

УДК 511

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМОЙ

© 2006 Т.Ю. Андреева¹

В работе приведена асимптотическая формула для числа представлений натуральных чисел положительно определенной квадратичной формой от четырех переменных специального вида, причём коэффициенты квадратичной формы могут расти, и остаточный член лучше, чем в формуле Клоостермана.

1. Предварительные сведения

В работе [1] Клоостерман привел асимптотическую формулу для числа представлений $\alpha(n)$ положительного целого n в виде $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ с целыми x, y, z, t в предположении, что a, b, c, d — заданные натуральные числа. Он показал, что

$$\alpha(n) = \frac{\pi^2 n}{\sqrt{abcd}} S(n) + O\left(n^{\frac{17}{18} + \epsilon}\right),$$

для любого положительного ϵ , где

$$S(n) = \sum_{q=1}^{\infty} A_q, \quad A_q = q^{-4} \sum_p' S_{ap,q} S_{bp,q} S_{cp,q} S_{dp,q} e^{\frac{-2n\pi p}{q}},$$

$A_1 = 1$, $S_{ap,q}$, $S_{bp,q}$, $S_{cp,q}$, $S_{dp,q}$ — гауссовы суммы и $\sum_p'$ обозначает сумму, в которой p пробегает все положительные целые, меньшие q и взаимно простые с ним.

Т. Эстерманн в [2] рассмотрел уравнение

$$a_1 h_1^2 + a_2 h_2^2 + a_3 h_3^2 + a_4 h_4^2 = k$$

в целых положительных h_1, h_2, h_3, h_4 , $|a_m h_m^2| \leq n$ ($m = 1, 2, 3, 4$).

Для целых чисел a_1, a_2, a_3, a_4 выполняется одно из следующих условий:

¹Андреева Татьяна Юрьевна (t_an@rambler.ru), кафедра теории чисел Московского педагогического государственного университета, 107140, Россия, г. Москва, ул. Краснопрудная, 14.

- (i) Два из них положительны и два отрицательны;
- (ii) $a_1 a_2 a_3 a_4 < 0$.

Для числа решений $v(n)$ он получил асимптотическую формулу круговым методом Харди-Литтлвуда:

$$\left| v(n) - K |a_1 a_2 a_3 a_4|^{-\frac{1}{2}} Dn \right| \leq C_2 n^{\frac{3}{4} + \epsilon},$$

где $C_2 > 0$ и постоянная в "«" зависит от $a_1, a_2, a_3, a_4, k, \epsilon$.

$$D = \sum_{q=1}^{\infty} B(q), \quad B(q) = q^{-4} \sum_{\substack{r \leq q \\ (r,q)=1}} \left\{ \prod_{m=1}^4 S(q, a_m r) \right\} e^{-2\pi i \frac{kr}{q}},$$

$$S(q, a_m r) = \sum_{j=1}^q e^{2\pi i \frac{a_m r j^2}{q}}, \quad K = \int_{-\infty}^{+\infty} \{J(u)\}^2 \{J(-u)\}^2 du \quad \text{в случае (i),}$$

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \{J(u)\}^3 J(-u) du \quad \text{в случае (ii),} \quad J(u) = \int_0^1 e^{2\pi i x^2 u}.$$

В [3, 4] Дж. Чок рассматривал уравнение $p(x_1^2 + x_2^2) - q(x_3^2 + x_4^2) = a$ в целых x_1, x_2, x_3, x_4 , которое является частным случаем уравнения, рассмотренного Эстерманном в [2], и расширил уже имеющиеся результаты с помощью метода К. Хооли.

Предполагая, что $p(x_1^2 + x_2^2) \leq h^2$, $(p, q) = 1$, $p > 0$, $q > 0$, q — нечетное, $(2pq, a) = 1$ и $0 \neq |a| = o(h^2)$, когда $h \rightarrow \infty$ и при $\frac{h^2}{p} \gg (pq)^3$, когда $pq \rightarrow \infty$, для числа решений S , с условием $(x_3^2 + x_4^2, a) = 1$, была получена оценка:

$$S - \frac{\pi}{8} \frac{h^2}{pq} W(p, q, a) \ll_{\delta} \left[h^{\frac{11}{6}} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}} \right]^{1+\delta} |a|^{\delta},$$

где

$$W(p, q, a) = \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) H_q(1) L_{2pa}(1) \zeta_{2pqa}(2)^{-1}, \quad L_A(1) = \sum_{\substack{1 \leq n < \infty \\ (n, A)=1}} \frac{\chi(n)}{n},$$

$$\zeta_A(2)^{-1} = \sum_{\substack{1 \leq n \leq \infty \\ (n, 2A)=1}} \frac{1}{n^2}, \quad H_A(1) = \sum_{d|A} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d},$$

где $\chi(n)$ — неглавный характер по модулю 4.

