

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ. I¹© 2006 Е.К. Башкиров²

Развита квантовая теории сверхизлучения в двух- и трехуровневых макроскопических системах, взаимодействующих с электромагнитными полями, на основе метода исключения бозонных переменных.

Введение

Сверхизлучение (СИ) или коллективное спонтанное излучение представляет собой кооперативное когерентное излучение, возникающее вследствие спонтанного самопроизвольного зарождения и усиления корреляций первоначально независимых атомов [1–16]. Установление корреляции между атомами или фазирование их дипольных моментов происходит за счет обмена фотонами через общее поле излучения в процессе эволюции. Этим СИ принципиально отличается от других когерентных оптических явлений, таких как затухание свободной поляризации, оптической нутации и фотонного эха, в которых когерентность излучения не возникает самопроизвольно в процессе излучения, а обусловлена внешней когерентной накачкой.

Исследование СИ в макроскопических системах началось с 1954 года, когда была опубликована основополагающая работа Р. Дикке [1]. В этой работе Дикке впервые показал, что макроскопическая система из N инвертированных атомов с размерами, меньшими длины волны излучения ("сосредоточенная" или "точечная" система излучателей), может спонтанно перейти в основное состояние за время τ_R в N раз меньшее времени спонтанного излучения τ_0 атомов: $\tau_R = \tau_0/N$. При этом интенсивность излучения оказывается пропорциональной квадрату числа излучателей $I \sim N^2$, в отличие от обычного спонтанного излучения независимых атомов, для которого интенсивность излучения пропорциональна числу излучателей $I \sim N$. Для оптического и инфракрасного, т.е. наиболее интересных с точки зрения применений диапазонов излучения, сосредоточенная модель СИ не применима. Однако в ряде работ (см. ссылки в обзоре [13]) была теоретически предсказана возможность реализации СИ в протяженных телах. Экспериментально СИ наблюдалось впервые на вращательных переходах в газообразном HF [17]. Позднее СИ наблюдалось в протяженных средах: газах и парах металлов в оптическом, инфракрасном, дальнем инфракрасном и миллиметровом диапазонах (см. ссылки в

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

²Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

монографиях [14, 15]. Большое количество работ посвящено экспериментальному изучению оптического СИ на примесях в твердых телах [18–24]. В последнее время СИ удалось наблюдать в полупроводниковых гетероструктурах [25–27], органических красителях [28] и других средах. Сосредоточенную модель Дикке также удалось позднее реализовать экспериментально как в радиочастотной области на протонных спинах (см. ссылки в [16]), так и в оптическом диапазоне на тонких оптических пленках [24].

Наиболее важными характеристиками импульса СИ являются время наведения корреляций между излучателями или время СИ τ_R (определяет ширину импульса СИ на половине высоты) и время задержки сверхизлучательного импульса t_D . Для возникновения СИ в инвертированной системе первоначально некоррелированных излучателей необходимо выполнение следующих условий:

$$\tau \ll \tau_R \ll T_1, T_2, T_2^*, \quad (1)$$

$$\tau_p \ll t_D. \quad (2)$$

Здесь $\tau = L/c$ — время пролета фотона через образец, где L — длина активной части излучающего образца, T_1 — однородное время продольной релаксации (для рассматриваемой задачи эта величина представляет собой время спонтанного излучения изолированного атома τ_0), T_2 — однородное время поперечной релаксации или время релаксации дипольного момента (вследствие нерадиационных релаксационных взаимодействий, таких как столкновения в газах, рассеяние фотонов в твердом теле и других, которые возмущают дипольные осцилляции резонансного атома без изменения его энергии, инверсия может затухать со скоростью, отличной от скорости затухания дипольного момента [3]), T_2^* — неоднородное время релаксации или время фазовой памяти, в течение которого сохраняются межатомные фазовые корреляции (в газах неоднородное уширение обусловлено эффектом Доплера), τ_p — длительность импульса накачки.

Левое неравенство в формуле (1) означает, что фотоны покидают объем за период, меньший времени наведения межатомных корреляций, так что стимулированными процессами во время развития СИ можно пренебречь. Правое неравенство в той же формуле означает, что процессы наведения коллективных корреляций протекают быстрее, чем любые другие релаксационные процессы в индивидуальных атомах. Неравенство (2) означает, что процесс создания инверсной населенности атомной подсистемы должен закончиться раньше, чем сформируется коллективный импульс. В противном случае вклад в создание когерентного импульса даст только часть излучателей среды. Часто условие (2) записывают в виде более жесткого неравенства $\tau_p \ll \tau_R$, которое, однако, не выполняется для многих известных экспериментов по СИ. Как отмечалось в работе [14], выполнение условия $\tau_R \ll T_2^*$ необходимо только в случае полного "накрывания" неоднородно-уширенной линии спектром возбуждающего импульса накачки. В случае селективного "накрывания" этой линии узким спектром возбуждающего импульса накачки время T_2^* в неравенство (2) входить не должно.

Некоторые количественные ограничения, накладываемые неравенством (2) и связанные с эффектами распространения СИ, были получены Фридбергом и Хартманом и Арекки и Куртеном [3]. Согласно Фридбергу и Хартману, в случае полного накрывания неоднородно-уширенной линии спектром возбуждающего импульса накачки и при условии $F \geq 1$ ($F = \frac{4S}{L\lambda}$ — число Френеля, L — длина образца и S — площадь сечения образца), если не выполнено условие $L\alpha > 2T_2^*/\tau_R$, где α — обратная длина поглощения, то СИ практически отсутствует, так как коллективный распад происходит гораздо медленнее, чем дефазировка. В условиях

селективного возбуждения неоднородно-уширенной линии узким спектром возбуждающего импульса накачки формула Фридберга–Хартмана приобретает вид [14]: $\text{La} = 2\frac{L_p}{\tau_R}$.

Для получения когерентного излучения в результате СИ необходимо упорядочение поля, т.е. уменьшение степеней свободы, по которым распределена его энергия. Для дискриминации мод поля по направлению вылета фотонов в экспериментах по СИ используют образцы особой иглообразной формы, для которых $S \ll L^2$, где S — площадь поперечного сечения образца. В этом случае моды поля, распространяющиеся вдоль оси образца, усиливаются значительно сильнее, чем моды, испускаемые в других направлениях [11]. Для получения образца такой формы обычно используют "продольную" или "поперечную" накачку. В первом случае используют лазерный пучок накачки с площадью сечения $S \ll \lambda^2$, который пересекает образец, или пучок атомов с размерами $L^2 \ll S$. Во втором случае лазерный пучок диаметра L направляется перпендикулярно атомному пучку с площадью сечения S .

При выполнении указанных выше условий система инвертированных излучателей через время задержки t_D испускает когерентный одиночный мощный импульс, интенсивность которого пропорциональна квадрату числа излучателей в образце, $I_C \sim N^2$. Причем большая часть энергии излучается в малые телесные углы в направлениях наибольшей вытянутости образца. В случае $\tau > \tau_R$ (или $L > L_r$, где $L_r = c\tau_R$ и c — скорость света) разные участки иглообразного образца начинают излучать независимо от других, поскольку из-за конечности c корреляции между соседними участками отсутствуют [13]. Излучение от одного участка начинает передвигаться к соседним участкам, при этом часть излученной энергии снова передается в атомную подсистему, и излучение формируется в виде последовательных импульсов с уменьшающимися амплитудами. В этом случае в теле иглообразной формы возникает осцилляторный режим СИ.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением одноимпульсного режима СИ, т.е. будем считать, что условие $L/c < \tau_R$ выполнено. Для иглообразных образцов СИ реализуется для приосевых мод, направления волновых векторов которых лежат в малом телесном угле $\Delta\Omega = 2\pi\Theta_G$, где $\Theta_G = R/L$ — геометрический угол и $2R$ — диаметр поперечного сечения образца

Особенности излучения в приосевые моды определяются значением числа Френеля для иглообразного образца [6]: $F = \frac{\pi R^2}{L\lambda}$. Если $F > 1$, то дифракция для каждой приосевой моды имеет место лишь в малом дифракционном угле Θ_D ($\Theta_G > \Theta_D$), однако вклад в излучение дают все моды с направлением волнового вектора в геометрическом угле Θ_G . В этом случае приосевые моды можно считать независимыми, но необходимо учитывать поперечные изменения поля в пределах геометрического угла. С другой стороны, в случае $F < 1$ усиление излучения происходит в единственную моду, однако поле в этой моде сильно изменяется в поперечном направлении вследствие дифракции. Таким образом, для обоих указанных случаев СИ представляет собой трехмерную проблему, поскольку поле излучения меняется как вдоль оси цилиндра, так и в поперечном направлении. Компромиссным является случай, когда

$$F \approx 1. \quad (3)$$

В рассматриваемой ситуации поперечными вариациями поля можно пренебречь и рассматривать изменения поля только вдоль оси иглообразного образца. Это позволяет развивать одномерную теорию СИ, часто называют "чистым" сверхизлучением для которого выполнены условия (1)–(3). Соотношение $\tau_R < T_2^*$, необходимое

для генерации СИ, позволяет нам также оценить пороговое условие для концентрации инвертированных излучателей для "чистого" СИ. Ниже будет показано, что время СИ для системы с $F \approx 1$ определяется выражением $\tau_R = 8\pi T_1 / (3nL\lambda^2)$, где n — концентрация инвертированных излучателей в образце. Тогда СИ возможно при условии

$$n > \frac{8\pi T_1}{3T_2^* L\lambda^2}. \quad (4)$$

Условие (4) экспериментально может быть достигнуто путем увеличения интенсивности импульса накачки и, соответственно, числа инвертированных излучателей (и понижением температуры образца, т.е. увеличением времени неоднородного уширения T_2^*).

