

УДК 517.98

ОЦЕНКА ФУНКЦИИ ЛЕБЕГА ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ–ЯКОБИ

© 2006 Ф.М. Коркмасов¹

Рассмотрена система классических многочленов Якоби степени не выше N , образующих ортогональную систему на дискретном множестве, состоящем из нулей многочлена Якоби степени N . Для произвольной непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(t)$ построены дискретные суммы Фурье–Якоби $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, t)$ по введенной выше ортонормированной системе. Доказано, что функция Лебега $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ дискретных сумм Фурье–Якоби при $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $n \leq N-1$, $n \geq 1$ имеет на отрезке $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) порядок $O(\ln n)$, а на отрезках $[-1, -1+\varepsilon]$ и $[1-\varepsilon, 1]$, соответственно, порядок $O(n^{\beta+1/2})$ и $O(n^{\alpha+1/2})$.

Введение

Пусть H^n — пространство алгебраических многочленов $p_n = p_n(x)$ степени не выше n , $C[-1, 1]$ — пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций. $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — сетка — дискретное множество, состоящее из конечного или бесконечного числа различных точек действительной оси $\mathbf{R}$. Обозначим через $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ ($\alpha, \beta > -1$) классические многочлены Якоби степени N , ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ по весу $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Покажем, что многочлены Якоби $P_0^{\alpha,\beta}(x), P_1^{\alpha,\beta}(x), \dots, P_{N-1}^{\alpha,\beta}(x)$ ($N = 1, 2, \dots$) могут быть рассмотрены как многочлены, образующие ортогональную систему на сетке $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. В этом смысле многочлены Якоби являются ортогональными многочленами дискретной переменной.

Хорошо известна следующая квадратурная формула Гаусса [1]

$$\int_{-1}^1 \rho(x) \sigma_{2N-1}(x) dx = \sum_{j=1}^N \mu_j \sigma_{2N-1}(x_j), \quad (1.1)$$

справедливая для любого многочлена $\sigma_{2N-1}(x) \in H^{2N-1}$. В (1.1) $x_j = x_j^{\alpha,\beta}$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $\mu_j = \mu_j^{\alpha,\beta}$ — числа Кристоффеля (или веса

¹Коркмасов Фуад Муэддинович (kfuad@mail.ru), Дагестанский научный центр Российской Академии наук, 367030, Россия, Республика Дагестан, г. Махачкала, проспект имама Шамиля, 39.

квадратурной формулы),

$$\mu_j = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_j^2) \left\{ P_N^{\alpha,\beta'}(x_j) \right\}^2}. \quad (1.2)$$

Если, в частности, положить $\sigma_{2N-1}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)$, $m+n \leq 2N-1$, то из (1.1)

$$\int_{-1}^1 \rho(x) P_n^{\alpha,\beta}(x) P_m^{\alpha,\beta}(x) dx = \sum_{j=1}^N \mu_j P_n^{\alpha,\beta}(x_j) P_m^{\alpha,\beta}(x_j) = h_n^{\alpha,\beta} \delta_{mn}, \quad (1.3)$$

где $h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, δ_{mn} — символ Кронекера.

Из (1.3) видно, что система многочленов Якоби $\{P_i^{\alpha,\beta}(x)\}_{i=0}^{N-1}$ является ортогональной на сетке $\Omega_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, относительно скалярного произведения $(f, g) = \sum_{x \in \Omega_N} \mu(x) f(x) g(x)$ ($\mu(x_j) = \mu_j$).

Полагая

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(t), \quad (1.4)$$

определим для произвольной функции $f(t) \in C[-1, 1]$ дискретную частную сумму Фурье–Якоби порядка $n \leq N-1$ по ортонормированной системе $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^{N-1}$

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, t) = \sum_{k=0}^n \widehat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t), \quad (1.5)$$

где $\widehat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum_{j=1}^N \mu_j f(x_j) \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x_j)$ — дискретные коэффициенты Фурье–Якоби.

Пусть $E_n(f)$ — наилучшее равномерное приближение функции $f(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше n и $p_n^*(t) \in H^n$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(t)$ в пространстве $C[-1, 1]$, т.е.

$$E_n(f) = \max_{t \in [-1, 1]} |f(t) - p_n^*(t)|. \quad (1.6)$$

Очевидно, что $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(p_n^*, t) = p_n^*(t)$, поэтому, учитывая (1.5), получим

$$\begin{aligned} |f(t) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, t)| &\leq |f(t) - p_n^*(t)| + |p_n^*(t) - S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, t)| = \\ &= |f(t) - p_n^*(t)| + |S_{n,N}^{\alpha,\beta}(p_n^*(t) - f, t)| \leq E_n(f) + E_n(f) L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = (1 + L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)) E_n(f), \end{aligned} \quad (1.7)$$

где

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t) \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x_j) \right| \quad (1.8)$$

— функция Лебега порядка n дискретных сумм Фурье–Якоби.