В [5] Г.С. Белозеров также рассматривал уравнение $a(x_1^2 + x_2^2) - b(x_3^2 + x_4^2) = k$ в целых x_1, x_2, x_3, x_4 , при условии $x_1^2 + x_2^2 \leq N$, при $N \rightarrow \infty$. Считая, что a, b, k — заданные натуральные, b, k — нечетные, $k = o(aN)$ и $(a, b) = (b, k) = (a, k) = 1$, $a > b$, была получена асимптотическая формула для числа решений $A(a, b, k; N)$:

$$A(a, b, k; N) = E_3(a, b, k) \left(N - \frac{k}{a} \right) + O_\epsilon \left(N^{\frac{5}{6} + \epsilon} \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{2}} \right),$$

где

$$\begin{cases} E_2(a, b, k), & \text{если } a \not\equiv 0 \pmod{4}; \\ 2E_2(a, b, k), & \text{если } a \equiv 0 \pmod{4}, k \equiv -b \pmod{4}; \\ 0, & \text{если } a \equiv 0 \pmod{4}, k \equiv b \pmod{4}, \end{cases}$$

и

$$E_2(a, b, k) = \frac{4\pi}{b} \frac{L(1, \chi_4)}{L(2, \chi_{04})} g(0, \chi_4),$$

$$g(0, \chi_4) = \prod_{p|abk} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p} \right) \left(1 - \frac{\chi_{04}(p)}{p^2} \right)^{-1} \prod_{p \nmid k} \left(1 + \frac{\chi_4(p) \rho(a, k, p)}{p^2} + \frac{\chi_4(p) \rho(a, k, p^2)}{p^4} + \dots \right),$$

где $\rho(a, l, D)$ означает количество решений сравнения $a(x^2 + y^2) \equiv l \pmod{D}$. χ_4 — неглавный характер по модулю 4, χ_{04} — главный характер по модулю 4. В настоящей работе метод Дж. Чока переносится на уравнение $4p(x_1^2 + x_2^2) + q(x_3^2 + x_4^2) = a$.

Обозначения. Пусть $\chi(n)$ — неглавный характер по модулю 4, b, m, c, A — натуральные. Тогда положим:

$$L_A(1) = \sum_{\substack{1 \leq n < \infty \\ (n, A) = 1}} \frac{\chi(n)}{n},$$

$$\zeta_A(2)^{-1} = \sum_{\substack{1 \leq n < \infty \\ (n, 2A) = 1}} \frac{1}{n^2},$$

$$H_A(1) = \sum_{d|A} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d},$$

$$M(b, m) = \frac{\phi(b)}{b} H_b(1) H_m(1).$$

$$W(c, m, b) = \frac{\phi(b)}{b} H_m(1) H_b(1) L_{2c}(1) \zeta_{cm}^{-1}(2).$$

2. Основные результаты

Теорема 1. Пусть a — натуральное, $p > 0$, $q > 0$ — целые, $(2p, q) = 1$, $(2pq, a) = 1$, $p^4 q^3 \ll a$, $a \equiv q \pmod{4}$. Если S — число решений уравнения

$$4p(x_1^2 + x_2^2) + q(x_3^2 + x_4^2) = a \quad (2.1)$$

в целых $x_1, x_2, x_3 > 0$ и $x_4 \geq 0$, то для любого положительного ϵ справедлива формула:

$$S - \frac{\pi}{8} \frac{a}{pq} W(p, q, a) \ll_{\epsilon} a^{\frac{11}{12} + \epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}.$$

Число решений уравнения (2.1) задается формулой:

$$S = \frac{1}{4} \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\mu = a \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) < a \\ \mu < \frac{a}{q}}} r(\mu) = \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) < a \\ \rho\sigma < \frac{a}{q}}} \chi(\rho),$$

где $r(n) = 4 \sum_{d|n} \chi(d)$ (см., например [6, с. 343]).