Наиболее строгое условия "чистого" СИ реализованы в известном эксперименте Х. Гиббса с соавторами, проведенном для парообразного Cs [29]. Для теоретического исследования "чистого" СИ исторически использовались два подхода: квантовый и полуклассический [9]. В рамках квантового подхода имеется возможность полностью описать эволюцию системы, начиная с начальной стадии — спонтанного излучения независимых атомов. Однако до настоящего времени при квантовом описании СИ не удалось описать адекватным образом эффекты распространения излучения в протяженных образцах. Поэтому квантовые теории обычно рассматривают СИ в приближении среднего поля, в рамках которого пренебрегают пространственными изменениями населенностей, дипольных моментов и других наблюдаемых. Наоборот, полуклассические теории СИ позволяют адекватно учесть эффекты распространения волн в образце, но не могут описать начальную спонтанную неколлективную эволюцию системы. При полуклассическом описании приходится использовать полуфеноменологические параметры, в частности, задавать среднюю начальную поляризацию квазиспинов (начальное значение угла Блоха). Для описания "чистого" СИ в двухуровневых системах, взаимодействующих с электромагнитным полем, использовались различные квантовые теории, базирующиеся на различных методах квантовой неравновесной статистической физики: [9, 14, 30, 32].

В работе Дикке не исследовалась временная эволюция системы двухуровневых атомов в процессе СИ и, соответственно, не обсуждался механизм наведения корреляций между дипольными моментами атомов в процессе излучения. Исследование симметричных свойств гамильтониана и волновой функции сосредоточенной модели системы идентичных двухуровневых атомов позволило угадать начальную волновую функцию атомной системы, для которой интенсивность излучения атомов будет пропорциональна квадрату числа излучателей.

Для построения квантовой теории "чистого" СИ вне рамок теории возмущения, позволяющей описать временную эволюцию процесса, необходимо использовать, как было уже сказано выше, методы неравновесной статистической физики. В ряде наших работ [31–40] для описания квантовой эволюции "чистого" СИ использовался метод исключения бозонных переменных Н.Н. Боголюбова–Н.Н. Боголюбова (мл.), развитый ими ранее применительно к проблеме полярона [41]. Оказалось, что метод исключения бозонных переменных является наиболее адекватным математическим аппаратом при решении целого ряда задач квантовой теории СИ. На основе указанного подхода нам удалось получить модифицированные кинетические уравнения в квантовой теории СИ двухуровневых систем, базирующихся на новом способе расщепления многочастичных атомных корреляционных функций. Нами впервые была построена полностью квантовая теория среднего поля

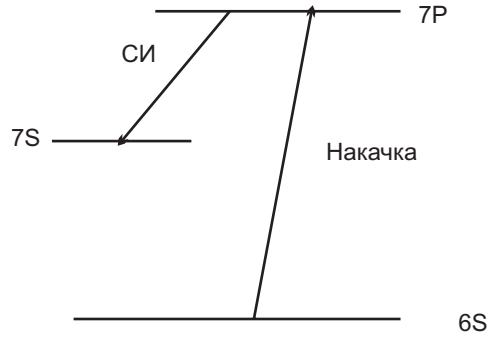


Рис. 1. Схема энергетических уровней и использованных переходов при наблюдении СИ в парообразном Cs

для СИ в трехуровневых системах Λ - и Ξ -типа. На основе метода исключения бозонных переменных нами также была рассмотрена квантовая теория СИ на примесных центрах в кристаллах. Позднее указанную теорию удалось применить для описания сверхизлучательного режима генерации лазерного антистоксового охлаждения твердых тел. Наконец, нами была построена квантовая теория СИ с учетом процессов накачки. Поэтому целью настоящего обзора является систематическое изложение квантовой теории СИ в двух- и трехуровневых макроскопических системах, взаимодействующих с электромагнитными полями, построенной на основе метода исключения бозонных переменных, и интерпретация современных экспериментов по СИ в газах и примесных твердых телах. В первой части обзора нами в рамках квантовой теории "чистого" СИ рассмотрена проблема расщепления многочастичных атомных корреляционных функций для двух- и трехуровневых макроскопических систем Λ - и Ξ -типа.

1. Метод исключения бозонных в квантовой теории СИ

1.1. Модифицированные квантовые кинетические уравнения СИ для двухуровневой системы

Как сказано было выше, для строгого рассмотрения начальной стадии сверхизлучательного процесса необходимо использовать квантовое описание взаимодействия излучателей с электромагнитным полем. При описании "чистого" СИ в рамках приближения среднего поля имеет место качественное согласие предсказаний теории и эксперимента. Однако количественное согласие между теоретическими и экспериментальными данными для параметров импульса СИ не вполне удовлетворительное.

В эксперименте Х.Гиббса с соавторами [29] по наблюдению одноимпульсного СИ в парах цезия удалось добиться наиболее жесткого выполнения условий генерации "чистого" СИ, рассмотренных выше. Схема энергетических уровней и переходов в атоме цезия, использованных в указанном эксперименте, показана на рис. 1. Атомы цезия инвертировались на уровень $7P_{3/2}$ с основного уровня $6S_{1/2}$ с помощью импульсов накачки с длиной волны 455 нм и длительностью 2 нс. СИ наблюдалось на переходе $7P_{3/2}-7P_{1/2}$ с длиной волны 2,9 мкм. Число Френеля для

указанного перехода равнялось единице. Для значений времени задержки более 7 нс всегда наблюдался одноимпульсный режим СИ. В работе для одной из концентраций возбужденных атомов приведены экспериментальные значения параметров одноимпульсного СИ : $\tau_p = 2$ нс, $\tau = 0,067$ нс, $\tau_R = 0,5$ нс, $T_1 = 70$ нс, $T_2 = 80$ нс, $T_2^* = 32$ нс, $n = 5,5 \cdot 10^{10}$ см⁻³, $N = 3 \cdot 10^9$. При этом ширина экспериментального импульса СИ составляла $10\tau_R$, в то время как квантовые теории среднего поля дают для ширины импульса в условиях эксперимента Гиббса и соавторов значение, примерно равное $3,5\tau_R$ [30].

Заниженные значения для ширины импульса квантовые теории СИ дают и для других экспериментов [6]. Так, например, в экспериментах В. Самарцева с соавторами по наблюдению СИ в молекулярных кристаллах дифенила, легированных пиреном [42], минимальная экспериментальная ширина импульса СИ составляла $6,3 \tau_R$ ($\tau_R = (2-8) \cdot (10^{-10}-10^{-11})$ с, ширина импульса 5–6 нс), что почти в два раза больше значения, предсказываемого теорией среднего поля. Примерно такое же соотношение между экспериментальной и теоретической шириной импульса СИ имело место в первом эксперименте по наблюдению СИ в парах HF [17].

В работах А.В. Андреева с соавторами [9] было высказано предположение, что указанное несоответствие в рамках квантовой теории среднего поля может быть устранено путем улучшения расщепления атомных корреляционных функций в кинетических уравнениях для СИ. Особенно наглядно проблема расщепления атомных корреляционных функций может быть проанализирована в рамках метода исключения бозонных переменных. В указанном подходе описание эволюции сверхизлучательной системы сводится к исследованию бесконечной иерархии кинетических уравнений для временных корреляционных функций атомных операторов. Одна из принципиальных трудностей, возникающих при анализе иерархии, заключается в выборе способа обрыва бесконечной цепочки уравнений путем расщепления многочастичных корреляторов. Способ расщепления в задачах о кинетике систем многих частиц может быть иногда подсказан конкретным видом гамильтониана в случае, когда взаимодействие между частицами содержит малый параметр. Однако при описании коллективного спонтанного излучения во всем временном интервале, в частности в области сверхизлучательного пика, рассуждения о точном обрыве теряют силу из-за отсутствия в данной задаче малого параметра. В настоящее время неизвестны какие-либо внутренние критерии "качества" расщепления в задачах такого рода, однако ясно, что при любых расщеплениях, по возможности, не должны нарушаться кинематические соотношения для квазиспиновых атомных операторов. Вопрос о сравнительной ценности тех или иных способов расщепления может быть решен в результате анализа временного поведения средних значений динамических переменных и сравнения теоретических предсказаний с экспериментом.

Обычно при описании СИ в рамках метода исключения бозонных переменных используют стандартное расщепление трехчастичных атомных корреляторов, которое аналогично расщеплению Тябликова для двухвременных корреляционных функций в теории ферромагнетизма [43]. Недостаток стандартного расщепления заключается в том, что оно не учитывает флуктуации инверсии населенностей, что заведомо плохо в области пика сверхизлучения. А.В. Андреев с соавторами [9] предложил расщепление трехчастичного коррелятора по аналогии с теоремой Вика для фермионных и бозонных операторов (в квантовой теории ферромагнетизма подобное расщепление для спиновых корреляторов обычно называют расщеплением типа Хартри–Фока). Предложенный способ расщепления позволяет со-

хранить некоторые свойства симметрии кинетических уравнений и приводит к более широкой кривой для интенсивности сверхизлучения, нежели стандартное приближение, что улучшает согласие между теорией и экспериментом. Однако указанное расщепление приводит к нефизическому поведению среднего значения инверсии населенностей на больших временах (заметим, что в квантовой теории ферромагнетизма использование расщепления Хартри-Фока для спиновых корреляторов также приводит к нефизическому поведению наблюдаемых, в частности, к бесконечному значению критической температуры Кюри).

В настоящей работе предложено новое расщепление для трехчастичных атомных корреляторов, которое учитывает кинематические свойства квазиспиновых атомных операторов, также ведет к более широкому и антисимметричному сверхизлучательному импульсу (в сравнении со стандартным приближением), но при этом не приводит к неадекватному поведению инверсии населенностей.

Рассмотрим систему N двухуровневых излучателей, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем. Ограничимся рассмотрением "чистого" сверхизлучения в иглообразном образце. Тогда гамильтониан рассматриваемой системы без учета движения центров масс атомов может быть записан в виде:

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (5)$$

где

$$H_A = \sum_{f=1}^N \hbar \omega_0 R_f^z$$

— гамильтониан свободных двухуровневых атомов;

$$H_F = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k$$

— гамильтониан свободного квантового электромагнитного поля и

$$H_{AF} = \sum_k \sum_{f=1}^N \hbar g_k \left(e^{i\vec{k}\vec{x}_f} a_k R_f^+ + e^{-i\vec{k}\vec{x}_f} a_k^+ R_f^- \right)$$

— гамильтониан взаимодействия между атомами и полем в дипольного приближения и приближении вращающейся волны. Здесь $a_k^+(a_k)$ — оператор рождения (уничтожения) фотона с частотой ω_k , волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией $\vec{e}_\sigma$, ω_0 — частота перехода в двухуровневом атоме, $\vec{x}_f$ — радиус-вектор f -го атома и

$$g_k = \omega_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar \omega_k V}} \vec{d} \vec{e}_\sigma$$

— константа диполь-фотонного взаимодействия, где V — объем системы, совпадающий с объемом квантования электромагнитного поля, и $\vec{d}$ — вектор дипольного момента двухуровневого атома.

