметричное пространство, $X \subset E$. Через $V(X)$ мы будем обозначать множество

$$V(X) = \{x \in X : x = x^* \neq 0\}.$$

Для произвольного $a \in V(E)$ и двоичных интервалов

$$\Delta_{n,k} = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

рассмотрим функции, полученные сжатием и трансляциями функции a :

$$a_{n,k}(t) = \begin{cases} a(2^n t - k + 1), & \text{если } t \in \Delta_{n,k}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, получаем $\text{supp } a_{n,k} \subset \Delta_{n,k}$ и $n_{a_{n,k}}(\tau) = 2^{-n} \cdot n_a(\tau)$. Через $Q_{a,n}$ обозначим линейную оболочку функций $a_{n,k}$, $Q_{a,n} = \text{span}[\{a_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}]$.

Пространства $Q_{a,n}$ конечномерны и, следовательно, дополняемы. В [1] вводится множество $N_0(E)$, состоящее из всех функций $a \in V(E)$, для которых подпространства $Q_{a,n}$ равномерно дополняемы в E . Там же доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 ([1, теорема 2]). Пусть E — симметричное пространство, сепарабельное или обладающее свойством Фату, E^0 — замыкание L_∞ в E . Тогда

- 1) $V(M(E)) \subset N_0(E)$;
- 2) $N_0(E^0) \subset V(M(E))$.

Так как для сепарабельного пространства справедливо равенство $E^0 = E$, то из теоремы получаем

Следствие 3.1 ([1, следствие 2]). Для сепарабельного симметричного пространства E справедливо равенство

$$V(M(E)) = N_0(E).$$

В [1] также приведена характеристика пространств L_p в классе симметричных пространств.

Теорема 3.2 ([1, теорема 7]). Пусть E — симметричное пространство на $[0, 1]$, сепарабельное или со свойством Фату. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $V(E) = N_0(E)$, $V(E') = N_0(E')$.
- 2) Существует $C > 0$ такое, что

$$C^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\|_E \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k} \right\|_E \leq C \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\|_E \quad (3.1)$$

для произвольного $a \in V(E)$ с $\|a\|_E = 1$ и всех наборов $c_{n,k} \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, 2^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

3) Для произвольных $a \in V(E)$, $f \in V(E')$, удовлетворяющих

$$\int_0^1 f(t)a(t) dt = 1, \quad (3.2)$$

операторы

$$P_n x(t) = P_{n,a,f} x(t) = \sum_{k=1}^{2^n} \left(2^n \int_{\Delta_{n,k}} f_{n,k}(s)x(s) ds \right) a_{n,k}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3)$$

равномерно ограничены в E .

4) Оператор

$$B(x, y)(t, s) = x(t)y(s)$$

ограниченно действует из $E \times E$ в $E(I \times I)$ и из $E' \times E'$ в $E'(I \times I)$.

5) $E = L_p$ для некоторого $p \in [1, \infty]$.

Здесь мы рассмотрим бесконечномерный случай.

Для произвольного $a \in V(E)$ и двоичных интервалов $\Delta_k = (2^{-k}, 2^{-k+1}]$, $k = 1, 2, \dots$, рассмотрим функции, полученные сжатиями и трансляциями функции a :

$$a_k(t) = \begin{cases} a(2^k t - 1), & \text{если } t \in \Delta_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом получаем $\text{supp } a_k \subset \Delta_k$ и $n_{a_k}(\tau) = 2^{-k} \cdot n_a(\tau)$.

Через Q_a обозначим замкнутое линейное подпространство, порожденное функциями a_k , $Q_a = \overline{\text{span}\{a_k\}_{k=1}^{\infty}}$. Через $N_1(E)$ обозначим множество функций $a \in V(E)$, для которых пространство Q_a дополняемо в E .

Пусть $a \in V(E)$, $f \in V(E')$ и выполнено (3.2).

Введем в рассмотрение оператор

$$P_{a,f} x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right) a_k(t), \quad (3.4)$$

где

$$f_k(t) = \begin{cases} f(2^k t - 1), & \text{если } t \in \Delta_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Через $\widetilde{N}_1(E)$ будем обозначать множество таких $a \in V(E)$, для которых существует функция $f \in V(E')$ такая, что оператор $P_{a,f}$ ограничен. Очевидно, что $\widetilde{N}_1(E) \subset N_1(E)$.