Разобьем сумму S на 3 суммы: $S = S_1 + S_2 - S_3$, где

$$S_1 = \sum_{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}} \chi(\rho), \quad S_2 = \sum_{\sigma < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}} \chi(\rho), \quad S_3 = \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \sigma < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}}} \chi(\rho),$$

так как $a \equiv q \pmod{4}$, то $\chi(\rho) = \chi(\sigma)$. Таким образом, имеем

$$S_2 = \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) < a, \sigma < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}}} \chi(\rho) = \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) < a, \sigma < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}}} \chi(\sigma).$$

Т.е. справедливо равенство $S_1 = S_2$.

Рассмотрим далее сумму S_3 . Так как $\sigma < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$ тогда и только тогда, когда $a - \rho(aq)^{\frac{1}{2}} < 4p(x_1^2 + x_2^2) < a$, имеем:

$$S_3 = \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) < a, \\ \rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \sigma < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}}} \chi(\rho) = \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a, \\ \rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ a - \rho(aq)^{\frac{1}{2}} < 4p(x_1^2 + x_2^2) < a}} \chi(\rho).$$

Представим S_3 как разность двух сумм:

$$S_3 = \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a, \\ \rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) < a}} \chi(\rho) - \sum_{\substack{4p(x_1^2 + x_2^2) + q\rho\sigma = a, \\ \rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \\ 4p(x_1^2 + x_2^2) \leq a - \rho(aq)^{\frac{1}{2}}}} \chi(\rho) = S'_3 - S''_3.$$

Видно, что $S_1 = S'_3$. Так как $S = S_1 + S_2 - S_3$ и $S_1 = S_2 = S'_3$, то $S = S_1 + S_2 - S'_3 + S''_3 = S_1 + S''_3$. Таким образом, находим $S = S_1 + S''_3$.

Приведем вспомогательные леммы, которые понадобятся для оценки сумм S_1 , S_2 , S''_3 .

Лемма 1. Если $m \ll X^{\frac{2}{3}}$ и $r(n)$ — число представлений n в виде суммы двух квадратов целых чисел, то для любого $\delta > 0$ справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{n \leq X \\ n \equiv b \pmod{m}}} r(n) - \frac{\pi X}{4m} M(b, m) \ll_{\delta} X^{\frac{2}{3}+\delta} m^{-\frac{1}{2}}(b, m)^{\frac{1}{2}} \tau(m).$$

Доказательство см. в [7, теорема 9].

Лемма 2. Пусть $\chi(\rho)$ — неглавный характер по модулю 4 и A — нечетное. Тогда справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} - L_{2A}(1) \ll N^{-1} \tau(A).$$

Доказательство.

Имеем следующие соотношения

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} = \sum_{\substack{\rho \geq 1 \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} - \sum_{\substack{\rho > N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} = L_{2A}(1) - \sum_{\substack{\rho > N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho}.$$

Оценим сумму ряда $\sum_{\substack{\rho > N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho}$:

$$\sum_{\substack{\rho > N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} = \sum_{\rho > N} \frac{\chi(\rho)}{\rho} \sum_{\substack{d|\rho \\ d|2A}} \mu(d) = \sum_{d|2A} \frac{\mu(d)\chi(d)}{d} \sum_{t > \frac{N}{d}} \frac{\chi(t)}{t}. \quad (2.2)$$

Для оценки $\sum_{t > \frac{N}{d}} \frac{\chi(t)}{t}$ применим преобразование Абеля:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{t=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^K \frac{\chi(t)}{t} \right| &\leq \left| \sum_{t=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^K \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) \sum_{l=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^t \chi(l) \right| + \left| \frac{1}{K+1} \sum_{l=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^K \chi(l) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{t=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^K \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) \right| \left| \sum_{l=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^t \chi(l) \right| + \left| \frac{1}{K+1} \right| \left| \sum_{l=\lceil \frac{N}{d} \rceil+1}^K \chi(l) \right|. \end{aligned}$$

Так как $\left| \sum_{l=M}^N \chi(l) \right| \leq \frac{1}{2} \phi(4) = 1$, то, переходя к пределу при $K \rightarrow \infty$, получаем

$$\left| \sum_{t > \frac{N}{d}} \frac{\chi(t)}{t} \right| \leq \frac{d}{N}.$$

Подставляя полученную оценку в (2.2), находим, что

$$\sum_{\substack{\rho > N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} = O\left(N^{-1} \sum_{d|2A} 1\right) = O(N^{-1} \tau(A)).$$