Обозначим через ρ_t статистический оператор $A-F$ системы (здесь A — подсистема, состоящая из N излучателей, а F — подсистема, представляющая собой квантовое многомодовое электромагнитное поле), удовлетворяющий уравнению Лиувилля

$$i \hbar \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [H_t, \rho_t]$$

с начальным условием

$$\rho_{t_0} = \rho_A \rho_F, \quad \rho_F = \exp[-\beta \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k] / S p \exp[-\beta \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k].$$

Здесь t_0 — начальный момент времени, ρ_A — начальный равновесный статистический оператор для A — подсистемы, и ρ_F — начальное равновесное распределение для квантового электромагнитного поля. При таком выборе начального условия взаимодействие между первоначально равновесными подсистемами включается в момент времени $t = t_0$. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением проблемы спонтанного излучения и, следовательно, выберем в качестве начального полевое статистическое оператора $\rho_F = |0\rangle\langle 0|$.

Пусть O — произвольный оператор подсистемы A в представлении Шредингера. Используя метод исключения бозонных переменных (см. приложение), для среднего значения оператора $O(t)$ в представлении Гейзенберга можно получить обобщенное кинетическое уравнение вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle O(t) \rangle}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} \langle [H_A(t), O(t)] \rangle = \\ & = \sum_k g_k^2 \int_{t_0}^t dt' \left(e^{i\omega_k(t-t')} \sum_f^N \sum_{f'}^N e^{i\vec{k}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} \langle [R_f^+(t), O(t)] R_{f'}^-(t') \rangle \right) + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\langle \dots \rangle = S p \{ \dots \rho_{t_0} \}$.

Уравнение (6) имеет немарковский характер. Для упрощения обобщенного кинетического уравнения учтем, что взаимодействие между квантовым полем и излучателями мало, поэтому в подынтегральное выражение в правой части (6) можно подставить решения уравнений движения для операторов атомных переходов в "нулевом" по взаимодействию приближении

$$R_f^\pm(t') = R_f^\pm(t) \exp[\pm i\Omega(t - t')].$$

Переходя также к пределу $t_0 \rightarrow -\infty$, мы можем вычислить интеграл по времени в правой части (6) и получить марковское кинетическое уравнение вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \langle O(t) \rangle}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} \langle [H_A(t), O(t)] \rangle = \\ & = 2\pi \sum_k \sum_f^N \sum_{f'}^N g_{k_0}^2 \delta(\omega_k - \omega_0) e^{i\vec{k}_0(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} \langle [R_f^+(t), O(t)] R_{f'}^-(t) \rangle + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (7)$$

где как обычно сумма $\sum_k (\dots) = \frac{V}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha=1,2} \int (\dots) k^2 dk d\Omega(\vec{k})$ включает суммирование по поляризациям и направлениям волнового вектора и $|\vec{k}_0| = \omega_0/c$.

Выберем теперь в качестве оператора O коллективный оператор населенности $R^z = \sum_f R_f^z$. В этом случае из (7) легко получить следующее уравнение:

$$\langle \dot{R}^z(t) \rangle = -\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{N}{2} + \langle R^z(t) \rangle \right) - \sum_f^N \sum_{f' \neq f}^N C_{ff'} \langle R_f^+ R_{f'}^- \rangle, \quad (8)$$

где

$$C_{ff'} = 2\pi \sum_k g_{k_0}^2 \delta(\omega_k - \omega_0) e^{i\vec{k}_0(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})}$$

и $1/\tau_0 = 2\pi \sum_k g_{k_0}^2 \delta(\omega_k - \omega_0)$ ($\tau_0 \equiv T_1$) — обратное время спонтанного излучения изолированного атома. Ограничивая себя рассмотрением квантовой теории среднего поля для СИ, будем полагать, что все средние

$F(t) = \langle R_f^+(t) R_{f'}^-(t) \rangle$ ($f \neq f'$) не зависят от индексов f и f' . В этом случае уравнение (8) можно записать как:

$$\langle \dot{W}(t) \rangle = -\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{1}{2} + \langle W(t) \rangle \right) - \frac{1}{\tau_R} F(t). \quad (9)$$

где $W(t) = \langle R^z(t) \rangle / N = \langle R_f^z(t) \rangle$ — средняя инверсия населенности излучателя, $1/\tau_R = \mu N / \tau_0$ — время наведения корреляций в системе или время сверхизлучения. Здесь

$$\mu = \sum_{\sigma} \int g_{k_0}^2 \Gamma(\vec{k}_0) d\Omega(\vec{k}_0) / \sum_{\sigma} \int g_{k_0}^2 d\Omega(\vec{k}_0),$$

$$\Gamma(\vec{k}_0) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_f^N \sum_{f'}^N e^{i\vec{k}_0(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} - N \right)$$

— геометрический фактор, отражающий эффекты интерференции мод поля, связанные с конечными размерами и формой области, в которой расположены излучатели. Геометрический фактор μ был вычислен для образцов различной формы: круглого цилиндра, сферы и прямоугольного параллелепипеда [3]. Для круглого цилиндра в случае больших и малых чисел Френеля хорошей аппроксимацией служат выражения:

$$\mu = \begin{cases} \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{S}, & S \gg \left(\frac{\lambda}{2\pi} \right)^2, \quad F \geq 1 \\ \frac{3}{8} \frac{\lambda}{L}, & L \gg \frac{\lambda}{2\pi}, \quad F \ll 1. \end{cases}$$

Кинетическое уравнение для $F(t)$ удобно получить из уравнения для двухчастичного коллективного коррелятора $K(t) = \sum_{f \neq f'} \langle R_f^+ R_{f'}^- \rangle = N^2 F(t)$ (учитывая, что в теории

СИ $N \gg 1$, мы можем всегда заменять множитель $N - 1$ на N). Для указанного коррелятора из уравнения (7) имеем

$$\dot{K}(t) = 2 \sum_k^N \sum_f^N \sum_{f' \neq f}^N \sum_{f''}^N g_{k_0}^2 \delta(\omega_k - \omega_0) e^{i\vec{k}(\vec{x}_{f'} - \vec{x}_{f''})} \langle R_f^+ R_{f'}^z R_{f''}^- \rangle. \quad (10)$$

Выделяя в (10) слагаемые с совпадающими индексами ($f'' = f$ и $f'' = f$), получим

$$\begin{aligned} \dot{K}(t) = & 2 \sum_f^N \sum_{f' \neq f}^N \sum_{f'' \neq f, f'}^N C_{ff''} \langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle + 2 \sum_f^N \sum_{f' \neq f}^N C_{ff'} \langle R_f^z R_{f'}^z \rangle + \\ & + \sum_f^N \sum_{f' \neq f}^N C_{ff'} \langle R_{f'}^z \rangle - \frac{1}{\tau_0} K(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Ограничимся в настоящей работе рассмотрением динамики одно- и двухчастичных атомных корреляционных функций. Поэтому процедуру расщепления проведем для трехчастичных корреляторов.

Традиционное расщепление для трехчастичных корреляторов, входящих в правую часть уравнения (11), используемое в квантовых теориях сверхизлучения, имеет вид [9, 32]

$$\langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle = \langle R_f^z \rangle \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle \quad (f \neq f' \neq f''). \quad (12)$$

Физический смысл расщепления (12) состоит в пренебрежении флуктуациями инверсии населенностей энергетических уровней в излучателе (т.е. в замене оператора инверсии населенности R_f^z его средним значением), что заведомо плохо в

области сверхизлучательного пика. Действительно, если ввести величину, характеризующую флуктуации инверсии населенности $\delta = \langle (R_f^z)^2 \rangle - \langle R_f^z \rangle^2$, то в рамках рассматриваемого приближения ее значение равно нулю. Однако ее точное значение с учетом соотношения $(R_f^z)^2 = 1/4$ можно записать в виде $\delta = \frac{1}{4} - \langle R_f^z(t) \rangle^2$. В области сверхизлучательного пика, когда $\langle R_f^z(t) \rangle \rightarrow 0$, указанное расщепление становится слишком грубым.

Для того чтобы улучшить расщепление (12), необходимо использовать более "симметризованное" расщепление, в котором уменьшена выделенность z — компоненты квазиспина. Представим оператор квазиспина R_f^z через операторы переходов между атомными уровнями $R_f^\pm$ в максимально возможном симметричном виде. Для этого, следуя Кэллену [43], воспользуемся известными кинематическими свойствами атомных квазиспиновых операторов

$$R_f^z = \frac{1}{2} - R_f^- R_f^+, \quad (13)$$

$$R_f^z = \frac{1}{2} (R_f^+ R_f^- - R_f^- R_f^+). \quad (14)$$

Умножим тождество (13) на произвольный α — численный параметр, а тождество (14) — на $(1 - \alpha)$ и, складывая, получим максимально симметричное выражение для R_f^z .

$$R_f^z = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}(1 - \alpha) R_f^+ R_f^- - \frac{1}{2}(1 + \alpha) R_f^- R_f^+. \quad (15)$$

Подставим теперь выражение (15) для R_f^z в коррелятор $\langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle$. В результате мы получим набор трехчастичных корреляционных функций вида

$$\langle R_f^+ R_f^- R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle, \quad \langle R_f^- R_f^+ R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle. \quad (16)$$

Корреляционные функции (16) могут быть расщеплены симметричным образом в духе теоремы Вика:

$$\begin{aligned} \langle R_f^+ R_f^- R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle &= \langle R_f^+ R_f^- \rangle \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle + \langle R_f^- R_{f'}^+ \rangle \langle R_f^+ R_{f''}^- \rangle, \\ \langle R_f^- R_f^+ R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle &= \langle R_f^- R_{f'}^+ \rangle \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle + \langle R_f^- R_{f''}^- \rangle \langle R_f^+ R_{f'}^+ \rangle. \end{aligned}$$

В результате для рассматриваемых трехчастичных корреляторов имеем

$$\langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle = \langle R_f^z \rangle \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle - \alpha \langle R_f^- R_{f'}^+ \rangle \langle R_f^+ R_{f''}^- \rangle. \quad (17)$$