Функции Лебега линейных процессов аппроксимации многочленами играют важную роль в теории приближений. Оценки функций Лебега позволяют устанавливать достаточные условия равномерной сходимости рядов

Фурье по ортогональным многочленам на всем промежутке ортогональности. В разное время вопросы, связанные с оценкой функции Лебега классических сумм Фурье, рассматривались в работах [1–10] и др. В частности, в работе [6] для функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(t)$ классических сумм Фурье–Якоби при $t \in [-1, 1]$, $\alpha, \beta > -1/2$ было получено соотношение

$$L_n^{\alpha,\beta}(t) \asymp \ln \left[n(1-x)^{\varepsilon(\alpha)}(1+x)^{\varepsilon(\beta)} + 1 \right] + \sqrt{n} \left[|P_n^{\alpha,\beta}(t)| + |P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)| \right], \quad (1.9)$$

в том смысле, что отношение этих выражений заключено между двумя положительными постоянными, зависящими от α и β , где

$$\varepsilon(\gamma) = \begin{cases} 1/2 & \text{при } \gamma \neq 1/2, \\ 0 & \text{при } \gamma = 1/2. \end{cases}$$

Из результата (1.9) видно, что порядок роста $L_n^{\alpha,\beta}(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ есть $O(n^{q+1/2})$, где $q = \max\{\alpha, \beta\}$, а на любом отрезке $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ порядок равен $O(\ln n)$.

В работе [7] функции Лебега классических сумм Фурье–Якоби оцениваются при $t \in [-1, 1]$ в случае, когда по крайней мере одно из чисел α и β принадлежит интервалу $(-1, -1/2)$, в частности,

$$L_n^{\alpha,\beta}(t) = O(1) \left[1 + \ln \left[1 + n^2 (1 - x^2) \right] \right] \quad (\alpha, \beta \in (-1, -1/2)),$$

$$L_{n-1}^{\alpha,\beta}(t) = O(1) \left[\ln \left[1 + n^2 (1 - x) \right] + \left(\sqrt{1+x} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2} \right] \quad (\alpha \in (-1, -1/2), \beta \geq -1/2),$$

где $O(1)$ зависит от α и β .

Отметим также, что при $t \in [-1, 1]$, $\alpha = \beta = -1/2$ (см., например, [3], [11])

$$L_n^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}(t) = O(\ln n).$$

В настоящей работе мы оцениваем сверху функцию Лебега (1.8) дискретных сумм Фурье–Якоби при $t \in [-1, 1]$, $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $n \leq N - 1$, $n \geq 1$. Нами доказано (теорема 1), что $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ на отрезке $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$ имеет порядок $O(\ln n)$, а на отрезках $[-1, -1 + \varepsilon]$ и $[1 - \varepsilon, 1]$, соответственно, имеет порядок $O(n^{\beta+1/2})$ и $O(n^{\alpha+1/2})$. Тем самым показано, что результат работы [6], касающийся верхней оценки функции Лебега $L_n^{\alpha,\beta}(t)$ классических сумм Фурье–Якоби, имеет место и в случае дискретных сумм Фурье–Якоби.

1. Вспомогательные утверждения

Приведем без доказательства следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a_1, b_1]$ и $\{t_j\}_{j=0}^m$ — сетка, такая что $a_1 < t_0 < t_1 < \dots < t_m < b_1$. Пусть $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Тогда, если

- 1) $f(x)$ монотонно возрастает на $[a_2, b_2]$, то

$$\sum_{a_2 \leq t_j \leq b_2} f(t_j) \Delta t_j \leq \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx + f(b_2) \Delta^*, \quad (2.1)$$

2) $f(x)$ монотонно убывает на $[a_2, b_2]$, то

$$\sum_{a_2 \leq t_j \leq b_2} f(t_j) \Delta t_j \leq \int_{a_2}^{b_2} f(x) dx + f(a_2) \Delta^*, \quad (2.2)$$

где $\Delta^* = \max_j \Delta t_j$.

Лемма 2 [1, п.15.3]. Если $x_j = \cos \theta_j$ ($0 < \theta_j < \pi$) — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha, \beta}(x)$, $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, то для чисел Кристоффеля μ_j , определенных равенствами (1.2), справедливы следующие оценки

$$\mu_j \leq \frac{\lambda}{N} (\sin \theta_j)^{2\alpha+1} \quad (0 < \theta_j \leq \pi - \delta), \quad (2.3)$$

$$\mu_j \leq \frac{\lambda}{N} (\sin \theta_j)^{2\beta+1} \quad (\delta \leq \theta_j < \pi), \quad (2.4)$$

где δ и $\lambda = \lambda(\delta)$ — фиксированные положительные числа, $j = 1, 2, \dots, N$.