Отсюда следует требуемая оценка:

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} = L_{2A}(1) + O(N^{-1}\tau(A)).$$

Лемма 3. При нечетном $A > 0$ справедлива оценка:

$$\sum_{\substack{t < N \\ (t, 2A)=1}} \frac{\mu(t)}{t^2} = \zeta_A^{-1}(2) + O(N^{-1}),$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{t < N \\ (t, 2A)=1}} \frac{\mu(t)}{t^2} &= \sum_{(t, 2A)=1} \frac{\mu(t)}{t^2} - \sum_{\substack{t > N \\ (t, 2A)=1}} \frac{\mu(t)}{t^2} = \zeta_A^{-1}(2) + O\left(\sum_{\substack{t > N \\ (t, 2A)=1}} \frac{1}{t^2}\right) = \\ &= \zeta_A^{-1}(2) + O(N^{-1}). \end{aligned}$$

Лемма 4. При нечетном $A > 0$ справедливы оценки:

- (i) $\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) H_{q\rho}(1) \ll H_q(1)\tau(A) \log N, N \rightarrow \infty;$
- (ii) $\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{q\rho}(1) = H_q(1)L_{2A}(1)\zeta_A^{-1}(2) + O(N^{-1}H_q(1)\tau(A) \log N).$

Доказательство.

- (i) Рассмотрим сумму $H_{q\rho}(1)$:

$$\begin{aligned} H_{q\rho}(1) &= \sum_{d|q\rho} \frac{\chi(d)\mu(d)}{d} = \prod_{p|q\rho} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = \\ &= \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \cdot \prod_{\substack{p|\rho \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = H_q(1) \sum_{\substack{d|\rho \\ (d, q)=1}} \frac{\chi(d)\mu(d)}{d}. \end{aligned}$$

Подставив полученное равенство в левую часть (i), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) H_{q\rho}(1) &= H_q(1) \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) \sum_{d|\rho} \frac{\chi(d)\mu(d)}{d} = \\ &= H_q(1) \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{d|\rho \\ (d, q)=1}} \frac{\chi(d)\mu(d)}{d} = \\ &= H_q(1) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, q)=1}} \frac{\chi(d)\mu(d)}{d} \sum_{\substack{\rho \leq N \\ \rho \equiv 0 \pmod{d} \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) = \\ &= H_q(1) \sum_{\substack{(d, 2Aq)=1 \\ d \leq N}} \frac{\mu(d)\chi^2(d)}{d} \sum_{\substack{\rho_1 \leq \frac{N}{d} \\ (\rho_1, 2A)=1}} \chi(\rho_1) = \end{aligned}$$

$$= H_q(1) \sum_{\substack{(d,2Aq)=1 \\ d \leq N}} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{\substack{\rho_1 \leq \frac{N}{d} \\ (\rho_1, 2A)=1}} \chi(\rho_1).$$

Преобразуем отдельно внутреннюю сумму:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho_1 \leq \frac{N}{d} \\ (\rho_1, 2A)=1}} \chi(\rho_1) &= \sum_{\rho_1 \leq \frac{N}{d}} \chi(\rho_1) \sum_{\substack{\rho_1 \equiv 0 \pmod{\sigma} \\ \sigma | 2A}} \mu(\sigma) = \\ &= \sum_{\rho_2 \sigma \leq \frac{N}{d}} \chi(\rho_2) \chi(\sigma) \sum_{\substack{\rho_2 \sigma \equiv 0 \pmod{\sigma} \\ \sigma | 2A}} \mu(\sigma) = \\ &= \sum_{\sigma | 2A} \chi(\sigma) \mu(\sigma) \sum_{\rho_2 \leq \frac{N}{d\sigma}} \chi(\rho_2). \end{aligned}$$

Так как $|\sum_{\rho_2 \leq \frac{N}{d\sigma}} \chi(\rho_2)| \ll 1$, то

$$\left| \sum_{\substack{\rho_1 \leq \frac{N}{d} \\ (\rho_1, 2A)=1}} \chi(\rho_1) \right| \ll \sum_{\sigma | 2A} 1 \ll \tau(A).$$