Заметим, что случай $\alpha = 0$ соответствует стандартному расщеплению трехчастичных атомных корреляторов типа расщепления Тябликова, а случай $\alpha = 1$ — расщеплению типа Хартри–Фока, использованному в работе [9]. Важным свойством расщепления Хартри–Фока, как отмечено в [9], является сохранение симметричных свойств операторов Паули при переходе от трехчастичных корреляторов к двухчастичным. Действительно, при $f'' = f$ трехчастичный коррелятор

$$\langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle|_{f''=f} = -1/2 \langle R_{f'}^+ R_f^- \rangle. \quad (18)$$

Точно такое же значение для указанного трехчастичного коррелятора получается при использовании расщепления Хартри–Фока. К сожалению, для произвольных значений α расщепление (17) не сохраняет свойств симметрии операторов Паули. При записи уравнений (8) и (11) мы заранее выделили в правой части слагаемые, соответствующие совпадающим узлам ($f = f'$ в уравнении (8) и $f'' = f, f' = f$ в уравнении (11)). Если не производить указанную операцию в кинетических уравнениях и рассматривать расщепление трехчастичных корреляторов при

любых значениях индексов f, f', f'' , можно легко сохранить свойства симметрии операторов при совпадающих индексах, добавляя в правую часть расщепления (17) компенсационные члены, содержащие символы Кронекера и "выбирающие" тип расщепления. Так, для сохранения свойства симметрии (18) можно записать расщепление (17) в виде:

$$\begin{aligned} \langle R_f^z R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle &= \langle R_f^z \rangle \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle - \alpha \langle R_f^- R_{f'}^+ \rangle \langle R_f^+ R_{f''}^- \rangle + \\ &+ \delta_{ff''} (1 - \alpha) (1/2 - \langle R_f^z \rangle) \langle R_{f'}^+ R_{f''}^- \rangle. \end{aligned}$$

Заметим, что введение в расщепления для трехчастичных корреляторов компенсационных членов впервые было предложено в квантовой теории ферромагнетизма Дембинским (см. в [43]).

Используя расщепление (17), очевидное расщепление для двухчастичного коррелятора

$$\langle R_f^z R_{f'}^z \rangle = \langle R_f^z \rangle \langle R_{f'}^z \rangle,$$

а также независимость двухчастичных корреляторов от расположения излучателей, можно получить следующую цепочку замкнутых кинетических уравнений, описывающих кинетику исследуемой системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau_0} \left(\frac{1}{2} + W(t) \right) - \frac{1}{\tau_R} F(t), \\ \frac{\partial F(t)}{\partial t} &= \frac{2}{N\tau_R} W(t) \left(W(t) + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\tau_0} F(t) + \frac{2}{\tau_R} W(t) K(t) - \frac{2}{\tau_R} \alpha F(t)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Решая систему уравнений (19), мы можем определить не только эволюцию инверсии населенностей атомных уровней и макроскопической поляризации K , но и интенсивности сверхизлучательного импульса

$$I(t) = \frac{\partial}{\partial t} \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k,$$

связанной со средним значением оператора коллективной инверсии населенности атомных уровней очевидным соотношением:

$$I(t) = -\hbar\omega_0 \frac{\partial \langle R^z(t) \rangle}{\partial t} = -N\hbar\omega_0 \frac{\partial W(t)}{\partial t}. \quad (20)$$

Решение системы уравнений (19) может быть найдено только путем численного интегрирования. Заметим, что использование расщепления типа Хартри–Фока в уравнениях (19) приводит не только к нефизическому поведению коллективной полуразности населенностей уровней, но и к нарушению закона сохранения энергии. Полная относительная энергия электромагнитного поля, испускаемого системой в результате излучения,

$$\int_0^\infty I(t) dt / (\hbar\omega_0 N) = 1.$$

При использовании расщепления типа расщепления Хартри–Фока указанное соотношение для относительной интенсивности поля не выполняется, в отличие от стандартного расщепления.

В настоящей работе параметр α выбирался нами в виде различных функций времени

$$\alpha = mW(t), \quad W(t)^m, \quad mF(t)^n, \quad W(t)^m F(t)^n \quad (n, m = 1, 2, \dots)$$

и др. Численные расчеты на основе уравнений (19), (20) показали, что наиболее адекватным для решения поставленной задачи — улучшения согласия между теоретическим и экспериментальным значением ширины импульса СИ в рамках квантовой теории среднего поля — является выбор параметра α в виде:

$$\alpha = mW(t) \quad (m = 1, 2, \dots).$$

В остальных случаях мы получаем при решении уравнений (19), (20) либо нефизическое поведение средней полуразности населенностей атомных уровней и нарушение закона сохранения энергии для рассматриваемой системы, либо поведение наблюдаемых, мало отличающееся от соответствующего поведения стандартной модели. На рис. 2 и 3 нами представлены результаты численных расчетов для временного поведения средней инверсии населенностей атомных уровней в излучателе $W(t)$ и приведенной интенсивности сверхизлучательного импульса $J(t) = I(t)/(\hbar \omega_0 N^2)$ для трех различных расщеплений трехчастичного атомного коррелятора (соответственно для трех различных значений параметра α в (17)) для протяженной модели Дикке с параметрами, взятыми из эксперимента Х.Гиббса с соавторами [29]: $N = 3 \cdot 10^9$, $\mu N = \tau_0/\tau_R = 1$, $1 \cdot 10^3$. Кривые получены путем решения уравнений (19), (20) с использованием соответственно стандартного расщепления ($\alpha = 0$), расщепления типа Хартри–Фока ($\alpha = 1$) и модифицированного расщепления (17) ($\alpha = mW(t)$ при $m = 6$) для трехчастичных атомных корреляторов. Поскольку длительность импульса накачки $\tau_p = 2$ нс в эксперименте Х.Гиббса с соавторами превосходит время СИ $\tau_R = 0.5$ нс, в конце процесса накачки возникает отличная от нуля макроскопическая поляризация на переходе, ответственном за СИ. Учесть влияния процессов накачки на СИ мы можем, выбрав в уравнениях (19) начальное условие для величины $F(0)$ в виде [39]:

$$F(0) = N^{-1} \exp \left\{ \frac{\tau_p}{4\tau_R} - \frac{\sin(\omega_R \tau_p/2)}{2\tau_R \omega_R} \right\} \sin \frac{\omega_R \tau_p}{2}, \quad (21)$$

где ω_R — частота Раби для накачки. Подробный вывод формулы (21) будет приведен во второй части обзора. Для π импульса накачки в условиях эксперимента Х.Гиббса с соавторами получаем: $F(0) \approx 10^{-9}$.

Как видно из рис. 2 и 3 новое расщепление не приводит к нефизическому поведению среднего значения инверсии населенностей излучателя в отличие от приближения Хартри–Фока. С другой стороны, позволяет получить более широкий импульс сверхизлучения, нежели стандартное приближение, что улучшает согласие теории с экспериментом. В результате параметры теоретической кривой для интенсивности СИ, полученной с использованием модифицированного расщепления и учетом процессов накачки (отличная от нуля начальная макроскопическая поляризация), находятся в очень хорошем согласии с параметрами экспериментальной кривой. Для значения параметра $m = 8$ ширина импульса сверхизлучения составляет приблизительно $10\tau_R$, а время задержки сверхизлучательного импульса: $(t_D)_{theor} \approx 20\tau_R$, т.е. значения обоих параметров импульса практически совпадают с их экспериментальными значениями, полученными Х.Гиббсом с соавторами.

Таким образом, новое расщепление трехчастичных атомных корреляторов, более полно учитывает свойства симметрии операторов квазиспина и приводит к более адекватному описанию динамики рассматриваемой модели. В следующем разделе мы обобщим введенное расщепление для трехчастичных атомных корреляторов на случай трехуровневых систем.

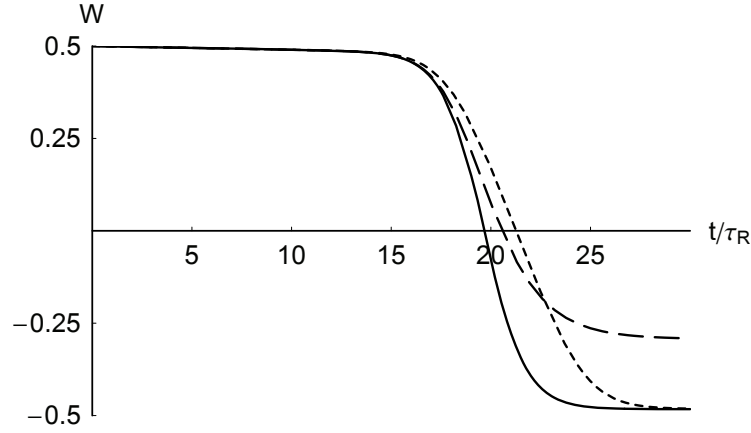


Рис. 2. Временные зависимости инверсии населенностей для различных значений параметра расщепления: $\alpha = 0$ (сплошная кривая), $\alpha = 1$ (штриховая кривая), $\alpha = 6W(t)$ (точечная кривая)

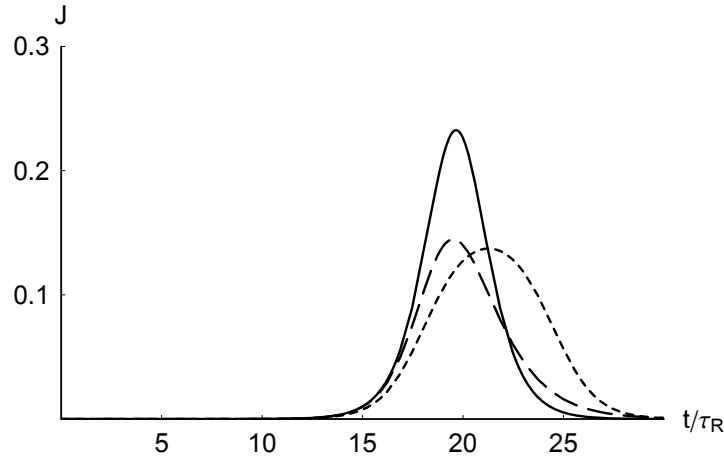


Рис. 3. Временные зависимости относительных интенсивностей СИ для различных значений параметра расщепления: $\alpha = 0$ (сплошная кривая), $\alpha = 1$ (штриховая кривая), $\alpha = 6W(t)$ (точечная кривая)

1.2. Кинетические уравнения СИ в трехуровневых системах

Рассмотрим протяженную систему N трехуровневых излучателей, взаимодействующих с квантовым электромагнитным полем. Для получения кинетических уравнений для систем с любыми возможными дипольно разрешенными переходами в трехуровневом излучателе: Λ -, Ξ - и V -типа (см. рис. 4), будем полагать в общем случае, что разрешены все переходы. Как и в предыдущем разделе будем рассматривать протяженную систему иглообразной формы с числами Френеля для всех возможных переходов большими или равными единице.

