

УДК 511.334

МОДУЛЯРНЫЕ ФОРМЫ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП ПОРЯДКА 24¹

© 2006 Г.В. Воскресенская²

В настоящей работе мы рассмотрим различные точные представления всех неабелевых групп порядка 24, сопоставляющие элементам этих групп мультипликативные η -произведения. Для каждой группы мы подробно выпишем все неприводимые представления, классы сопряженных элементов и таблицы, описывающие соответствия между элементами и модулярными формами.

Введение

В этой статье изучаются такие конечные группы, что модулярные формы, ассоциированные со всеми элементами этих групп с помощью некоторого точного представления, принадлежат специальному классу модулярных форм, которые называются мультипликативными η -произведениями. Это открытая проблема: все такие группы до сих пор не найдены. Для одного и того же типа групп возможны иногда различные варианты соответствия.

В статье [11] было показано, что указанному условию удовлетворяют все группы порядка 24, если рассматривать их регулярные представления. В настоящей работе мы рассмотрим другие точные представления неабелевых групп порядка 24, сопоставляющие элементам этих групп мультипликативные η -произведения. Для каждой группы мы подробно выпишем все неприводимые представления, классы сопряженных элементов и таблицы, описывающие соответствия между элементами и модулярными формами.

Функция $\eta(z)$ определяется формулой

$$\eta(z) = q^{1/24} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n), \quad q = e^{2\pi iz},$$

z лежит в верхней комплексной полуплоскости.

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором В.Е. Воскресенским.

²Воскресенская Галина Валентиновна (vosk@ssu.samara.ru), кафедра алгебры и геометрии Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Мы рассматриваем модулярные формы, которые полностью описываются следующими условиями: это параболические формы целого веса с характеристиками, собственными относительно всех операторов Гекке, все нули которых сосредоточены в параболических вершинах с кратностью 1. Приведем их полный список.

Формы веса 1:

$$\eta(23z)\eta(z), \eta(22z)\eta(2z), \eta(21z)\eta(3z), \eta(20z)\eta(4z), \\ \eta(18z)\eta(6z), \eta(16z)\eta(8z), \eta^2(12z).$$

Формы веса 2:

$$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z), \eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z), \\ \eta^2(11z)\eta^2(z), \eta^2(10z)\eta^2(2z), \eta^2(9z)\eta^2(3z), \eta^2(8z)\eta^2(4z), \eta^4(6z).$$

Формы веса 3:

$$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z), \eta^3(7z)\eta^3(z), \eta^3(6z)\eta^3(2z), \eta^6(4z).$$

Формы веса 4:

$$\eta^4(5z)\eta^4(z), \eta^4(4z)\eta^4(2z), \eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z), \eta^8(3z).$$

Форма веса 5: $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$.

Формы веса 6: $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, $\eta^{12}(2z)$.

Форма веса 8: $\eta^8(2z)\eta^8(z)$.

Форма веса 12: $\eta^{24}(z)$.

К этому списку добавим еще 2 параболические формы полуцелого веса: $\eta(24z)$, $\eta^3(8z)$.

Эти функции мы назовем *мультипликативными η -произведениями*, так как они имеют мультипликативные коэффициенты Фурье.

Сопоставление элементам конечных групп модулярных форм осуществляется по следующему правилу. Пусть Φ — представление конечной группы G унимодулярными матрицами в пространстве V , размерность которого делится на 24. И пусть для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен оператора $\Phi(g)$ имеет вид:

$$P_g(x) = \prod_{k=1}^s (x^{a_k} - 1)^{t_k}, \quad a_k \in \mathbf{N}, \quad t_k \in \mathbf{Z}.$$

С каждым элементом $g \in G$ можно связать функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{k=1}^s \eta^{t_k}(a_k z).$$

Будем называть представление группы *искомым* или *представлением допустимого типа*, если с помощью этого представления с элементами группы ассоциируются мультипликативные η -произведения.

Допустимые группы указываются с точностью до изоморфизма.