Учитывая полученную оценку, найдем:

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) H_{q\rho}(1) \ll H_q(1) \tau(A) \sum_{d \leq N} \frac{1}{d}.$$

Следовательно, имеем

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \chi(\rho) H_{q\rho}(1) \ll H_q(1) \tau(A) \log N \quad (N \rightarrow \infty).$$

(ii). Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} \prod_{p|q\rho} \left(1 - \frac{\chi(\rho)}{\rho}\right) &= \\ &= \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) \prod_{\substack{p|\rho \\ p \nmid q}} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = \\ &= H_q(1) \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} \sum_{\substack{d|\rho \\ (d, q)=1}} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d}. \end{aligned}$$

Поменяв местами порядки суммирования, получим

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{q\rho}(1) = H_q(1) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{\chi(d) \mu(d)}{d} \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1 \\ \rho \equiv 0(d)}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} =$$

$$= H_q(1) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} \sum_{\substack{\rho_1 \leq \frac{N}{d} \\ (\rho_1, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho_1)}{\rho_1}.$$

Применим для внутренней суммы оценку из леммы 3:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{q\rho}(1) &= H_q(1) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} (L_A(1) + O(dN^{-1}\tau(A))) = \\ &= H_q(1)L_A(1) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(H_q(1)N^{-1}\tau(A) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{1}{d}\right). \end{aligned}$$

Так как $\sum_{d \leq N} \frac{1}{d} \ll \log N$, то

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{q\rho}(1) = H_q(1)L_A(1) \sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2} + O(H_q(1)N^{-1}\tau(A) \log N).$$

Применим для суммы $\sum_{\substack{d \leq N \\ (d, 2Aq)=1}} \frac{\mu(d)}{d^2}$ оценку из леммы 3. Тогда получим

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{q\rho}(1) = H_q(1)L_{2A}(1) (\zeta_{Aq}^{-1}(2) + O(N^{-1})) + O(H_q(1)N^{-1}\tau(A) \log N).$$

Таким образом, получаем утверждение (ii):

$$\sum_{\substack{\rho \leq N \\ (\rho, 2A)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{q\rho}(1) = H_q(1)L_{2A}(1)\zeta_{Aq}^{-1}(2) + O(N^{-1}H_q(1)\tau(A) \log N).$$

Лемма 5. Пусть a — натуральное, $p > 0$, $q > 0$ — целые, $(2p, q) = 1$, $a \equiv q \pmod{4}$, $(2pq, a) = 1$, $p^4 q^3 \ll a$, тогда для любого $\epsilon > 0$ справедлива оценка:

$$S_1 - \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} W(p, q, a) \ll_{\epsilon} a^{\frac{11}{12} + \epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}. \quad (2.3)$$

Доказательство.

Имеем

$$S_1 = \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n < \frac{a}{4p} \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n), \quad (2.4)$$

где $n = x_1^2 + x_2^2$. Легко видеть, что условия леммы 1, $q\rho \ll \left(\frac{a}{p}\right)^{\frac{2}{3}}$ выполняется

при $\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$ вследствие неравенства $p^4 q^3 \ll a$.

Подставим оценку леммы 1 в (2.4). Имеем:

$$\sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a}{4p} \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n) - \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} M(a, q\rho) \ll_{\epsilon}$$

$$\ll a^{\frac{2}{3}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \rho^{-\frac{1}{2}}(a, q\rho)^{\frac{1}{2}} \tau(q\rho).$$

Оценим сумму правой части последнего равенства:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \rho^{-\frac{1}{2}}(a, q\rho)^{\frac{1}{2}} \tau(q\rho) &\ll \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \rho^{-\frac{1}{2}+\epsilon}(a, \rho)^{\frac{1}{2}} = \sum_{\substack{d\rho_1 < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (d\rho_1, 2p)=1}} \frac{d^{\frac{1}{2}}}{(\rho_1 d)^{\frac{1}{2}-\epsilon}} = \\ &= \sum_{\substack{\rho_1 < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho_1, 2p)=1}} \frac{1}{\rho_1^{\frac{1}{2}-\epsilon}} \sum_{\substack{d < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\rho_1} \\ (d, 2p)=1}} d^{\epsilon} \ll \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{\rho_1 < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho_1, 2p)=1}} \frac{1}{\rho_1^{\frac{3}{2}}} \ll \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{4}+\epsilon}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a}{4p}, (n, a)=1 \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n) - \frac{\pi}{4^2} \cdot \frac{a}{pq} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} M(a, q\rho) \ll_{\epsilon} a^{\frac{2}{3}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{4}+\epsilon}.$$