Лемма 3.1. Пусть $e(t) \equiv 1$. Если пространство E интерполяционно между L_1 и L_{∞} и $a \in M(E)$, то оператор

$$P_{a,e}^1 x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} x(s) ds \right) a_k(t)$$

ограниченно действует в пространстве E .

Доказательство. Рассмотрим оператор

$$P_e x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} x(s) ds \right) \chi_{\Delta_k}(t).$$

Легко видеть, что

$$\|P_e\|_{L_1 \rightarrow L_1} = \|P_e\|_{L_{\infty} \rightarrow L_{\infty}} = 1.$$

Поэтому, в силу интерполяционности пространства E , имеем

$$\|P_e\|_{E \rightarrow E} \leq C_1.$$

Если $a \in M(E)$, то, в силу теоремы 2.2, получаем

$$\begin{aligned} \|P_{a,e}^1 x(t)\| &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} x(s) ds \right) a_k(t) \right\| \leq \\ &\leq C_2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} x(s) ds \right) \chi_{\Delta_k}(t) \right\| \leq C_2 \|P_e\|_{E \rightarrow E} \cdot \|x\| \leq C_1 C_2 \|x\| = C \|x\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следствие 3.2. Для симметричного пространства E , интерполяционного между L_1 и L_{∞} , имеет место включение:

$$V(M(E)) \subset \widetilde{N}_1(E). \quad (3.5)$$

Лемма 3.2. Пусть E сепарабельно, $a \in N_1(E)$. Тогда существует последовательность $f_{(1)}, f_{(2)}, f_{(3)}, \dots$ функций из $V(E')$ такая, что

$$\int_0^1 f_{(i)}(s) a(s) ds = 1 \quad (3.6)$$

для любого $i \in \mathbb{N}$ и оператор

$$P_1 x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} (f_{(k)})_k(s) x(s) ds \right) a_k(t) \quad (3.7)$$

ограничен из E в Q_a . Здесь

$$(f_{(k)})_k(t) = \begin{cases} f_{(k)}(2^k t - 1), & \text{если } t \in \Delta_k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Так как E сепарабельно, то $E' = E^*$. Поэтому, если $a \in N_1(E)$, то существует последовательность функций $g_{(k)}(s) \in E'$ такая, что

$$\int_0^1 g_{(k)}(s) a_k(s) ds = 1, \quad \int_0^1 g_{(k)}(s) a_j(s) ds = 0, \quad j \neq k,$$

и проектор

$$Px(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 g_{(k)}(s)x(s) ds \right) a_k(t)$$

ограничен, $\|P\|_{E \rightarrow E} \leq C$.

Пусть $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ — система функций Радемахера на отрезке $[0, 1]$:

$$r_i(t) = \text{sign}(\sin(2^i \pi t)).$$

Можно считать, что $|r_i(t)| = 1$. Из симметричности пространства E следует, что для почти всех $u \in [0, 1]$ норма оператора

$$P_u x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} r_k(u) \sum_{i=1}^{\infty} r_i(u) \left(\int_{\Delta_i} g_{(k)}(s)x(s) ds \right) a_k(t)$$

равна норме оператора P . Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} Sx(t) &= \int_0^1 P_u x(t) du = \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} r_k(u) \sum_{i=1}^{\infty} r_i(u) \left(\int_{\Delta_i} g_{(k)}(s)x(s) ds \right) a_k(t) \right) du = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\Delta_i} g_{(i)}(s)x(s) ds \right) a_i(t). \end{aligned}$$

Тогда

$$\|S\|_{E \rightarrow E} \leq \sup_{u \in [0, 1]} \|P_u\| = \|P\| \leq C.$$

Поэтому сразу можно считать, что $\text{supp } g_{(i)} \subset \Delta_i$.

Положим теперь

$$f_{(i)}^1 = 2^{-i} h_{(i)} \left(\int_{\Delta_i} h_{(i)}(s) a_i(s) ds \right)^{-1},$$

где $h_{(i)}$ убывает на Δ_i , неотрицательная и равноизмеримая с $g_{(i)}$. Тогда функции

$$f_{(i)}(t) = f_{(i)}^1(2^{-i}(t+1))$$

удовлетворяют всем требованиям леммы.

Доказательство завершено.