Искомые группы могут содержать элементы порядков, не превосходящих 24 и не равных 13, 17, 19. Непосредственно проверяется, что если некоторому элементу группы соответствует мультипликативное η -произведение, то всем его степеням также соответствуют параболические формы из указанного выше списка. Используя этот факт, при исследовании групп достаточно рассматривать представления только для элементов, не лежащих в одной циклической группе. Единичному элементу группы всегда соответствует параболическая форма $\eta^{24}(z)$.

Для каждой из этих групп одним из допустимых представлений является регулярное. Элементы группы соответствуют модулярным формам из списка $\eta^2(12z)$, $\eta^3(8z)$, $\eta^4(6z)$, $\eta^6(4z)$, $\eta^8(3z)$, $\eta^{12}(2z)$, $\eta^{24}(z)$ в соответствии со своими порядками. Далее мы будем описывать другие допустимые представления. Для каждой из рассматриваемых групп мы укажем в таблице соответствие между элементами группы и мультипликативными η -произведениями.

1. Неабелевы группы порядка 24, не содержащие элементы порядка 12, и мультипликативные η -произведения

1.1. Группа S_4

Генетический код группы: $\langle a, b : a^4 = b^2 = e, (ab)^3 = e \rangle$.

Классы сопряженных элементов:

$$C_1 = (e),$$

$$C_2 = (b, a^2ba^2, aba^3, a^3ba, aba^2b, a^3ba^2b),$$

$$C_3 = (ab, a^3b, ba, ba^3, aba^2, a^2ba, a^2ba^3, a^3ba^2),$$

$$C_4 = (a, a^3, a^2b, ba^2, aba, a^3ba^3),$$

$$C_5 = (a^2, (ba^2)^2, (aba)^2).$$

Неприводимые представления:

$$T_1(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad T_1(b) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_2(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$T_3(a) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_3 \\ \zeta_3^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_4(a) = T_4(b) = -1; \quad T_5(a) = T_5(b) = 1.$$

Здесь можно рассмотреть два случая.

1 Искомое представление содержит все одномерные представления с кратностью 4, остальные представления — с кратностью 2. Элементы группы третьего порядка соответствуют модулярной форме $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, элементы группы четвертого порядка соответствуют модулярной форме $\eta^4(4z)\eta^4(2z)$, элементы из класса C_5 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, элементы из класса C_2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

2. Представление

$$T = T_1 \oplus 3T_2 \oplus 4T_3 \oplus T_4 \oplus 3T_5$$

также является допустимым.

Элементы группы третьего порядка соответствуют модулярной форме $\eta^8(3z)$, элементы группы четвертого порядка соответствуют модулярной форме $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, элементы из класса C_5 соответствуют $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, элементы из класса C_2 соответствуют $\eta^{12}(2z)$.

1.2. Группа $G \cong \langle a, b : a^6 = b^4 = e, b^{-1}ab = a^5 \rangle$

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^5	a^2, a^4	a^3	b, a^2b, a^4b	b^2	b^3, a^2b^3, a^4b^3	ab, a^3b, a^5b	ab^2, a^5b^2

C_{10}	C_{11}	C_{12}
ab^3, a^3b^3, a^5b^3	a^2b^2, a^4b^2	a^3b^2

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
a	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
b	i	-i	1	-1	i	-i	1	-1

Неприводимые двумерные представления:

$$T_9(a) = T_{10}(a) = \begin{pmatrix} \xi_6 & 0 \\ 0 & \xi_6^5 \end{pmatrix}; \quad T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3^2 \end{pmatrix}.$$

$$T_9(b) = T_{11}(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad T_{10}(b) = T_{12}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Допустимым представлением является прямая сумма

$$T = T_1 \oplus T_2 \oplus T_7 \oplus T_9 \oplus T_{10} \oplus T_{12} \oplus 2(T_3 \oplus T_4 \oplus T_5 \oplus T_6 \oplus T_8 \oplus T_{11}).$$

Элементы	Модулярные формы
a, a^5, a^2b^2, a^4b^2	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
ab^2, a^5b^2	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5bb^3, ab^3, a^2b^3, a^3b^3, a^4b^3, a^5b^3$	$\eta^6(4z)$
a, a^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^3b^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
b^2, a^3	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

2) Представление

$$T = T_5 \oplus T_6 \oplus T_7 \oplus T_8 \oplus T_9 \oplus T_{10} \oplus 2(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4 \oplus T_{11} \oplus T_{12}).$$

является допустимым.