Нам понадобятся некоторые свойства многочленов Якоби [1]. Для удобства ссылок мы соберем их в этом параграфе.

Справедливы следующие равенства:

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta, \alpha}(-x), \quad (2.5)$$

$$P_n^{\alpha+1, \beta}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \cdot \frac{(n + \alpha + 1)P_n^{\alpha, \beta}(x) - (n + 1)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)}{1 - x}, \quad (2.6)$$

$$P_n^{\alpha, \beta+1}(x) = \frac{2}{2n + \alpha + \beta + 2} \cdot \frac{(n + \beta + 1)P_n^{\alpha, \beta}(x) + (n + 1)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)}{1 + x}, \quad (2.7)$$

Для $-1 \leq t \leq 1$, $n \geq 1$ справедлива следующая оценка (см. [1], [7]):

$$|P_n^{\alpha, \beta}(t)| \leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n^{1/2}} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n} \right)^{-\beta-1/2} \quad (2.8)$$

Здесь и далее через c_k , $c(\alpha, \beta, \dots, \omega)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Если $x_j = \cos \theta_j$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha, \beta}(x)$, $-1/2 \leq \alpha, \beta \leq 1/2$, занумерованные в убывающем порядке:

$$1 > x_1 > x_2 > \dots > x_N > -1,$$

$$0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_N < \pi,$$

то [1]

$$\frac{2j-1}{2N+1} \pi \leq \theta_j \leq \frac{2j}{2N+1} \pi \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (2.9)$$

Отсюда

$$\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j \geq \frac{\pi}{2N+1}, \quad (2.10)$$

$$\Delta\theta_j \leq \frac{3\pi}{2N+1}. \quad (2.11)$$

При $-1 \leq x, t \leq 1$, $x \neq t$ имеют место следующие равенства [1]:

$$\begin{aligned} K_n^{\alpha,\beta}(t, x) &= \sum_{k=0}^n \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t) \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^n \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} P_k^{\alpha,\beta}(t) P_k^{\alpha,\beta}(x) = \\ &= \frac{1}{2^{\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(n+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \times \\ &\quad \times \frac{P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)P_n^{\alpha,\beta}(x) - P_n^{\alpha,\beta}(t)P_{n+1}^{\alpha,\beta}(x)}{t-x}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

2. Оценка функции Лебега дискретных сумм Фурье–Якоби

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $n \leq N-1$, $n \geq 1$, тогда для всех $t \in [-1, 1]$

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = O(1) \left[\ln n + n^{1/2} (|P_n^{\alpha,\beta}(t)| + P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)) + 1 \right], \quad (2.13)$$

где $O(1)$ зависит от α и β .

Доказательство. Оценим величину $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $t \in [-1, 1]$. Рассмотрим случаи: 1) $t \in [0, 1]$, 2) $t \in [-1, 0]$.

1) Запишем нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ в убывающем порядке $-1 < x_N < x_{N-1} < \dots < x_1 < 1$ и сделаем замену $t = \cos \varphi$, $x_j = \cos \theta_j$. С учетом оценки (2.10) из (1.8) следует, что

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \varphi) \leq \frac{2N+1}{\pi} \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(\cos \varphi) \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(\cos \theta_j) \right| \Delta\theta_j. \quad (2.14)$$

Положим $\Delta_1 = \left[\frac{3\pi}{5}, \pi \right)$, $\Delta_2 = \left[\varphi + \frac{1}{n}, \frac{3\pi}{5} \right)$, $\Delta_3 = \left(\varphi - \frac{1}{n}, \varphi + \frac{1}{n} \right)$, $\Delta_4 = \left(0, \varphi - \frac{1}{n} \right]$.

Тогда величина $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \varphi)$ оценится по следующей схеме:

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \varphi) \leq \frac{2N+1}{\pi} \left(\sum_{\theta_j \in \Delta_1} + \sum_{\theta_j \in \Delta_2} + \sum_{\theta_j \in \Delta_3} + \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \right) = U_1 + U_2 + U_3 + U_4. \quad (2.15)$$

Если окажется, что $\varphi \leq \frac{1}{n}$, то сумма U_3 берется по промежутку $\left(0, \varphi + \frac{1}{n} \right]$, а сумму U_4 рассматривать не надо.

Преобразуем выражение (2.12). Для этого приведем без доказательства следующее

Утверждение 1. [11] При фиксированном p имеет место равенство

$$\frac{\Gamma(m+p)}{\Gamma(m)} = m^p \left[1 + O\left(\frac{1}{m}\right) \right], \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

основанное на хорошо известной формуле Стирлинга.