Тогда гамильтониан рассматриваемой системы в дипольном приближении и в

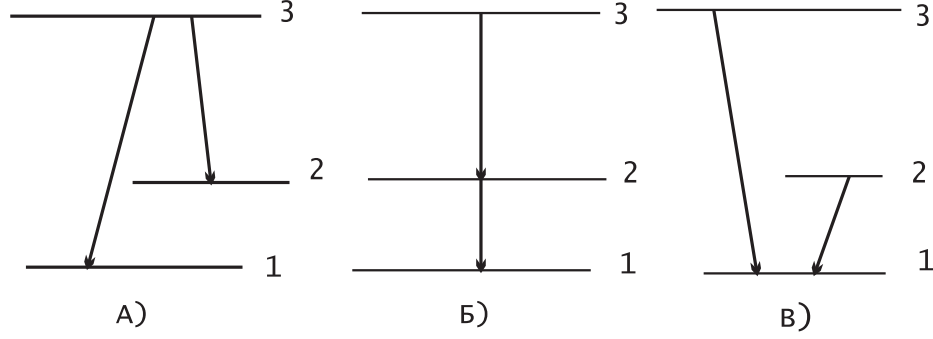


Рис. 4. Возможные конфигурации разрешенных переходов в трехуровневых атомах: А — Λ - , Б — Ξ - и В — V -типа

приближении вращающейся волны можно представить в следующем виде:

$$H = H_M + H_F + H_{MF}, \quad (22)$$

где

$$H_M = \sum_{f=1}^N \sum_{\alpha=1}^3 \epsilon_{\alpha} R_{\alpha\alpha}^{(f)}$$

— гамильтониан N свободных трехуровневых атомов

$$H_F = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k$$

— гамильтониан свободного электромагнитного поля и

$$H_{MF} = \hbar \sum_k \sum_{f=1}^N \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} g_{\alpha\beta}^{(k)} \left\{ e^{i\vec{k}\vec{x}_f} a_k R_{\beta\alpha}^{(f)} + e^{-i\vec{k}\vec{x}_f} a_k^+ R_{\alpha\beta}^{(f)} \right\}$$

— гамильтониан взаимодействия между атомами и полем.

Здесь индекс f , как и в предыдущем разделе, нумерует трехуровневые излучатели в образце, $\epsilon_{\alpha} (\alpha = 1, 2, 3)$ — энергия уровня α в f -ом трехуровневом атоме, $\omega_{\alpha\beta}$ — частоты разрешенных переходов в излучателе, $R_{\alpha\alpha}^{(f)}$ — оператор населенности уровня α в атоме f и $R_{\alpha\beta}^{(f)}$ — операторы, описывающие переходы с уровня β на уровень α в излучателе f и удовлетворяющие коммутационным соотношениям вида

$$[R_{\alpha\beta}^{(f)}, R_{\alpha'\beta'}^{(f')}] = R_{\alpha\beta'}^{(f)} \delta_{\beta\alpha'} \delta_{ff'} - R_{\alpha'\beta}^{(f)} \delta_{\alpha\beta'} \delta_{ff'},$$

$a_k^+ (a_k)$ — оператор рождения (уничтожения) фотона с частотой ω_k , волновым вектором $\vec{k}$ и поляризацией $\vec{e}_{\sigma}$, $g_{\alpha\beta}^{(k)} = \omega_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{2\pi}{\hbar\omega_k V}} \vec{d}_{\alpha\beta} \vec{e}_{\sigma}$ — константа диполь-фотонного взаимодействия и $\vec{d}_{\alpha\beta}$ — дипольный момент соответствующего перехода.

Для исследования кинетики рассматриваемой системы будем использовать, как и ранее, метод исключения бозонных переменных. Ограничимся рассмотрением проблемы спонтанного излучения, т.е. предположим, что в начальный момент времени электромагнитное поле находится в вакуумном состоянии. В результате для системы с гамильтонианом (22), используя подход, развитый в предыдущем разделе, можно получить следующее обобщенное кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial \langle O(t) \rangle}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), O(t)] \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \sum_{f=1}^N \sum_{f'=1}^N \int_{-\infty}^t dt' e^{-i\omega_k(t-t')} \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\alpha' < \beta'} g_{\alpha\beta}^{(k)} g_{\alpha'\beta'}^{(k)} e^{i(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} \times \\
&\quad \times \langle [R_{\beta\alpha}^{(f)}(t), O(t)] R_{\alpha'\beta'}^{(f')}(t') \rangle + h.c.
\end{aligned} \tag{23}$$

Считая взаимодействие между излучателями и полем слабым, мы можем использовать для операторов атомной подсистемы в правой части уравнения (23) "нулевое" приближение вида

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta}^{(f)}(t') &= R_{\alpha\beta}^{(f)} e^{i\omega_{\alpha\beta}(t-t')} \quad (\alpha > \beta), \\
R_{\beta\alpha}^{(f)}(t') &= R_{\beta\alpha}^{(f)} e^{-i\omega_{\alpha\beta}(t-t')} \quad (\alpha < \beta).
\end{aligned}$$

С учетом сделанного предположения из точного уравнения (23) мы можем получить марковское обобщенное уравнение вида:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \langle O(t) \rangle}{\partial t} - \frac{i}{\hbar} \langle [H_M(t), O(t)] \rangle = \\
&= \sum_{\alpha < \beta} \sum_k \sum_{f=1}^N \sum_{f'=1}^N C_{ff'}^{\alpha\beta} \langle [R_{\beta\alpha}^{(f)}(t), O(t)] R_{\alpha\beta}^{(f')}(t) \rangle + \\
&+ \sum_{\alpha < \beta} \sum_k \sum_{f=1}^N \sum_{f'=1}^N C_{ff'}^{\alpha\beta} \langle R_{\beta\alpha}^{(f)}(t) [O(t), R_{\alpha\beta}^{(f')}(t)] \rangle,
\end{aligned} \tag{24}$$

где

$$C_{ff'}^{(\alpha\beta)} = 2\pi \sum_k \sum_{f=1}^N \sum_{f'=1}^N (g_{\alpha\beta}^{(k)})^2 \delta(\omega_k - \omega_{\alpha\beta}) e^{i(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})},$$

$\omega_{\alpha\beta}$ — частота перехода $\beta - \alpha$ в трехуровневом излучателе. При записи уравнения (24) мы учли малость корреляторов типа $\langle R_{\beta\alpha}^{(f)}(t) [O(t), R_{\alpha'\beta'}^{(f')}(t)] \rangle$. Выберем последовательно в качестве O коллективные операторы населенностей атомных уровней $R_{\alpha\alpha} = \sum_f R_{\alpha\alpha}^{(f)}$ ($\alpha = 1, 2, 3$), удовлетворяющие закону сохранения числа излучателей в системе: $R_{11}(t) + R_{22}(t) + R_{33}(t) = N$. Для средних значений коллективных операторов населенностей из уравнения (24) получаем

$$\begin{aligned}
\langle \dot{R}_{11} \rangle &= \frac{1}{\tau_{13}} \langle R_{33} \rangle + \frac{1}{\tau_{12}} \langle R_{22} \rangle + \sum_{f \neq f'} C_{ff'}^{(13)} S_{ff'}^{(13)} + \sum_{f \neq f'} C_{ff'}^{(12)} F_{ff'}^{(12)}, \\
\langle \dot{R}_{22} \rangle &= \frac{1}{\tau_{23}} \langle R_{33} \rangle - \frac{1}{\tau_{12}} \langle R_{22} \rangle + \sum_{f \neq f'} C_{ff'}^{(23)} S_{ff'}^{(23)} - \sum_{f \neq f'} C_{ff'}^{(12)} F_{ff'}^{(12)}, \\
\langle \dot{R}_{33} \rangle &= -\frac{1}{\tau_{13}} \langle R_{33} \rangle - \frac{1}{\tau_{23}} \langle R_{33} \rangle - \sum_{f \neq f'} C_{ff'}^{(13)} S_{ff'}^{(13)} - \sum_{f \neq f'} C_{ff'}^{(23)} F_{ff'}^{(23)},
\end{aligned} \tag{25}$$

где $1/\tau_{\alpha\beta} = 2\pi \sum_k (g_{\alpha\beta}^{(k)})^2 \delta(\omega_k - \omega_{\alpha\beta})$ — обратное время спонтанного излучения на переходе $\beta - \alpha$ и $F_{ff'}^{(\alpha\beta)} = \langle R_{\beta\alpha}^{(f)} R_{\alpha\beta}^{(f')} \rangle$. Для двухчастичных коллективных корреляторов $K^{(\alpha\beta)} = \sum_{f \neq f'} F_{ff'}^{(\alpha\beta)}$ из обобщенного уравнения (24) получаем

$$\begin{aligned}
\dot{K}^{(\alpha\beta)}(t) &= \sum_f \sum_{f' \neq f} \sum_{f'' \neq f, f'}^N C_{ff''}^{(\alpha\beta)} \langle (R_{\beta\beta}^{(f)} - R_{\alpha\alpha}^{(f)}) R_{\beta\alpha}^{(f')} R_{\alpha\beta}^{(f'')} \rangle + \\
&+ \sum_f \sum_{f' \neq f}^N C_{ff'}^{(\alpha\beta)} \langle (R_{\beta\beta}^{(f)} - R_{\alpha\alpha}^{(f)}) R_{\beta\beta}^{(f')} \rangle - \frac{1}{\tau_{\alpha\beta}} K^{(\alpha\beta)}(t).
\end{aligned} \tag{26}$$

Ограничимся, как и в двухуровневом случае, рассмотрением кинетических уравнений для одно- и двухчастичных корреляторов и поэтому проведем процедуру расщепления для трехчастичных корреляторов. Стандартное расщепление трехчастичных корреляторов имеет вид [33]:

$$\langle R_{\alpha'\alpha'}^{(f)} R_{\beta\alpha}^{(f')} R_{\alpha\beta}^{(f)} \rangle = \langle R_{\alpha'\alpha'}^{(f)} \rangle \langle R_{\beta\alpha}^{(f')} R_{\alpha\beta}^{(f)} \rangle.$$

Физический смысл этого приближения, как и в двухуровневом случае, состоит в пренебрежении флуктуациями средних населенностей атомных уровней при замене самих операторов их средними значениями. Как уже было показано выше, в области сверхизлучательного пика такое приближение является слишком грубым.