Таким образом, получим оценку

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a}{4p}, (n, a)=1 \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n) - \frac{\pi}{4^2} \cdot \frac{a}{pq} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} M(a, q\rho) &\ll \\ &\ll_{\epsilon} a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Применим для главного члена (2.5) оценку (ii) из леммы 4:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} M(a, q\rho) &= \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \frac{\phi(a)}{a} H_q(1) H_a(1) L_{2p}(1) \zeta_{pq}^{-1}(2) + \\ &+ O\left(\frac{a}{pq} \cdot \left(\frac{q}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) H_q(1) \tau(p) \log a\right) = \frac{\pi}{4^2} \cdot \frac{a}{pq} W(p, q, a) + \\ &+ O\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} \cdot H_q(1) \tau(pa) \log a\right). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} \ll \frac{a^{\frac{11}{12}}}{p^{\frac{2}{3}} q^{\frac{3}{4}}}$. Следовательно,

$$S_1 - \frac{\pi}{4^2} \cdot \frac{a}{pq} W(p, q, a) \ll_{\epsilon} a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}.$$

Утверждение леммы доказано.

Лемма 6. Пусть a — натуральное, $p > 0$, $q > 0$ — целые, $(2p, q) = 1$, $a \equiv q \pmod{4}$, $(2pq, a) = 1$, $p^4 q^3 \ll a$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ справедлива оценка:

$$S_3'' = \frac{\pi}{4^2} \cdot \frac{a}{pq} W(p, q, a) + O\left(a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Доказательство.

Имеем

$$S_3'' = \sum_{\substack{\rho < \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p} \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n),$$

где $n = x_1^2 + x_2^2$.

Для того чтобы применить лемму 1, необходимо проверить выполнение условия

$$(qp)^{\frac{3}{2}} \ll \frac{a - \rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p}.$$

Однако, возможно, при ρ , близких к $\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$, это условие не выполняется.

В этом случае оценивать сумму с помощью леммы 1 мы не можем.

Обозначим через $\rho_1 = \rho_1(a, p, q)$ число, для которого

$$\frac{a - \rho_1(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p} = (q\rho_1)^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда сумма S_3'' разбивается на две части:

$$S_3'' = \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p} \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n) + \sum_{\substack{\rho_1 < \rho \leq \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p} \\ 4pn \equiv a \pmod{qp}}} r(n) = S_{3,1}'' + S_{3,2}''. \quad (1)$$

Сумму $S_{3,1}''$ можно оценить с помощью леммы 1, а сумму $S_{3,2}''$ оценим тривиально.

Рассмотрим сначала $S_{3,1}''$. Для ρ_1 потребуется оценка сверху. Так как

$$\rho_1(aq)^{\frac{1}{2}} + 4p(q\rho_1)^{\frac{3}{2}} = a,$$

то

$$\rho_1 < \min\left(\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\frac{a}{4pq^{3/2}}\right)^{\frac{2}{3}}\right) = \min\left(\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}, \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(4p)^{2/3}q}\right).$$

Нетрудно видеть, что при $a \gg p^4 q^3$

$$\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \ll \frac{a^{\frac{2}{3}}}{(4p)^{2/3}q}.$$

Таким образом, $\rho_1 \ll \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Применим для $S''_{3,1}$ оценку леммы 1.

$$S''_{3,1} = \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) \sum_{\substack{n \leq \frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p} \\ 4pn \equiv a \pmod{4p}}} r(n) = \frac{\pi}{4^2} \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{pqr} \chi(\rho) M(a, qr) + \\ + O \left(\sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \left(\frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{p} \right)^{\frac{2}{3}} (qr)^{-\frac{1}{2}} (a, qr)^{\frac{1}{2}} \tau(qr) \right). \quad (2.6)$$

Рассмотрим подробно главный член:

$$\frac{\pi}{4^2} \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{pqr} \chi(\rho) M(a, qr) = \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} M(a, qr) - \\ - \frac{\pi}{4} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2pa)=1}} \chi(\rho) M(a, qr) = \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{qr}(1) - \\ - \frac{\pi}{4^2} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) H_{qr}(1).$$