Элементы	Модулярные формы
a, a^5	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$ab^2, a^5b^2, a^2b^2, a^4b^2$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
$b, ab, a^2b, a^3b, a^4b, a^5b, b^3, ab^3, a^2b^3, a^3b^3, a^4b^3, a^5b^3$	$\eta^6(4z)$
a, a^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^3	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
b^2, a^3b^2	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

1.3. Группа $D_6 \times Z_2$

Генетический код группы:

$$\langle a, b : a^6 = b^2 = e, b^{-1}ab = a^5, ac = ca, bc = cb \rangle.$$

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^5	a^2, a^4	a^3	b, a^2b, a^4b	ab, a^3b, a^5b	c	ac, a^5c	a^2c, a^4c

C_{10}	C_{11}	C_{12}
a^3c	bc, a^2bc, a^4bc	abc, a^3bc, a^5bc

У группы 8 одномерных представлений: значения 1 и -1 чередуются на элементах a, b, c .

Неприводимые двумерные представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^5 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad k = 5, 6, 7, 8;$$

$$T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \overline{1, 8}, \quad T_k(c) = E, \quad k = 1, 2, 5, 6; \quad T_k(c) = -E, \quad k = 3, 4, 7, 8.$$

Искомый представлением является прямая сумма, в которую не входят представления T_2 , T_4 , одномерные представления, переводящие элемент b в 1, входят с кратностью 2, остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Элементы	Модулярные формы
a, a^5	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
ac, a^2c, a^4c, a^5c	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
a, a^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^3	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$a^k b c^l, \quad k = \overline{0, 5}, \quad l = 0, 1; \quad a^3 c, c$	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

1.4. Группа $\langle a, b : a^4 = b^6 = (ab)^2 = (a^{-1}b)^2 = e \rangle$

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
e	$a, a^3, b^4 a^3, b^2 a, b^4 a, b^2 a^3$	$b, b^5 a^2$	b^2, b^4	$b^5, b a^2$

C_6	C_7	C_8	C_9
$b^3, b^3 a^2$	$ba, b^5 a^3, b^3 a, b a^3, b^5 a, b^3 a, b^3 a^3$	a^2	$b^2 a^2, b^4 a^2$

Неприводимые двумерные представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2; \quad T_k(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 3, 4;$$

$$T_5(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}.$$

$$T_1(b) = \begin{pmatrix} \zeta_6^2 & 0 \\ 0 & \zeta_6 \end{pmatrix}, \quad T_2(b) = \begin{pmatrix} \zeta_6^5 & 0 \\ 0 & \zeta_6^2 \end{pmatrix}, \quad T_3(b) = \begin{pmatrix} \zeta_6 & 0 \\ 0 & \zeta_6^5 \end{pmatrix},$$

$$T_4(b) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}, \quad T_5(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

У этой группы 4 одномерных представления: значения 1 и -1 чередуются на элементах a и b .

Искомым представлением является прямая сумма, в которую представления T_1 , T_2 входят с кратностью 1, остальные неприводимые представления входят с кратностью 2.

Элементы	Модулярные формы
$b.b^5, b^5a^2, b^3a^2$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
b^2a^2, b^4a^2	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$a, a^3, b^4a^3, b^2a, b^4a, b^2a^3$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
b^2, b^4	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$b^3, b^3a^2, ba, b^5a^3, b^3a, ba^3, b^5a, b^3a^3$	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

1.5. Бинарная группа тетраэдра

Генетический код группы: $\langle a, b : a^6 = b^6 = (ab)^4 = e, a^3 = b^3 = (ab)^2 \rangle$

В группе 7 классов сопряженных элементов: их представители — это степени элемента a и элемент ab .