В силу этого утверждения $(-1/2 < \alpha, \beta < 1/2)$

$$\begin{aligned} |K_n^{\alpha, \beta}(t, x)| &= \frac{(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta}(2n+\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)} \times \\ &\times \left| \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(t)P_n^{\alpha, \beta}(x) - P_n^{\alpha, \beta}(t)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)}{t-x} \right| \leqslant \\ &\leqslant \frac{3}{5}c_1(n+1) \left| \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(t)P_n^{\alpha, \beta}(x) - P_n^{\alpha, \beta}(t)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x)}{t-x} \right|. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Учитывая (2.17), каждую из сумм U_i ($i = 1, 2, 4$) оценим так:

$$\begin{aligned} U_i &\leqslant \frac{3}{5\pi}c_1(n+1)(2N+1) \times \\ &\times \sum_{\theta_j \in \Delta_i} \mu_j \left| \frac{P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta_j) - P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \theta_j)}{\cos \varphi - \cos \theta_j} \right| \Delta \theta_j. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Преобразуем числитель в правой части формулы (2.18) с помощью равенства (2.6):

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta_j) - P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \theta_j) &= \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2n+2}\right) \times \\ &\times \left[(1 - \cos \theta_j)P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \theta_j)P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi) - (1 - \cos \varphi)P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta_j) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} U_i &\leqslant \frac{3}{5\pi}c_1(n+1) \left(1 + \frac{\alpha + \beta}{2n+2}\right) (2N+1) \times \\ &\times \left[|P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_i} \mu_j (1 - \cos \theta_j) \left| \frac{P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \theta_j)}{\cos \varphi - \cos \theta_j} \right| \Delta \theta_j + \right. \\ &\left. + (1 - \cos \varphi) |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_i} \mu_j \left| \frac{P_n^{\alpha, \beta}(\cos \theta_j)}{\cos \varphi - \cos \theta_j} \right| \Delta \theta_j \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Для определенности в лемме 2 будем считать $\delta = \frac{2\pi}{5}$. Поэтому на интервале Δ_1 будем пользоваться оценкой (2.3), а на интервалах $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ — оценкой (2.4).

При оценивании величины U_1 будем учитывать, что $(\sin \theta_j)^{2\beta+1} = (1 - \cos \theta_j)^{\beta+1/2}(1 + \cos \theta_j)^{\beta+1/2}$ и для $\theta_j \in \Delta_1$ будет $(1 - \cos \theta_j)^{-\alpha/2+\beta+1/4} \leqslant 2$,

$\cos \varphi - \cos \theta_j \geq -\cos \frac{3\pi}{5} \geq \frac{3}{10}$, $(1 + \cos \theta_j)^{\beta/2+1/4} \leq 1$. Принимая во внимание (2.4), (2.8), имеем из (2.18)

$$\begin{aligned} U_1 &\leq \frac{8}{\pi} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \frac{2N+1}{N} \times \\ &\quad \times \left[|P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + |P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| \right] \sum_{\theta_j \in \Delta_1} (1 + \cos \theta_j)^{\beta/2+1/4} \Delta \theta_j \leq \\ &\leq \frac{48}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \left[|P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + |P_{n+1}^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Оценим величину U_2 . Предварительно докажем следующее

Утверждение 2. Если $-1/2 < \alpha < 1/2$, $n \leq N-1$, то

$$\sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{\theta_j^{\alpha-1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j \leq \varphi^{\alpha-1/2} \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right), \quad (2.21)$$

$$\sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j \leq \frac{3\pi}{2} \left(\frac{4}{5(2\alpha+1)} + 1 \right) + \varphi^{\alpha+1/2} \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right). \quad (2.22)$$

Доказательство. Поскольку функции $g_1(\theta) = \frac{1}{\theta - \varphi}$ и $g_2(\theta) = (\theta - \varphi)^{\alpha-1/2}$ монотонно убывают на промежутке $(\varphi, \pi]$, то с учетом оценок (2.2), (2.11) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{\theta_j^{\alpha-1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j &\leq \varphi^{\alpha-1/2} \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{1}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j \leq \varphi^{\alpha-1/2} \left[\int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{3\pi}{5}} \frac{d\theta}{\theta - \varphi} + n \frac{3\pi}{2N} \right] \leq \\ &\leq \varphi^{\alpha-1/2} \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right), \\ \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j &\leq \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{(\theta_j - \varphi)^{\alpha+1/2} + \varphi^{\alpha+1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j = \\ &= \sum_{\theta_j \in \Delta_2} (\theta_j - \varphi)^{\alpha-1/2} \Delta \theta_j + \varphi^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{1}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j \leq \\ &\leq \int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{3\pi}{5}} (\theta - \varphi)^{\alpha-1/2} d\theta + \frac{3\pi}{2} n^{-\alpha-1/2} + \varphi^{\alpha+1/2} \left[\int_{\varphi + \frac{1}{n}}^{\frac{3\pi}{5}} \frac{d\theta}{\theta - \varphi} + \frac{3\pi}{2} \right] \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha + \frac{1}{2}} \cdot \frac{3\pi}{5} + \frac{3\pi}{2} + \varphi^{\alpha+1/2} \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right) \leq \\ &\leq \frac{3\pi}{2} \left(\frac{4}{5(2\alpha+1)} + 1 \right) + \varphi^{\alpha+1/2} \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано.