Лемма 3.3. Пусть $a \in V(E)$. Предположим, что существует последовательность функций $f_{(k)} \in V(E')$, $k \in \mathbb{N}$, для которой выполнено (3.6), оператор P_1 , определенный в (3.7), ограничен и

$$\lambda = \inf_k \|f_{(k)}\|_{L_1} > 0. \quad (3.8)$$

Тогда $a \in M(E)$.

Доказательство. Если

$$x(s) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k}(s), \quad c_k \in \mathbb{R}.$$

то

$$P_1 x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} (f_{(k)})_k(s) c_k ds \right) a_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \|f_{(k)}\|_{L_1} a_k(t).$$

Поэтому

$$\|P_1 x\|_E \geq \lambda \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \right\|_E.$$

С другой стороны, в силу ограниченности оператора P_1 ,

$$\|P_1 x\|_E \leq C \|x\|_E = C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\|_E.$$

Из двух последних неравенств получаем, что для любого набора $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ вещественных чисел справедливо соотношение:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \right\|_E \leq C \lambda^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\|_E,$$

откуда, в силу теоремы 2.2, $a \in M(E)$.

Лемма доказана.

Из леммы 3.3 и следствия 3.2 вытекает

Теорема 3.3. Если E — симметричное пространство, интерполяционное между L_1 и L_{∞} , то $V(M(E)) = \widetilde{N}_1(E)$.

Перейдем теперь к заключительной цели нашей работы — характеристике пространств L_p . Предварительно докажем несколько лемм.

Лемма 3.4. Пусть $a \in E$ и для любого набора $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $c_k \in \mathbb{R}$, выполнено

$$C^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\|. \quad (3.9)$$

Тогда для любого $n = 0, 1, 2, \dots$ и любого набора $\{c_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$ справедливы неравенства:

$$C_1^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k} \right\| \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\|, \quad (3.10)$$

где $C_1 = 2C$ (мы считаем, что $\|x\|_E = \infty$, если $x \notin E$).

Доказательство. Очевидно, что в неравенствах (3.10) можно считать последовательность $\{c_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$ неотрицательной и убывающей. В этом случае положим

$$x(t) = \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}}(t) = x^*(t).$$

Далее,

$$x_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} x(2^{-k+1})\chi_{\Delta_k}(t) \leq x(t) \leq \sum_{k=1}^{\infty} x(2^{-k})\chi_{\Delta_k}(t) = \sigma_2 x_1(t),$$

где σ_τ — оператор растяжения.

В дальнейших рассуждениях $\otimes$ означает, как и ранее, тензорное произведение. Имеем:

$$\|x \otimes a\| \leq \|\sigma_2 x_1 \otimes a\| \leq C \|\sigma_2 x_1\| \leq C \|\sigma_2\| \cdot \|x_1\| \leq 2C \|x\|,$$

т. е.

$$\left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k} \right\| \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\|.$$

С другой стороны,

$$\|x\| \leq \|\sigma_2 x_1\| \leq \|\sigma_2\| \cdot \|x_1\| \leq C \|\sigma_2\| \cdot \|x_1 \otimes a\| \leq 2C \|x \otimes a\|,$$

откуда

$$C_1^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\| \leq \left\| \sum_{k=1}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k} \right\|.$$

Утверждение доказано.

Лемма 3.5. Пусть E сепарабельно или со свойством Фату. Если для $a \in E$ выполнено (3.10) с произвольным набором $\{c_{n,k}\}_{k=1}^{2^n}$ и для всех $n = 0, 1, 2, \dots$, то для любой последовательности $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ выполняется (3.9) (с той же константой).

Доказательство. Функции

$$x_a = \sum_{i=1}^n c_i a_i \text{ и } y_a = \sum_{k=2}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k},$$

где $c_{n,k} = c_i$ при $\Delta_{n,k} \subset \Delta_i$, равноизмеримы. То же верно и для функций

$$x_e = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i} \text{ и } y_e = \sum_{k=2}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n c_i a_i \right\| &= \left\| \sum_{k=2}^{2^n} c_{n,k} a_{n,k} \right\| \leq C \left\| \sum_{k=2}^{2^n} c_{n,k} \chi_{\Delta_{n,k}} \right\| = \\ &= C \left\| \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i} \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{\Delta_i} \right\|. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\left\| \sum_{i=1}^n c_i \chi_{\Delta_i} \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^n c_i a_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i \right\|.$$

Если в E есть свойство Фату, то, переходя в этих неравенствах к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем (3.9).