Искомое представление — это прямая сумма, в которую не входит двумерное неприводимое представление, для которого собственные значения оператора $T(a)$ равны ζ_6 , ζ_6^5 , единичное представление входит с кратностью 5, два других одномерных представления входят с кратностью 1, трехмерное — с кратностью 3, остальные двумерные представления входят с кратностью 2.

В этом случае элементы, сопряженные a , a^5 , соответствует модулярной форме $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$, элементы, сопряженные a^2 , a^4 , соответствует модулярной форме $\eta^6(3z)\eta^6(z)$, элемент a^3 соответствует модулярной форме $\eta^8(2z)\eta^8(z)$, элементы, сопряженные ab , соответствует модулярной форме $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$.

1.6. Группа $A_4 \times Z_2$

Генетический код группы:

$G \cong \langle a, b : a^3 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = e, ac = ca, bc = cb \rangle$.

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4
e	a, a^2ba^2, ab, ba	a^2, aba, a^2b, ba^2	b, a^2ba, aba^2

C_5	C_6	C_7	C_8
c	ac, a^2ba^2c, abc, bac	$a^2c, abac, a^2bc, ba^2c$	bc, a^2bac, aba^2c

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
a	1	ζ_3	ζ_3^2	1	ζ_3	ζ_3^2
b	1	1	1	1	1	1
c	1	1	1	-1	-1	-1

$$T_7(a) = T_8(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_7(b) = T_8(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$T_7(c) = E, \quad T_8(c) = -E.$$

Искомым представлением является прямая сумма, содержащая все неприводимые представления с кратностью 2.

Элементы	Модулярные формы
$ac, a^2ba^2c, abc, bac, a^2c, abac, a^2bc, ba^2c$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
$a, a^2ba^2, ab, ba, a^2, aba, a^2b, ba^2$	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
b, a^2ba, aba^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
c, bc, a^2bac, aba^2c	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

2. Неабелевы группы порядка 24, содержащие элементы порядка 12, и мультипликативные η -произведения

2.1. Группа $D_4 \times Z_3$

Генетический код группы:

$$\langle a, b, c : a^4 = b^2 = c^3 = e, b^{-1}ab = a^3, ca = ac, cb = bc \rangle.$$

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}
e	a, a^3	a^2	ab, a^3b	b, a^2b	c	ac, a^3c	a^2c	abc, a^3bc	bc, a^2bc

C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
abc^2, a^3bc^2	c^2	ac^2, a^3c^2	a^2c^2	bc^2, a^2bc^2

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
a	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
b	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
c	1	1	1	1	ζ_3	ζ_3	ζ_3	ζ_3	ζ_3^2	ζ_3^2	ζ_3^2	ζ_3^2

Двумерные неприводимые представления:

$$T_{13}(a) = T_{14}(a) = T_{15}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}, \quad T_{13}(b) = T_{14}(b) = T_{15}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{13}(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{14}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3 \end{pmatrix}, \quad T_{15}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_3^2 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую все неприводимые представления, переводящие элемент c в 1 или в единичную матрицу, входят с кратностью 2, а остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

элементы	модулярные формы
ac, a^3c^2, ac^2, a^3c^2	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
a^2c^2, a^2c	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$bc, bc^2, abc, abc^2, a^2bc, a^2bc^2, a^3bc, a^3bc^2$	$\eta^3(6z)\eta^3(6z)$
a, a^3	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
c, c^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
b, ab, a^2b, a^3b	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

2.2. Группа $S_3 \times Z_4$

Генетический код группы:

$$\langle a, b, c : a^3 = b^2 = c^4 = e, b^{-1}ab = a^2, ca = ac, cb = bc \rangle.$$

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^2	b, ab, a^2b	c	ac, a^2c	bc, abc, a^2bc	c^2	ac^2, a^2c^2	bc^2, abc^2, a^2bc^2