Используя кинематические свойства квазиспиновых операторов, мы ранее получили симметричное расщепление для трехчастичных корреляторов в случае двухуровневой системы в виде (17). Указанное расщепление может быть легко обобщено на случай трехуровневой системы. Используя тождества вида $R_{\alpha\alpha}^{(f)} = R_{\alpha\beta}^{(f)} R_{\beta\alpha}^{(f)}$ ($\beta \neq \alpha$) для трехчастичных корреляторов в правой части уравнений (26), можно получить

$$\begin{aligned} \langle R_{11}^{(f)} R_{21}^{(f')} R_{12}^{(f'')} \rangle &= \langle R_{11}^{(f)} \rangle \langle R_{21}^{(f')} R_{12}^{(f'')} \rangle - \alpha_1 \langle R_{21}^{(f')} R_{12}^{(f'')} \rangle \langle R_{11}^{(f)} \rangle, \\ \langle R_{22}^{(f)} R_{21}^{(f')} R_{12}^{(f'')} \rangle &= \langle R_{22}^{(f)} \rangle \langle R_{21}^{(f')} R_{12}^{(f'')} \rangle - \alpha'_1 \langle R_{21}^{(f')} R_{12}^{(f'')} \rangle \langle R_{22}^{(f)} \rangle, \\ \langle R_{22}^{(f)} R_{32}^{(f')} R_{23}^{(f'')} \rangle &= \langle R_{22}^{(f)} \rangle \langle R_{32}^{(f')} R_{23}^{(f'')} \rangle - \alpha_2 \langle R_{32}^{(f')} R_{23}^{(f'')} \rangle \langle R_{22}^{(f)} \rangle, \\ \langle R_{33}^{(f)} R_{32}^{(f')} R_{23}^{(f'')} \rangle &= \langle R_{33}^{(f)} \rangle \langle R_{32}^{(f')} R_{23}^{(f'')} \rangle - \alpha'_2 \langle R_{32}^{(f')} R_{23}^{(f'')} \rangle \langle R_{33}^{(f)} \rangle, \\ \langle R_{11}^{(f)} R_{31}^{(f')} R_{13}^{(f'')} \rangle &= \langle R_{11}^{(f)} \rangle \langle R_{31}^{(f')} R_{13}^{(f'')} \rangle - \alpha_3 \langle R_{31}^{(f')} R_{13}^{(f'')} \rangle \langle R_{11}^{(f)} \rangle, \\ \langle R_{33}^{(f)} R_{31}^{(f')} R_{13}^{(f'')} \rangle &= \langle R_{33}^{(f)} \rangle \langle R_{31}^{(f')} R_{13}^{(f'')} \rangle - \alpha'_3 \langle R_{31}^{(f')} R_{13}^{(f'')} \rangle \langle R_{33}^{(f)} \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Для случая $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 0$ ($i = 1, 2$) формулы (27) переходят в стандартное расщепление. Полагая $\alpha_i = \beta_i = \gamma_i = 1$, мы приходим к расщеплению типа расщепления Хартри – Фока, использованного для двухуровневого случая в работах А.В. Андреева с соавторами [9].

Учитывая расщепления (27) и предполагая, как и в двухуровневом случае независимость двухчастичных корреляторов $F_{ff'}^{(\alpha\beta)} \equiv F^{(\alpha\beta)}$ от взаимного расположения излучателей, из уравнений (25)–(26) можно получить цепочку замкнутых кинетических уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= \frac{1}{\tau_{13}}(1 - X_1 - X_2) + \frac{1}{\tau_{12}}X_2 + \frac{1}{\tau_{R13}}F^{(13)} + \frac{1}{\tau_{R12}}F^{(12)}, \\ \dot{X}_2 &= \frac{1}{\tau_{23}}(1 - X_1 - X_2) - \frac{1}{\tau_{12}}X_2 + \frac{1}{\tau_{R23}}F^{(23)} - \frac{1}{\tau_{R12}}F^{(12)}, \\ \dot{X}_3 &= -\dot{X}_1 - \dot{X}_2, \\ \dot{F}^{(13)} &= \frac{1}{\tau_{R13}}(1 - 2X_1 - X_2)(F^{(13)} + N^{-1}(1 - X_1 - X_2)) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{13}}F^{(13)} - \frac{1}{\tau_{R13}}(\alpha'_3 - \alpha_3)(F^{(13)})^2, \\ \dot{F}^{(23)} &= \frac{1}{\tau_{R23}}(1 - 2X_2 - X_1)(F^{(23)} + N^{-1}(1 - X_1 - X_2)) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{23}}F^{(23)} - \frac{1}{\tau_{R23}}(\alpha'_2 - \alpha_2)(F^{(23)})^2, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\dot{F}^{(12)} = \frac{1}{\tau_{R12}}(X_2 - X_1)(F^{(12)} + N^{-1}X_2) - \frac{1}{\tau_{13}}F^{(13)} - \frac{1}{\tau_{R13}}(\alpha'_3 - \alpha_3)(F^{(13)})^2.$$

Здесь $X_\alpha = \langle R_{\alpha\alpha}^{(f)} \rangle$ — средняя населенность уровня α в излучателе,

$$1/\tau_{R\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}N/\tau_{\alpha\beta} \quad (29)$$

— время наведения корреляций или время СИ на переходе $\beta - \alpha$,

$$\mu_{\alpha\beta} = \sum_{\sigma} \int (g_{\alpha\beta}^{(k_{\alpha\beta})})^2 \Gamma(\vec{k}_{\alpha\beta}) d\Omega(\vec{k}_{\alpha\beta}) / \sum_{\sigma} \int (g_{\alpha\beta}^{(k_{\alpha\beta})})^2 d\Omega(\vec{k}_{\alpha\beta}),$$

$$\Gamma(\vec{k}_{\alpha\beta}) = \frac{1}{N^2} \left(\sum_f^N \sum_{f'}^N e^{i\vec{k}_{\alpha\beta}(\vec{x}_f - \vec{x}_{f'})} - N \right) \quad (k_{\alpha\beta} = \omega_{\alpha\beta}/c)$$

— геометрический фактор для перехода $\beta - \alpha$.

Для численных расчетов ниже использовались параметры $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha''_2$ вида

$$(\alpha'_1 - \alpha_1) = n(X_2 - X_1), \quad (\alpha'_2 - \alpha_2) = m(X_3 - X_2),$$

$$(\alpha'_3 - \alpha_3) = k(X_3 - X_1), \quad n, m, k = 1, 2, 3, 4...$$

Теперь перейдем к рассмотрению трехуровневых систем с определенными типами разрешенных переходов в излучателе.

2. Квантовая теория СИ в трехуровневых системах Λ -типа

В ряде экспериментов в многоуровневых газовых средах и примесных кристаллах удалось наблюдать не один, а два и более сверхизлучательных импульса различных длин волн. В настоящем разделе мы рассмотрим кратко эксперименты и построим квантовую теорию двухимпульсного СИ в трехуровневых системах Λ -типа. Эксперименты по наблюдению двухцветного СИ в таких системах были выполнены Р. Флорианом с соавторами [18, 19], М. Ашидой с соавторами [21] и В.В. Самарцевым с соавторами [22].

В первых экспериментах по наблюдению двухцветного СИ, выполненных Р. Флорианом с соавторами, использовались иглообразные кристаллы KCl, легированные ионами O_2^- . Концентрация ионов O_2^- в исследуемых образцах была порядка 10^{17} см^{-3} , соответственно, максимальное число инвертированных атомов N в эксперименте было порядка 10^{13} . Для накачки использовались лазерные импульсы с длиной волны 266 нм и длительностью приблизительно 30 пс. Импульсы накачки фокусировались в пятно с поперечными размерами 0.1 мм. Длина образца составляла 10 мм. Двухцветное СИ наблюдалось на переходах с длинами волн 592,8 нм (желтый импульс) и 629,1 нм (красный импульс) (см. рис. 5) при температуре 4,2 К. Значение числа Френеля для излучения на обоих переходах было близко к единице. Накачка образца производилась на один из колебательных уровней верхнего электронного состояния. Инвертированные импульсом накачки в неравновесное состояние ионы O_2^- релаксировали в основное колебательное состояние посредством безизлучательных переходов за счет взаимодействия с фононами. Переход ионов O_2^- в нижнее электронное состояние возможен путем излучения фотонов с длинами волн 592,8 нм и 629,1 нм. При этом излучательные переходы происходят

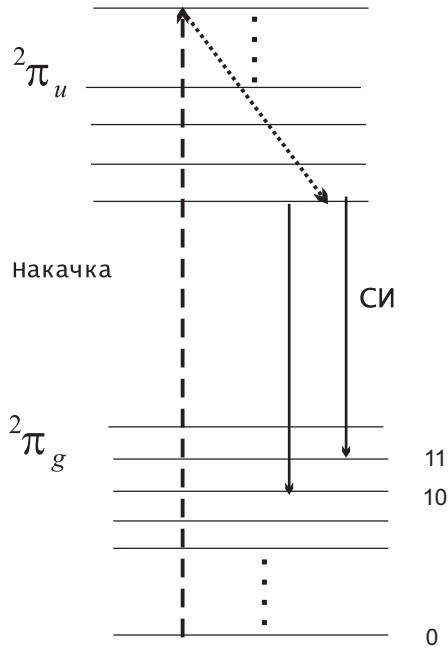


Рис. 5. Схема энергетических уровней и использованных переходов при наблюдении СИ на примесях O_2^- в KCl

на возбужденные колебательные уровни нижнего электронного состояния. Релаксации ионов O_2^- с этих уровней в основное состояние может заметным образом повлиять на характер излучения [44], в частности, привести к замене СИ на режим усиления спонтанного излучения [45]. В результате конкуренции различных каналов релаксации в рассматриваемых экспериментах оба импульса СИ одновременно наблюдались только для промежуточных значений интенсивности накачки (мощность импульса накачки в промежутке от 25 ГВ/см² до 40 ГВ/см²). При более низких интенсивностях накачки (превосходящих, естественно порог генерации СИ для импульса накачки в 10 ГВ/см²) практически отсутствовал желтый импульс, а при высоких интенсивностях — красный импульс. В режиме двухцветного СИ оба импульса возникали практически одновременно, при этом импульсы имели примерно одинаковую длительность, которая составляла примерно 1 нс, и время задержки. Однако сами ширины импульсов, времена задержки и относительные интенсивности импульсов СИ заметно флуктуировали от эксперимента к эксперименту, т.е. наблюдалась сильная конкуренция импульсов СИ разных цветов.