Пусть теперь E сепарабельно. Если $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{\Delta_i} \in E$, то, в силу абсолютной непрерывности нормы, для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $N_m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\left\| \sum_{k=N_m+1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\| \leq 2^{-m}.$$

Поэтому

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=N_{m-1}+1}^{N_m} c_k \chi_{\Delta_k} \right\| < \infty \quad (N_0 = 0),$$

и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \sum_{k=N_{m-1}+1}^{N_m} c_k a_k \right\| < \infty.$$

В силу полноты пространства, из последнего неравенства следует, что $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i \in E$, а тогда, в силу абсолютной непрерывности нормы,

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{\infty} c_i \chi_{\Delta_i} \right\|.$$

Аналогично доказывается второе неравенство в (3.9).

Доказательство закончено.

Лемма 3.6. Пусть $E = L_p$, $p \in [1, \infty]$. Тогда для нормы оператора, определенного формулой (3.4), справедливо равенство

$$\|P_{a,f}\|_{L_p \rightarrow L_p} = \|a\|_{L_p} \cdot \|f\|_{L_q}, \quad (3.11)$$

где $1/q = 1 - 1/p$.

Доказательство. Пусть сначала $p \in (1, \infty)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|P_{a,f}x\|_p^p &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right) a_k(t) \right\|_p^p = \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right) a_k(t) \right|^p dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{pk} \left| \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right|^p \cdot \int_{\Delta_k} a_k^p(t) dt = \\ &= \|a\|_p^p \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(p-1)k} \left| \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right|^p. \end{aligned}$$

Ввиду неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} \|P_{a,f}x\|_p^p &\leq \|a\|_p^p \sum_{k=1}^{\infty} 2^{(p-1)k} \left(\int_{\Delta_k} (f_k(s))^q ds \right)^{p/q} \cdot \int_{\Delta_k} |x(s)|^p ds = \\ &= \|a\|_p^p \cdot \|f\|_p^p \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Delta_k} |x(s)|^p ds \right) = \|a\|_p^p \cdot \|f\|_p^p \cdot \|x\|_p^p. \end{aligned}$$

Возведя обе части неравенства в степень $1/p$, получим

$$\|P_{a,f}\| \leq \|a\|_p \cdot \|f\|_q.$$

С другой стороны, полагая $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{q/p}(t)$, убеждаемся, что на самом деле имеет место равенство.

Пусть теперь $p = \infty$.

$$\begin{aligned} \|P_{a,f}x(t)\|_{\infty} &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right) a_k(t) \right\|_{\infty} = \\ &= \|a\|_{\infty} \sup_k \left| 2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right| \leq \|a\|_{\infty} \cdot \|f\|_1 \cdot \|x\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Подставляя вместо $x(t)$ константу, видим, что справедливо (3.11).

Пусть, наконец, $p = 1$.

$$\begin{aligned} \|P_{a,f}x\|_1 &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right) a_k(t) \right\|_1 = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \int_{\Delta_k} a_k(t) dt \cdot \left| \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \right| \leq \\ &\leq \|a\|_1 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \|x\chi_{\Delta_k}\|_1 = \|a\|_1 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \|x\|_1. \end{aligned}$$

Пусть теперь $y \in L_1$ таково, что $\|y\|_1 = 1$ и

$$\int_0^1 f(s)y(s) ds > \|f\|_{\infty} - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$\int_{\Delta_k} f_k(s)y_k(s) ds > 2^{-k}(\|f\|_{\infty} - \varepsilon).$$

Поэтому для $x(t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)$ выполнено

$$\|P_{a,f}x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \int_{\Delta_k} a_k(t) dt \cdot \int_{\Delta_k} f_k(s)y_k(s) ds > \|a\|_1 \cdot (\|f\|_{\infty} - \varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, получаем (3.11).

Доказательство закончено.

Теорема 3.4. Если E — симметричное пространство на $[0, 1]$, сепарабельное или со свойством Фату, то следующие условия эквивалентны:

1) Существует $C > 0$ такое, что

$$C^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\|_E \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \right\|_E \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k \chi_{\Delta_k} \right\|_E$$

для произвольного $a \in V(E)$ с $\|a\|_E = 1$ и всех наборов $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$, $c_k \in \mathbb{R}$.