При оценке U_i ($i = 2, 3, 4$) используем равенство $(\sin \theta_j)^{2\alpha+1} = (1 - \cos \theta_j)^{\alpha+1/2}(1 + \cos \theta_j)^{\alpha+1/2}$, а при оценке U_2 учтем, что $1 - \cos \varphi \leq \varphi^2$ и для $\theta_j \in \Delta_2$ будет $(1 + \cos \theta_j)^{\alpha-\beta/2+1/4} \leq 2$, $(1 - \cos \theta_j)^{\alpha/2+3/4} \leq 2\theta_j^{\alpha+3/2}$, $(1 - \cos \theta_j)^{\alpha/2+1/4} \leq \sqrt{2}\theta_j^{\alpha+1/2}$. Заметим также, что для $\varphi \in (0, \pi/2]$, $\theta_j \in (\varphi, 3\pi/5]$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \cos \varphi - \cos \theta_j &= 2 \sin \frac{\theta_j - \varphi}{2} \sin \frac{\theta_j + \varphi}{2} \geq 2 \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\theta_j - \varphi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\theta_j + \varphi}{2} = \\ &= \frac{2}{\pi^2} (\theta_j^2 - \varphi^2) = \frac{2}{\pi^2} (\theta_j - \varphi)(\theta_j + \varphi). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Учитывая (2.3), (2.6), (2.21), (2.22), (2.23), имеем из (2.19)

$$\begin{aligned} U_2 &\leq \frac{36}{5\pi} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \left[|P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{(1 - \cos \theta_j)^{\alpha/2+3/4}}{\cos \varphi - \cos \theta_j} \Delta \theta_j + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos \varphi) |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{(1 - \cos \theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{\cos \varphi - \cos \theta_j} \Delta \theta_j \right] \leq \\ &\leq \frac{36\pi}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \times \\ &\times \left[|P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j + \frac{\varphi^2}{\sqrt{2}} |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_2} \frac{\theta_j^{\alpha-1/2}}{\theta_j - \varphi} \Delta \theta_j \right] \leq \\ &\leq \frac{36\pi}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \left[\frac{3\pi}{2} \left(\frac{4}{5(2\alpha+1)} + 1 \right) |P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + \right. \\ &\quad \left. + (\varphi^{\alpha+1/2} |P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + \frac{\varphi^{\alpha+3/2}}{\sqrt{2}} |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)|) \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.6) при $0 < \frac{1}{n} < \varphi \leq \pi/2$

$$\begin{aligned} |P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| &\leq \frac{c(\alpha, \beta)}{n^{1/2}} (1 - \cos \varphi)^{-\alpha/2-1/4} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{2}c(\alpha, \beta)}{n^{1/2}} (\sin \varphi)^{-\alpha-1/2} \leq \frac{\pi c(\alpha, \beta)}{\sqrt{2}n^{1/2}} \varphi^{-\alpha-1/2}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$|P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \leq \frac{\pi^2 c(\alpha, \beta)}{2\sqrt{2}n^{1/2}} \varphi^{-\alpha-3/2}.$$

Поэтому из (2.24) получаем оценку

$$\begin{aligned} U_2 &\leq \frac{54\pi^2}{5} \left(\frac{4}{5(2\alpha+1)} + 1 \right) c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} |P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + \\ &\quad + \frac{9\pi^2}{5} (2\sqrt{2} + \pi) c^2(\alpha, \beta) c_1 \lambda \left(\ln \frac{3\pi}{5} n + \frac{3\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оценим величину U_3 при $\varphi > \frac{1}{n}$. Из (2.14), используя (2.3) и (2.12), имеем

$$\begin{aligned} U_3 &\leq \lambda \frac{2N+1}{N\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin \theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=0}^n \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} |P_k^{\alpha,\beta}(\cos \varphi)| \cdot |P_k^{\alpha,\beta}(\cos \theta_j)| \Delta \theta_j = \\ &= \frac{3\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} (\sin \theta_j)^{2\alpha+1} \Delta \theta_j + \\ &+ \frac{3\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin \theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=1}^n \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} |P_k^{\alpha,\beta}(\cos \varphi)| \cdot |P_k^{\alpha,\beta}(\cos \theta_j)| \Delta \theta_j = U_3^{(1)} + U_3^{(2)}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Оценим сумму $U_3^{(1)}$. Учитывая, что для $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$ (см. (1.3))

$$\begin{aligned} \{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} &= \frac{\alpha + \beta + 1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)} \leq \frac{\Gamma(3)}{[\Gamma(1,462)]^2} \leq 2.56, \end{aligned}$$