Время спонтанного излучения для перехода с длиной волны 629,1 нм составляло примерно 91 нс при 4,2 К. Это позволяет нам оценить время СИ для указанного перехода. Оно оказывается порядка 10^{-5} с. Таким образом, экспериментальная ширина импульса СИ примерно в 10^5 превосходит время СИ (напомним, что, например, в эксперименте Х. Гиббса с соавторами [29] ширина импульса равна примерно десяти временам СИ). Это означает, что за счет наличия различных каналов релаксации системы с временами жизни, сравнимыми с временами наведения корреляций между диполями в процессе коллективного излучения, в эксперименте не выполнены условия "чистого" СИ, поэтому сравнение теоретических расчетов, полученных на основе квантовой теории в модели "чистого" СИ

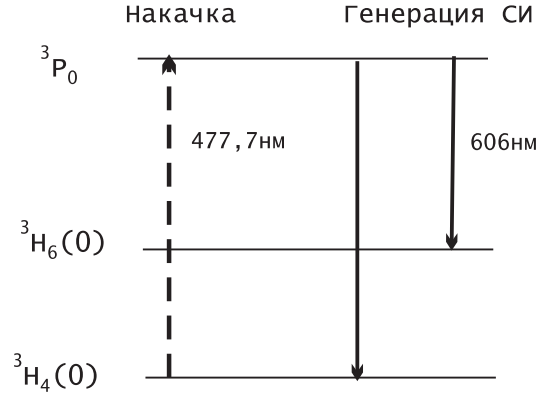


Рис. 6. Схема энергетических уровней и разрешенных переходов в эксперименте по наблюдению СИ на ионах Pr^{3+} в LaF_3

с экспериментальными данными Р. Флориана и других ученых возможно только на качественном уровне.

В эксперименте В.В. Самарцева с соавторами [22] использовались иглообразные кристаллы LaF_3 , легированные ионами Pr^{3+} , при температуре 2,2 К. Диаграмма энергетических уровней ионов Pr^{3+} , использованных в эксперименте, показана на рис. 6. Ионы Pr^{3+} возбуждались импульсом лазерной накачки с длиной волны 477,7 нм и длительностью 10 нс. Для импульсов накачки с мощностью, большей определенного порога ($\sim 10 \text{ kW}$), в системе возникали сигналы СИ (голубого цвета) на переходе ${}^3\text{P}_0 \rightarrow {}^3\text{H}_4(0)$ с длиной волны 477,7 нм, длительностью 10–12 нс и временем задержки 12–15 нс. Для исследуемого случая параметры системы были следующие: $T_1 = 4,7 \cdot 10^{-5} \text{ с}$, $T_2 = 4,3 \cdot 10^{-7} \text{ с}$, $L = 0,8 \text{ см}$, $S = 3 \cdot 10^{-4} \text{ см}$. Для мощности 10 kW число возбужденных атомов N было порядка 10^{10} (общее число примесных ионов в образце составляло примерно 10^{14} частиц). Используя формулу $\tau_R = 8\pi T_1 S / (3N\lambda^2)$, получаем для τ_R значение порядка 5 нс. При возрастании мощности импульса накачки до 30–40 kW, наблюдался второй импульс СИ (оранжевого цвета) на переходе ${}^3\text{P}_0 \rightarrow {}^3\text{H}_6(0)$ с длиной волны 606 нм и временем задержки 30 нс по отношению к импульсу накачки. В работах [22] не приведено значение числа возбужденных примесных ионов в режиме двухцветного СИ. Оценим его по имеющимся данным для мощности импульса накачки в 30 kW как $N = 3 \cdot 10^{10}$. Тогда время СИ для перехода с длиной волны 477,7 нм оцениваем в 1,7 нс, а для перехода с длиной волны 606 нм — в 1 нс. Ширина первого импульса около 10 нс, второго — около 8 нс. Таким образом для первого импульса ширина составляет примерно $6 \tau_{R13}$, а для второго импульса — $8 \tau_{R23}$, т.е. в обоих случаях экспериментальная ширина превосходит теоретическую ширину импульса, получаемую в рамках стандартного расщепления [9]. Время задержки второго импульса на переходе 606 нм сравним с теоретическим значением, предсказываемым теорией "чистого" СИ. Уменьшение времени задержки первого импульса на переходе 477,7 нм может быть связано с наличием неоднородного уширения на этом переходе, сравнимого с временем СИ, а также с наведением накачкой атомной когерентности на переходе ${}^3\text{P}_0 \rightarrow {}^3\text{H}_4(0)$. Наличие атомной когерентности можем приводить к заметному сокращению времени задержки СИ [46].

Таким образом, из-за невыполнения на первом переходе условий "чистого" СИ

мы ограничимся при интерпретации указанного эксперимента сравнением теоретического и экспериментального значения ширины импульсов СИ.

Эксперименты М. Ашиды с соавторами по наблюдению двухцветного СИ на примесных центрах O_2^- в кристаллах КВг и схожи с экспериментами Р. Флориана и других исследователей, поэтому подробно на их рассмотрении мы останавливаться не будем.

Анализ экспериментальных данных показывает, что квантовая теория излучения примесных ионов O_2^- в кристаллах КСл и примесных ионов R_1^{3+} в кристаллах LaF_3 режиме двухцветного СИ может быть построена на основе трехуровневой модели излучателя с разрешенными переходами Λ -типа. При этом, как и в двухуровневом случае, для улучшения согласия между теоретическими и экспериментальными значениями ширин импульсов СИ представляется целесообразным использовать новое расщепление для трехчастичных атомных корреляторов (27).

Для трехуровневой системы с разрешенными переходами Λ -типа система кинетических уравнений (28) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{1}{\tau_{13}}(1 - X_1 - X_2) + \frac{1}{\tau_{R13}}F^{(13)}, \\ \dot{X}_2 &= \frac{1}{\tau_{23}}(1 - X_1 - X_2) + \frac{1}{\tau_{R23}}F^{(23)}, \\ \dot{X}_3 &= -\dot{X}_1 - \dot{X}_2, \\ \dot{F}^{(13)} &= \frac{1}{\tau_{R13}}(1 - 2X_1 - X_2)(F^{(13)} + N^{-1}(1 - X_1 - X_2)) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{13}}F^{(13)} - \frac{1}{\tau_{R13}}(\alpha'_3 - \alpha_3)(F^{(13)})^2, \\ \dot{F}^{(23)} &= \frac{1}{\tau_{R23}}(1 - 2X_2 - X_1)(F^{(23)} + N^{-1}(1 - X_1 - X_2)) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{23}}F^{(23)} - \frac{1}{\tau_{R23}}(\alpha'_2 - \alpha_2)(F^{(23)})^2.\end{aligned}\tag{30}$$

Решение уравнений (30) позволяет также найти временную зависимость интенсивностей сверхизлучения на переходах 3-1 и 3-2. Действительно, из закона сохранения энергии для интенсивностей имеем:

$$I_{31}(t) = \hbar \omega_{31} \langle \dot{R}_{11}(t) \rangle, \tag{31}$$

$$I_{32}(t) = \hbar \omega_{31} \langle \dot{R}_{22}(t) \rangle. \tag{32}$$

На рис. 7 показаны зависимости относительных интенсивностей сверхизлучения $J_1(t) = I_{31}(t)/(\hbar \omega_{13} N^2)$ и $J_2(t) = I_{32}(t)/(\hbar \omega_{23} N^2)$, полученные на основе численного решения уравнений (30)–(31) для трехуровневой модели Λ -типа с параметрами, взятыми из эксперимента В.В. Самарцева с соавторами: $N = 10^{10}$, $\tau_{R13}/\tau_{13} = 3,6 \cdot 10^{-5}$ (время на рисунке измеряется в относительных единицах t/τ_{R13}) [22]. Для качественного анализа поведения модели мы выбрали для отношения $\gamma = \tau_{R23}/\tau_{R13} = 1,05$. Экспериментальное значение величины γ равно примерно 1,7. Однако для трехуровневой модели Λ -типа в квантовой теории "чистого" СИ наблюдается сильная конкуренция излучающих переходов. Для величины $\gamma > 1.1$ коллективное излучение на первом переходе полностью подавляется. Этот результат согласуется с возникновением сильной корреляции между параметрами импульсов СИ, обнаруженной в экспериментах Р. Флориана с соавторами [18, 19]. Выше было высказано предположение, что в условиях реального эксперимента распад по первому каналу может ускоряться за счет наличия неоднородного уширения.