2) Для произвольных $a \in V(E)$ и $f \in V(E')$, удовлетворяющих (3.2), оператор $P_{a,f}$, определенный в (3.4), ограничен.

3) $E = L_p$ для некоторого $p \in [1, \infty]$.

Доказательство. Равносильность условий 1 и 3 следует непосредственно из леммы 3.4, леммы 3.5 и равносильности условий 2 и 5 теоремы 3.2. Условие 2 следует из 3 в силу леммы 3.6. Остается доказать импликацию $2 \Rightarrow 3$.

Пусть выполнено 2. В этом случае $\widetilde{N}_1(E) = V(E)$, откуда, в силу теоремы 3.3, следует $V(M(E)) = V(E)$. Поэтому, так как пространства E и $M(E)$ симметричны, $M(E) = E$ (с эквивалентностью норм, в силу теоремы Банаха об обратном операторе и всегда имеющего место вложения $M(E) \subset E$).

Далее, для любого $x \in E$ и $y \in E'$ имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 P_{a,f}x(t)y(t) dt &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \int_{\Delta_k} f_k(s)x(s) ds \cdot \int_{\Delta_k} a_k(t)y(t) dt = \\ &= \int_0^1 P_{f,a}y(s)x(s) ds. \end{aligned}$$

Из этого равенства и ограниченности оператора $P_{a,f}$ следует ограниченность оператора $P_{f,a} : E' \rightarrow E'$. Поэтому, в силу теоремы 3.3, $M(E') = E'$, и 3 снова следует из теоремы 3.2 (точнее, из равносильности условий 4 и 5 этой теоремы).

4. Заключительные замечания

В связи с приведенными результатами выглядит естественным следующее предположение.

Гипотеза. Пусть E — сепарабельное симметричное пространство, $a \in V(E)$ и пространство Q_a дополняемо. Тогда существует функция $f \in V(E')$ такая, что выполнено (3.2), и оператор, определенный в (3.4), ограничен.

Другими словами, гипотеза утверждает, что в сепарабельном пространстве справедливо равенство

$$\widetilde{N}_1(E) = N_1(E). \quad (4.1)$$

В силу теоремы 3.3, для справедливости (4.1) необходимо и достаточно выполнение равенства

$$V(M(E)) = N_1(E).$$

Так как, очевидно, $\widetilde{N}_1(E) \subset N_1(E)$, то достаточно доказать, что из $a \in N_1(E)$ следует $a \in M(E)$.

Если последовательность $\{f_{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, определенная в лемме 3.2, удовлетворяет условию (3.8), то гипотеза немедленно вытекает из леммы 3.3. В связи с этим возникает вопрос: возможна ли ограниченность оператора (3.7), если условие (3.8) не выполняется; и, если возможна, можно ли заменить последовательность $\{f_{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ на другую, для которой (3.8) уже выполняется, а оператор (3.7) остается ограниченным.

Если гипотеза верна, то на бесконечномерный случай переносятся многие результаты статьи [1].

Литература

- [1] Astashkin, S.V. Multiplicator Space and Complemented Subspaces of rearrangement invariant space / S.V.Astashkin, L.Maligranda E.M.Semenov // Journal of Functional Analysis. – 2003. – V. 202. – P. 247–276.
- [2] Крейн, С.Г. Интерполяция линейных операторов / С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семенов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
- [3] Рохлин, В.А. Об основных понятиях теории меры / В.А.Рохлин // Математический сборник. – 1949. – Т. 25. – № 1. – С. 107–150.
- [4] Astashkin, S.V. Tensor Product in Symmetric Function Spaces / S.V.Astashkin // Collect. Math. – 1997. – V. 48. – P. 375–391.

Поступила в редакцию 3/VII/2006;
в окончательном варианте — 3/VII/2006.

**ON COMPLEMENTABILITY OF SUBSPACES
GENERATED BY COMPRESSIONS AND TRANSLATIONS
IN A SYMMETRIC SPACE³**

© 2006 K.V. Lykov⁴

In the paper properties of symmetric space infinite dimensional subspaces generated by compressions and translations of a function are presented. Relation to multiplier space is considered. Also we give a characterization of L_p -spaces among all symmetric spaces.

Paper received 3/VII/2006.

Paper accepted 3/VII/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. S.V. Astashkin.

⁴Lykov Konstantin Vladimirovich (alkv@list.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.