получаем

$$U_3^{(1)} \leq \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin \theta_j)^{2\alpha+1} \Delta \theta_j \leq \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \Delta \theta_j \leq \frac{15.36\lambda}{\pi}. \quad (2.27)$$

Для оценки величины $U_3^{(2)}$ заметим, что в силу утверждения 1 величина $\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1}$ имеет порядок $O(k)$, так что $\{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} \leq c_2 k$. Так как для $\theta_j \in \Delta_3$ будет $(1 + \cos \theta_j)^{\alpha-\beta/2+1/4} \leq 2$, то из (2.26) с учетом (2.8) получаем

$$\begin{aligned} U_3^{(2)} &\leq \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \cos \varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (1 - \cos \theta_j)^{\alpha/2+1/4} \Delta \theta_j \leq \\ &\leq \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi} \sum_{k=1}^n (1 - \cos \varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times \\ &\times \left[\left(1 - \cos \left(\varphi - \frac{1}{n} \right) \right)^{\alpha/2+1/4} + \left(\cos \left(\varphi - \frac{1}{n} \right) - \cos \left(\varphi + \frac{1}{n} \right) \right)^{\alpha/2+1/4} \right] \frac{2}{n} \leq \\ &\leq \frac{12\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi n} \sum_{k=1}^n (1 - \cos \varphi)^{-\alpha/2-1/4} \times \\ &\times \left[\left(1 - \cos \left(\varphi - \frac{1}{n} \right) \right)^{\alpha/2+1/4} + \left(2 \sin \varphi \sin \frac{1}{n} \right)^{\alpha/2+1/4} \right] \leq \\ &\leq \frac{12\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi n} \sum_{k=1}^n \left[\left(\frac{1 - \cos \left(\varphi - \frac{1}{n} \right)}{1 - \cos \varphi} \right)^{\alpha/2+1/4} + 2(\sin \varphi)^{-\alpha/2-1/4} n^{-\alpha/2-1/4} \right] \leq \\ &\leq \frac{12(1 + \sqrt{2\pi})\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi n} \sum_{k=1}^n 1 \leq \frac{12(1 + \sqrt{2\pi})\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Объединяя (2.27), (2.28), получим

$$U_3 \leq \frac{\lambda}{\pi} \left[12(1 + \sqrt{2\pi})c_2c^2(\alpha, \beta) + 15.36 \right]. \quad (2.29)$$

Если же $\varphi \leq \frac{1}{n}$, то величина U_3 берется по промежутку $\Delta_5 = \left(0, \varphi + \frac{1}{n}\right]$. В этом случае $U_3^{(1)}$ оценится аналогично как при $\varphi > \frac{1}{n}$, а $U_3^{(2)}$ с учетом оценки $P_k^{\alpha, \beta}(\cos \varphi) \leq c(\alpha, \beta)n^\alpha$ оценится так:

$$\begin{aligned} U_3^{(2)} &\leq \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi} \left(\sum_{k=1}^n k^{\alpha+1/2} \right) \sum_{\theta_j \in \Delta_5} (1 - \cos \theta_j)^{\alpha/2+1/4} \Delta \theta_j \leq \\ &\leq \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi} n^{\alpha+3/2} \left(1 - \cos \left(\varphi + \frac{1}{n} \right) \right)^{\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta_5} \Delta \theta_j \leq \\ &\leq \frac{6\lambda c_2 c^2(\alpha, \beta)}{\pi} n^{\alpha+3/2} \left(\varphi + \frac{1}{n} \right)^{\alpha+1/2} \frac{2}{n} \leq \frac{24\lambda}{\pi} c_2 c^2(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (2.30)$$

В итоге получаем

$$U_3 \leq \frac{\lambda}{\pi} \left[12(1 + \sqrt{2\pi})c_2c^2(\alpha, \beta) + 15.36 \right]. \quad (2.31)$$

Оценим величину U_4 . Проводя те же рассуждения, что при оценке величины U_2 , получим

$$\begin{aligned} U_4 &\leq \frac{36\pi}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \times \\ &\times \left[|P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{\theta_j^{\alpha+3/2}}{\varphi(\varphi - \theta_j)} \Delta \theta_j + \frac{\varphi^2}{\sqrt{2}} |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{\theta_j^{\alpha+1/2}}{\varphi(\varphi - \theta_j)} \Delta \theta_j \right] \leq \\ &\leq \frac{36\pi}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \left[\varphi^{\alpha+1/2} |P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + \frac{\varphi^{\alpha+3/2}}{\sqrt{2}} |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \right] \sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{1}{\varphi - \theta_j} \Delta \theta_j. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Поскольку функция $g(\theta) = \frac{1}{\varphi - \theta}$ монотонно убывает на промежутке $(0, \varphi)$, то, используя оценки (2.2) и (2.11), можно записать

$$\sum_{\theta_j \in \Delta_4} \frac{1}{\varphi - \theta_j} \Delta \theta_j \leq \int_0^{\varphi - \frac{1}{n}} \frac{d\theta}{\varphi - \theta} + \frac{3\pi}{2} \leq \ln \varphi n + \frac{3\pi}{2} \leq \ln \frac{\pi}{2} n + \frac{3\pi}{2}. \quad (2.33)$$