C_{10}	C_{11}	C_{12}
c^3	ac^3, a^2c^3	bc^3, abc^3, a^2bc^3

Одномерные представления:

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8
a	1	1	1	1	1	1	1	1
b	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
c	1	1	-1	-1	ζ_4	ζ_4	ζ_4^2	ζ_4^2

Двумерные неприводимые представления:

$$T_9(a) = T_{10}(a) = T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix};$$

$$T_9(b) = T_{10}(b) = T_{11}(b) = T_{12}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_9(c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{10}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4 \end{pmatrix},$$

$$T_{11}(c) = \begin{pmatrix} \zeta_4^3 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}, \quad T_{12}(c) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую все неприводимые представления, переводящие элемент c в 1, -1 или в единичную матрицу, входят с кратностью 2, а остальные неприводимые представления входят с кратностью 1.

Элементы	Модулярные формы
$ac, a^2c, ac^3, a^2c^3,$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
ac^2, a^2c^2	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$c, c^3, bc^k, abc^k, a^2bc^k, k = 1, 3$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
a, a^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
b, ab, a^2b, c^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
bc^2, abc^2, a^2bc^2	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

2.3. Группа $G \cong \langle a, b : a^3 = b^8 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^2	b, ab, a^2b	b^2	b^4	b^6	b^3, ab^3, a^2b^3	b^5, ab^5, a^2b^5	b^7, ab^7, a^2b^7

C_{10}	C_{11}	C_{12}
ab^2, a^2b^2	ab^4, a^2b^4	ab^6, a^2b^6

Неприводимые представления:

$$T_k(a) = 1, \quad T_k(b) = \zeta_8^k, \quad k = \overline{1, 8};$$

$$T_9(a) = T_{10}(a) = T_{11}(a) = T_{12}(a) = \begin{pmatrix} \zeta_3 & 0 \\ 0 & \zeta_3^2 \end{pmatrix};$$

$$T_9(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_{10}(b) = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix};$$

$$T_{11}(b) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_8 \\ \zeta_8 & 0 \end{pmatrix}; \quad T_{12}(b) = \begin{pmatrix} 0 & \zeta_8^3 \\ \zeta_8^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую точные двумерные представления и одномерные представления, переводящие элемент b в первообразные корни степени 8 из 1, входят с кратностью 1, а остальные неприводимые представления входят с кратностью 2.

Элементы	Модулярные формы
$ab^2, a^2b^2, ab^6, a^2b^6$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
$b, ab, a^2b, b^3, ab^3, a^2b^3, b^5, ab^5, a^2b^5, b^7, ab^7, a^2b^7,$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$
ab^4, a^2b^4	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
b^2, b^6	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
a, a^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
b^4	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
e	$\eta^{24}(z)$

2.4. Группа $Q_8 \times Z_3$

Генетический код группы: $\langle a, b, c : a^4 = b^4 = c^3 = e, b^{-1}ab = a^3, b^2 = a^2, ac = ca, bc = cb \rangle$.

Классы сопряженных элементов:

C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9
e	a, a^3	a^2	b, a^2b	ab, a^3b	c	ac, a^3c	a^2c	bc, a^2bc

C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
abc, a^3bc	c^2	ac^2, a^3c^2	a^2c^2	bc^2, a^2bc^2	abc^2, a^3bc^2

У группы 12 одномерных представлений: числа 1 и -1 чередуются на

элементах a и b ; значения одномерных представлений на элементе c равны $1, \zeta_3, \zeta_3^2$.

Неприводимые двумерные представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_4 & 0 \\ 0 & \zeta_4^3 \end{pmatrix}; \quad T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad k = 1, 2, 3,$$

$$T_1(c) = E, \quad T_2(c) = \zeta_3 E, \quad T_3(c) = \zeta_3^2 E.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую T_1 и одномерные представления, переводящие элемент c в 1 , входят с кратностью 2 , а остальные неприводимые представления входят с кратностью 1 .