Для оценки первой суммы воспользуемся утверждением (ii) леммы 4:

$$\frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \frac{\chi(\rho)}{\rho} H_{qr}(1) = \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \frac{\phi(a)}{a} H_q(1) H_a(1) L_{2p}(1) \zeta_{pq}^{-1}(2) + \\ + O \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} H_q(1) \tau(pa) \log a \right).$$

Для оценки второй суммы применим утверждение (i) леммы 4:

$$\frac{\pi}{4^2} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \chi(\rho) H_{qr}(1) \ll \frac{\pi}{4^2} \frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} \frac{\phi(a)}{a} H_a(1) H_q(1) \tau(p) \log a.$$

Рассмотрим остаток равенства (2.6):

$$\sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2p)=1}} \left(\frac{a-\rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{p} \right)^{\frac{2}{3}} (qr)^{-\frac{1}{2}} (a, qr)^{\frac{1}{2}} \tau(qr) \ll \sum_{\substack{\rho \leq \rho_1 \\ (\rho, 2pa)=1}} \left(\frac{a}{p} \right)^{\frac{2}{3}} (qr)^{-\frac{1}{2}} (a, qr)^{\frac{1}{2}} \tau(qr) \ll \\ \ll a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}.$$

Таким образом, для $S''_{3,1}$ получили асимптотическое равенство:

$$S''_{3,1} = \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \frac{\phi(a)}{a} H_q(1) H_a(1) L_{2p}(1) \zeta_{pq}^{-1}(2) + O \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}} H_q(1) \tau(pa) \log a \right) +$$

$$+O\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{pq^{\frac{1}{2}}}\frac{\phi(a)}{a}H_a(1)H_q(1)\tau(p)\log a\right)+O\left(a^{\frac{11}{12}+\epsilon}p^{-\frac{2}{3}}q^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Нетрудно видеть, что последний остаток поглощает первые два:

$$S''_{3,1} = \frac{\pi}{4^2}\frac{a}{pq}\frac{\phi(a)}{a}H_q(1)H_a(1)L_{2p}(1)\zeta_{pq}^{-1}(2)+O\left(a^{\frac{11}{12}+\epsilon}p^{-\frac{2}{3}}q^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Рассмотрим $S''_{3,2}$. Для того чтобы оценить эту сумму тривиально, потребуется оценка ρ_1 снизу — точнее оценка целых ρ на интервале:

$$\rho_1 < \rho \leq \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Количество таких ρ не превосходит $\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 + 1$. Из равенства

$$\rho_1(aq)^{\frac{1}{2}} + 4p(q\rho_1)^{\frac{3}{2}} = a$$

имеем

$$(aq)^{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1\right) = 4p(q\rho_1)^{\frac{3}{2}},$$

откуда

$$\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 = \frac{4p(q\rho_1)^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}} < \frac{4pq\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} = 4pq^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{4}}.$$

Таким образом,

$$\left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} - \rho_1 + 1 \ll a^{\frac{1}{4}}pq^{\frac{1}{4}}. \quad (2.7)$$

Так как для $S''_{3,2}$ выполняется $\frac{a - \rho(aq)^{\frac{1}{2}}}{4p} < (q\rho)^{\frac{3}{2}}$, то

$$S''_{3,2} \ll \sum_{\substack{\rho_1 < \rho \leq \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} \sum_{\substack{n \leq (q\rho)^{\frac{3}{2}} \\ 4pn \equiv a \pmod{q\rho} \\ (n, a)=1}} n^{\epsilon} \ll \sum_{\substack{\rho_1 < \rho \leq \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} (q\rho)^{\epsilon} \sum_{\substack{n \leq (q\rho)^{\frac{3}{2}} \\ 4pn \equiv a \pmod{q\rho} \\ (n, a)=1}} 1.$$