С учетом оценки (2.33) из (2.32) получим

$$U_4 \leq \frac{36\pi}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda n^{1/2} \left[\varphi^{\alpha+1/2} |P_n^{\alpha, \beta}(\cos \varphi)| + \frac{\varphi^{\alpha+3/2}}{\sqrt{2}} |P_n^{\alpha+1, \beta}(\cos \varphi)| \right] \left(\ln \frac{\pi}{2} n + \frac{3\pi}{2} \right). \quad (2.34)$$

Так как $\varphi \leq \frac{1}{n}$, то из (2.6) имеем $|P_n^{\alpha,\beta}(\cos \varphi)| \leq \frac{\pi c(\alpha, \beta)}{\sqrt{2}n^{1/2}} \varphi^{-\alpha-1/2}$ и $|P_n^{\alpha+1,\beta}(\cos \varphi)| \leq \frac{\pi^2 c(\alpha, \beta)}{2\sqrt{2}n^{1/2}} \varphi^{-\alpha-3/2}$.

Поэтому из (2.34) получаем

$$U_4 \leq \frac{9\pi^2}{5} (2\sqrt{2} + \pi) c^2(\alpha, \beta) c_1 \lambda \left(\ln \frac{\pi}{2} n + \frac{3\pi}{2} \right). \quad (2.35)$$

Собирая оценки (2.20), (2.25), (2.31), (2.35) и сопоставляя их с (2.13), при $t \in [0, 1]$, $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $n \leq N-1$ приходим к оценке

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leq H_1(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) + [H_2(\alpha, \beta) |P_n^{\alpha,\beta}(t)| + H_3(\alpha, \beta) |P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)|] n^{1/2} + H_4(\alpha, \beta), \quad (2.36)$$

где

$$\begin{aligned} H_1(\alpha, \beta) &= \frac{9\pi^2}{5} (2\sqrt{2} + \pi) c^2(\alpha, \beta) c_1 \lambda, \\ H_2(\alpha, \beta) &= \frac{6}{5} \left(8 + 9\pi^2 \left(\frac{4}{5(2\alpha+1)} + 1 \right) \right) c(\alpha, \beta) c_1 \lambda, \\ H_3(\alpha, \beta) &= \frac{48}{5} c(\alpha, \beta) c_1 \lambda, \\ H_4(\alpha, \beta) &= \frac{\lambda}{\pi} [12(1 + \sqrt{2\pi}) c_2 c^2(\alpha, \beta) + 15.36]. \end{aligned}$$

2) Перейдем теперь к случаю $-1 \leq t \leq 0$. Покажем, что его можно свести к уже рассмотренному случаю $0 \leq t \leq 1$. Используя свойства (2.5) и (2.12), из (1.8) для произвольного $t \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} L_{n,N}^{\alpha,\beta}(-t) &= \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\alpha,\beta}\}^{-1} P_k^{\alpha,\beta}(-t) P_k^{\alpha,\beta}(x_j) \right| = \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\beta,\alpha}\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(t) P_k^{\beta,\alpha}(-x_j) \right|. \quad (2.37) \end{aligned}$$

Сделав замену переменных $t = \cos \varphi$, $x_j = \cos \theta_j$, из (2.37) получим

$$\begin{aligned} L_{n,N}^{\alpha,\beta}(-\cos \varphi) &= \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\beta,\alpha}\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(\cos \varphi) P_k^{\beta,\alpha}(\cos(\pi - \theta_j)) \right| = \\ &= \sum_{j=1}^N \mu_j \left| \sum_{k=0}^n \{h_k^{\beta,\alpha}\}^{-1} P_k^{\beta,\alpha}(\cos \varphi) P_k^{\beta,\alpha}(\cos \xi_j) \right| = \tilde{L}_{n,N}^{\beta,\alpha}(\cos \varphi). \end{aligned}$$

Так как $\xi_j = \pi - \theta_j$ имеют одинаковые свойства с θ_j , то, проводя те же рассуждения, что при оценке величины $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(\cos \varphi)$ и используя равенство