Элементы	Модулярные формы
$ac^k, a^3c^k, k = 1, 2$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
a^2, a^2c, a^2c^2	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$a^kbc^l, k = \overline{0, 3}, l = 1, 2$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
a, a^3	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
c, c^2	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^2	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
b, ab, a^2b, a^3b	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

2.5. Диэдральная группа D_{12}

Генетический код группы: $\langle a, b : a^{12} = b^2 = e, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$.

В группе 9 классов сопряженных элементов. Их представители: степени элемента a , элементы b, ab . У этой группы 4 неприводимых одномерных представления (1 и -1 чередуются на элементах a и b) Двумерные неприводимые представления:

$$T_k(a) = \begin{pmatrix} \zeta_{12}^k & 0 \\ 0 & \zeta_{12}^{-k} \end{pmatrix}; \quad T_k(b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Допустимым представлением является прямая сумма, в которую все точные представления входят с кратностью 1 , остальные представления — с кратностью 2 .

Элементы	Модулярные формы
a, a^5, a^7, a^{11}	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
a^2, a^{10}	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
a^3, a^9	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
a^4, a^8	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
a^6	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$a^k b, k = \overline{0, 11}$	$\eta^{12}(2z)$
e	$\eta^{24}(z)$

Литература

- [1] Dummit, D. Multiplicative products of η -functions / D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay // Contemp. Math. – 1985. – V. 45. – P. 89–98.
- [2] Mason, G. Finite groups and Hecke operators / G. Mason // Math. Ann. – 1989. – V. 282. – P. 381–409.
- [3] Mason, G. M_{24} and certain automorphic forms / G. Mason // Contemp. Math. – 1985. – V. 45. – P. 223–244.
- [4] Koike, M. On McKay's conjecture / M. Koike // Nagoya Math. J. – 1984. – V. 95. – P. 85–89.
- [5] Kondo, T. Examples of multiplicative η -products / T. Kondo // Sci. Pap. Coll. Arts and Sci. Univ. Tokyo. – 1986. – V. 35. – P. 133–149.
- [6] Martin, Y. Eta-quotients and elliptic curves / Y. Martin, K. Ono // Proc. Amer. Math. Soc. – 1997. – V. 125. – No. 11. – P. 3169–3176.
- [7] Gordon, B. Multiplicative properties of η -products / B. Gordon, S. Sinor // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. – 1989. – V. 1395. – P. 173–200.
- [8] Ono, K. The web of modularity: arithmetic of the coefficients of modular forms and q -series / K. Ono. – 2004. – 216 p.
- [9] Воскресенская, Г.В. Метациклические группы и модулярные формы / Г.В. Воскресенская // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – №2. – С. 18–25.
- [10] Voskresenskaya, G.V. One special class of modular forms and group representations / G.V. Voskresenskaya // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. – 1999. – V. 11. – P. 247–262.
- [11] Воскресенская, Г.В. Модулярные формы и регулярные представления групп порядка 24 / Г.В. Воскресенская // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – №2. – С. 292–294.
- [12] Voskresenskaya, G.V. Multiplicative Dedekind η -function and representations of finite groups / G.V. Voskresenskaya // Journal de Theorie des Nombres de Bordeaux. – 2005. – V. 17. – P. 359–380.

Поступила в редакцию 22/V/2006;
в окончательном варианте — 22/V/2006.

**MODULAR FORMS WITH MULTIPLICATIVE
COEFFICIENTS AND REPRESENTATIONS OF GROUPS
OF THE ORDER 24³**

© 2006 G.V. Voskresenskaya⁴

In the paper various exact representations of all nonabelian groups of the order 24 which associate with the elements of these groups multiplicative η -products are considered. For each group we write in detail all irreducible representations, classes of conjugate elements and tables by which the connections between elements and modular forms are presented.

Paper received 22/V/2006.

Paper accepted 22/V/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. V.E. Voskresenskii.

⁴Voskresenskaya Galina Valentinovna (vosk@ssu.samara.ru), Dept. of Algebra and Geometry, Samara State University, Samara, 443011, Russia.