Количество чисел в прогрессии $4pn \equiv a \pmod{q\rho}$ при $n \leq (q\rho)^{\frac{3}{2}}$ и $(2p, q\rho) = 1$ не превосходит $[(q\rho)^{\frac{1}{2}}] + 1$. Подставим эту величину в оценку $S''_{3,2}$:

$$S''_{3,2} \ll \sum_{\substack{\rho_1 < \rho \leq \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} (q\rho)^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Учитывая (2.7), получим

$$S''_{3,2} \ll (aq)^{\frac{1}{4}+\epsilon} \sum_{\substack{\rho_1 < \rho \leq \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{1}{2}} \\ (\rho, 2pa)=1}} 1 \ll p(aq)^{\frac{1}{4}}(aq)^{\frac{1}{4}+\epsilon} = p(aq)^{\frac{1}{2}+\epsilon}.$$

Подставим теперь оценки $S''_{3,1}$ и $S''_{3,2}$ в оценку для S''_3 :

$$S''_{3,1} = \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \frac{\phi(a)}{a} H_q(1) H_a(1) L_{2p}(1) \zeta_{pq}^{-1}(2) + O\left(a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}\right) + O(p(aq)^{\frac{1}{2}+\epsilon}).$$

Нетрудно видеть, что при $p^4 q^3 \ll a$ выполняется неравенство

$$p(aq)^{\frac{1}{2}+\epsilon} \ll a^{\frac{11}{12}+2\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}.$$

Таким образом, ввиду произвольности $\epsilon > 0$ получаем утверждение леммы:

$$S''_{3,1} = \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} \cdot \frac{\phi(a)}{a} H_q(1) H_a(1) L_{2p}(1) \zeta_{pq}^{-1}(2) + O\left(a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Доказательство теоремы 1. Для оценки числа решений S уравнения (2.1), воспользуемся утверждениями лемм 5 и 6:

Для суммы S_1 имеем по лемме 5:

$$S_1 - \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} W(p, q, a) \ll_{\epsilon} a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}.$$

Для суммы S_3'' применим оценку из леммы 6:

$$S_3'' - \frac{\pi}{4^2} \frac{a}{pq} W(p, q, a) \ll_{\epsilon} a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}.$$

Тогда для S имеем:

$$S = S_1 + S_3'' = \frac{\pi}{8} \frac{a}{pq} W(p, q, a) + O(a^{\frac{11}{12}+\epsilon} p^{-\frac{2}{3}} q^{-\frac{3}{4}}).$$

Теорема, таким образом, доказана.

Литература

- [1] Kloosterman, H.D. On the representation of number in the form $ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2$ / H.D.Kloosterman // Acta mathematica. – 1926. – No. 49. – P. 407–484.
- [2] Estermann, T. A new application of the Hardy-Littlewood-Kloosterman method / T.Estermann // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1962. – Third series. – V. XII. – No. 4. – P. 425–444.
- [3] Chalk, J.H.H. An application of Hooley's method for counting solutions of a diophantine equation / J.H.H.Chalk // C.R. Math. Rep.Acad.Sci.Canada. – 1981. – Vol. III. – No. 2. – P. 99–103.
- [4] Chalk, J.H.H. An asymptotic formula for the number of solutions of a quadratic diophantine equation / J.H.H.Chalk // C.R.Math.Rep.Acad.Sci.Canada. – 1981. – Vol. III. – No. 4. – P. 215–220.
- [5] Белозеров, Г.С. Асимптотические формулы для числа решений некоторых диофантовых уравнений: дисс. канд. физ.-мат. наук. / Г.С.Белозеров. – Одесса, 1991. – С. 150.

- [6] Айерленд, К. Классическое введение в современную теорию чисел / К. Айерленд, М. Роузен. – М.: Мир, 1987. – С. 415.
- [7] Smith, R.A. The circle problem in an arithmetic progression / R.A. Smith // Canad.Math.Bull. – 1968. – Vol. 2. – No. 2. – P. 175–184.

Поступила в редакцию 16/III/2006;
в окончательном варианте — 16/III/2006.

AN ASYMPTOTIC FORMULA FOR THE NUMBER OF NATURAL NUMBERS REPRESENTATION BY A QUADRATIC FORM

© 2006 T.Y. Andreeva²

In the paper an asymptotic formula for the number of representation of natural numbers by a special quadratic form of the four variables is presented. The coefficients can increase and the approximation error is less then that in Kloosterman's formula.

Paper received 16/III/2006.

Paper accepted 16/III/2006.

²Andreeva Tatyana Yuryevna (t_an@rambler.ru), Dept. of the Theory of Numbers, Moscow Pedagogical State University, Moscow, 107140, Russia.