(2.5), выводим, что

$$\begin{aligned}
 \tilde{L}_{n,N}^{\beta,\alpha}(\cos \varphi) &\leq H_1(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) + \\
 &+ \left[H_2(\alpha, \beta) |P_n^{\beta,\alpha}(\cos \varphi)| + H_3(\alpha, \beta) |P_{n+1}^{\beta,\alpha}(\cos \varphi)| \right] n^{1/2} + H_4(\alpha, \beta) = \\
 &= H_1(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) + \\
 &+ \left[H_2(\alpha, \beta) |(-1)^n P_n^{\alpha,\beta}(-\cos \varphi)| + H_3(\alpha, \beta) |(-1)^{n+1} P_{n+1}^{\alpha,\beta}(-\cos \varphi)| \right] n^{1/2} + H_4(\alpha, \beta) = \\
 &= H_1(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) + \\
 &+ \left[H_2(\alpha, \beta) |P_n^{\alpha,\beta}(-\cos \varphi)| + H_3(\alpha, \beta) |P_{n+1}^{\alpha,\beta}(-\cos \varphi)| \right] n^{1/2} + H_4(\alpha, \beta).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Возвращаясь к переменной t , из (2.37) и (2.38) получаем

$$\begin{aligned}
 L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) &\leq H_1(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) + \\
 &+ \left[H_2(\alpha, \beta) |P_n^{\alpha,\beta}(t)| + H_3(\alpha, \beta) |P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)| \right] n^{1/2} + H_4(\alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

при $t \in [-1, 0]$.

В конечном итоге, из оценок (2.36) и (2.39) при $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $n \leq N-1$, $n \geq 1$ для $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned}
 L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) &\leq H_1(\alpha, \beta) \left(\ln \frac{3\pi^2}{10} n + 3\pi \right) + \\
 &+ \left[H_2(\alpha, \beta) |P_n^{\alpha,\beta}(t)| + H_3(\alpha, \beta) |P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)| \right] n^{1/2} + H_4(\alpha, \beta)
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

или

$$L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t) = O(1) \left[\ln n + n^{1/2} (|P_n^{\alpha,\beta}(t)| + |P_{n+1}^{\alpha,\beta}(t)|) + 1 \right].$$

Теорема 1 доказана.

Литература

- [1] Сегё, Г. Ортогональные многочлены / Г. Сегё. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
- [2] Джексон, Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы / Д. Джексон. М.: ИЛ, 1948. 260 с.
- [3] Натансон, И.П. Конструктивная теория функций / И.П. Натансон. М.: Гостехиздат, 1949.
- [4] Яхнин, Б.М. О функциях Лебега разложений в ряды по полиномам Якоби для случаев $\alpha = \beta = 1/2$; $\alpha = -1/2$, $\beta = 1/2$; $\alpha = 1/2$, $\beta = -1/2$ / Б.М. Яхнин // Успехи матем. наук. 1958. Т. 13. № 6. С. 207–211.

- [5] Тиман, А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного / А.Ф. Тиман. М.: Физматгиз, 1960. 624 с.
- [6] Агаханов, С.А. Функция Лебега сумм Фурье–Якоби / С.А. Агаханов, Г.И. Натансон // Вестник Ленингр. ун-та, сер. матем. 1968. Вып. 1. С. 11–23.
- [7] Бадков, В.М. Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье–Якоби / В.М. Бадков // Сиб. матем. журнал. 1968. Т. 9. № 6. С. 1263–1283.
- [8] Шарапудинов, И.И. Многочлены, ортогональные на сетках / И.И. Шарапудинов Махачкала, 1997. 254 с.
- [9] Gronwall, T. Über die Laplacesche Reiche / T. Gronwall // Math. Ann. 1913. V. 74. P. 213–270.
- [10] Rau, H. Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen / H. Rau // J. für Math. 1929. V. 161. P. 237–254.
- [11] Суетин, П.К. Классические ортогональные многочлены / П.К. Суетин. М.: Наука, 1976. 328 с.

Поступила в редакцию 18/VII/2006;
в окончательном варианте — 18/VII/2006.

ON ESTIMATION OF THE LEBESQUE FUNCTION OF THE DISCRETE FOURIER–JACOBI SUMS

© 2006 F.M. Korkmasov²

We consider the system of the classical Jacobi polynomials of degree at most N which generate an orthogonal system on the discrete set of the zeros of the Jacobi polynomial of degree N . Given an arbitrary continuous function $f(t)$ on the interval $[-1, 1]$, we construct the discrete Fourier–Jacobi sums $S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f, t)$ over the orthonormal system introduced above. We prove that the Lebesgue function $L_{n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ of the discrete Fourier–Jacobi sums for $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $n \leq N-1$, $n \geq 1$ on the interval $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) have the $O(\ln n)$ order; on the intervals $[-1, -1 + \varepsilon]$ and $[1 - \varepsilon, 1]$, accordingly, the $O(n^{\beta+1/2})$ order and the $O(n^{\alpha+1/2})$ order.

Paper received 18/VII/2006.

Paper accepted 18/VII/2006.

²Korkmasov Fuad Mueddinovich, (kfuad@mail.ru), Institute for Geothermal Research of the Dagestan Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala, 367030, Russia.