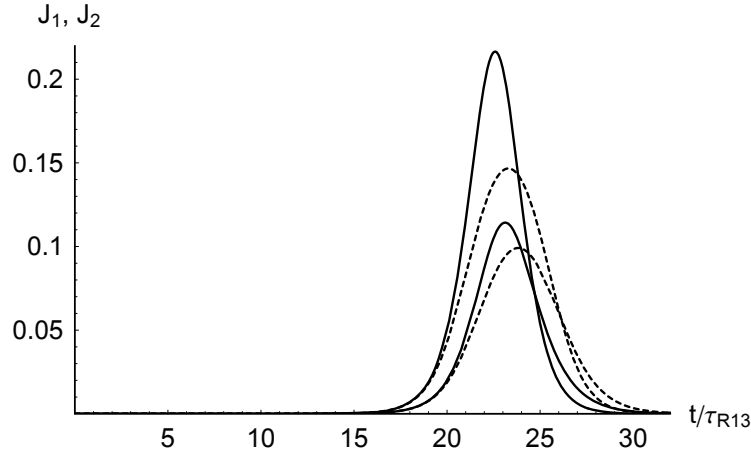


Рис. 7. Временная зависимость интенсивности СИ для трехуровневой модели Λ – типа. Сплошные кривые соответствуют стандартной, а штриховые – модифицированной модели с $n = m = 4$

Сплошные кривые на рис. 7 соответствуют решению уравнений (30)–(32) для стандартного расщепления, штриховые кривые — для модифицированного расщепления (27) при $n = m = 4$. Для каждого случая верхняя кривая соответствует переходу 2–3, нижняя кривая — переходу 1–3. Используя временные зависимости интенсивностей СИ для модифицированной квантовой модели с $n = m = 4$, представленные на Рис. 7, можно легко оценить теоретические значения длительностей импульсов СИ на обоих переходах. В абсолютных временных единицах длительность импульсов составляет 8–9 нс, что находится в хорошем согласии с экспериментальными данными, представленными в работе [22]. Количественное сравнение времен задержки и отношения максимальных интенсивностей для импульсов невозможно, так как использованная теоретическая модель не учитывает неоднородного уширения для перехода с длиной волны 477,7 нм, которое, как представляется, сравнимо с временем СИ на указанном переходе.

3. Квантовая теория каскадного СИ в трехуровневых системах лестничного типа

Первые эксперименты в области каскадооптического СИ были поставлены Д. Окадой с соавторами [46] в парах атомарного лития и Б. Гроссом с соавторами [47] в парах атомарного натрия. В экспериментах Окады и других ученых для накачки использовался двухфотонный переход между уровнями $2^2S_{1/2}$ и $3^2S_{1/2}$ (см. рис. 8). Длина волны импульса накачки рубинового лазера длительностью примерно 30 пс составляла 734,9 нс. В дальнейшем наблюдалось СИ на переходах: $3S$ – $2P$ с длиной волны 812,6 нс и $2P$ – $3S$ с длиной волны 670,8 нс как в прямом (по отношению к направлению распространения импульса накачки), так и в обратном направлениях. В проведенных экспериментах примерно половина активных атомов инвертировалась накачкой на возбужденный уровень $3S$. При этом отмечалось, что СИ в прямом направлении подавляется двухфотонной когерентностью.

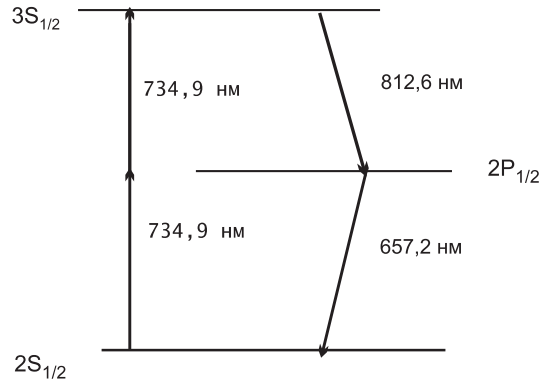


Рис. 8. Схема энергетических уровней и разрешенных переходов в эксперименте по наблюдению СИ в парах Li

При малых инверсиях, когда реализуется возбужденное суперпозиционное полностью когерентное атомное состояние, каскадная эмиссия в прямом направлении не возникает, так как поляризации верхнего и нижнего перехода связаны деструктивно. Она начинает расти, после того как суперпозиционное состояние дефазировуется благодаря неоднородному уширению. В эксперименте отсутствовало время задержки между импульсами СИ и импульсом накачки. Авторы объяснили этот факт тем, что излучение исследуемой системы происходит в пограничном режиме между СИ и усилением спонтанного излучения (реализуется при условии $T_2^* > \tau_R$).

Чисто каскадный режим СИ впервые удалось наблюдать в экспериментах Б. Гросса с соавторами [47] в газообразном Na. На рис. 9 показана схема энергетических уровней, использованных для наблюдения каскадного СИ. Накачка системы на уровень $5S_{1/2}$ осуществлялась двумя импульсами с длинами волн 0,589 мкм и 0,616 мкм и длительностью примерно 2 нс. Активная область с парообразным Na имела вид цилиндрической ячейки длиной 14 см и диаметром менее 1 мм. Импульсы накачки переводили примерно четвертую часть атомов в активном объеме в возбужденное состояние $5S$. Путем изменения интенсивности импульсов накачки в эксперименте можно было обеспечить выполнение условия (4) для генерации СИ на переходах: $5S-4P$, $4P-4S$, $4P-3D$, $4S-3P$ и $3D-3P$. На рис. 10 показаны временные зависимости относительных интенсивностей каскадного СИ на переходах: $5S-4P$ (длина волны излучения 3,41 мкм) и $4P-4S$ (длина волны излучения 2,21 мкм), когда условие СИ (4) для пороговой плотности числа излучателей выполняется для этих двух переходов ($n \approx 6 \times 10^9 \text{ см}^{-3}$). При этом число инвертированных атомов составляет порядка 10^8 . Первый импульс СИ с длиной волны 3,41 мкм имел время задержки в несколько нс (наибольшее наблюдаемое значение — 7 нс) по сравнению со вторым импульсом накачки, а второй импульс СИ — время задержки около 10 нс по отношению к первому импульсу СИ. Времена спонтанного излучения для переходов $5S-4P$ и $4P-4S$ составляли примерно 400 и 170 нс, соответственно. Время неоднородного уширения для верхнего перехода равно 1,7 нс, для нижнего перехода — 1,1 нс. Ширина первого импульса (для верхнего перехода) порядка 2,5 нс, а второго импульса — более 4 нс. Времена СИ для указанных переходов составляли примерно 1 нс (около 0,7 нс — для перехода $5S-4P_{3/2}$, 1,3 нс — для перехода $5S-4P_{1/2}$ и 0,8 нс — для перехода $4P-4S$). Поскольку на нижнем пе-

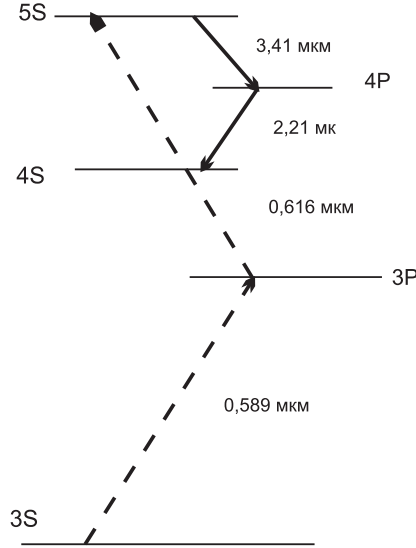


Рис. 9. Схема энергетических уровней и разрешенных переходов в эксперименте по наблюдению СИ в парах Na

регоде реализуется одноимпульсный режим СИ, удобно проводить сравнение теоретических и экспериментальных данных именно для указанного перехода. Экспериментальная ширина второго импульса составляет более $5\tau_R$, в то время как теоретическая ширина того же импульса, предсказываемая стандартной квантовой теорией среднего поля, составляет менее $4\tau_R$ [34]. Для улучшения согласия между предсказаниями квантовой теории среднего поля и экспериментом для ширины второго импульса СИ, как и в предыдущих случаях, мы будем использовать модифицированное расщепление трехчастичных атомных корреляторов.

Чисто каскадный режим СИ удалось также реализовать в экспериментах Р. Кулины с соавторами на ридберговских атомах Ba в резонаторе [48].

В дальнейшем экспериментальные исследования каскадного СИ в парах Cs и Rb были продолжены в ряде работ С. Хартмана с соавторами [49, 50]. Упрощенная схема использованных в эксперименте энергетических уровней для Cs показана на рис. 11. В эксперименте короткий лазерный импульс длительностью примерно 10 пс с длиной волны 885 нм обеспечивал двухфотонный переход из состояния $6S_{1/2}$ в состояние $6D_{3/2}$. Импульсы накачки фокусировались до диаметра 80 мкм на ячейке с Cs длиной 1 см, что обеспечивало значение числа Френеля для длины волны, соответствующей верхнему переходу, примерно равное единице. Атомные плотности в эксперименте менялись от $1.7 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$ до $5.4 \cdot 10^{13} \text{ см}^{-3}$. Время спонтанного излучения и неоднородное уширение для верхнего перехода составляли 79 нс и 1 нс соответственно. Цель эксперимента состояла в том, чтобы создать суперпозиционное состояние на переходе $6S_{1/2}$ – $6D_{3/2}$:

$$|\Psi\rangle = ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |6D\rangle + \cos \frac{\theta}{2} |6S\rangle,$$

где ϕ — оптическая фаза и θ — площадь импульса накачки, и полностью инвертированный переход $6D_{3/2}$ – $6P_{1/2}$. Заметим, что понятие площади импульса накачки может быть строго введено и для двухфотонного процесса при наличии квазирезонансного энергетического уровня между основным и возбужденным уровнями

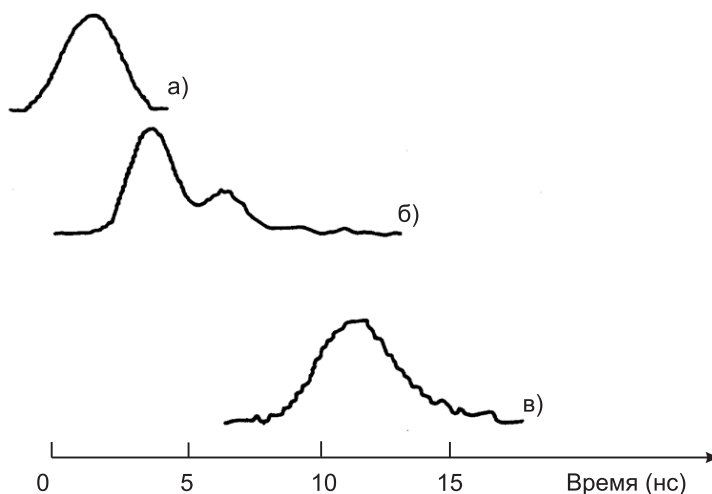


Рис. 10. Временные зависимости относительных интенсивностей в экспериментах с паробразным Na для: а) импульса накачки, б) импульса СИ на верхнем переходе и в) импульса СИ на нижнем переходе

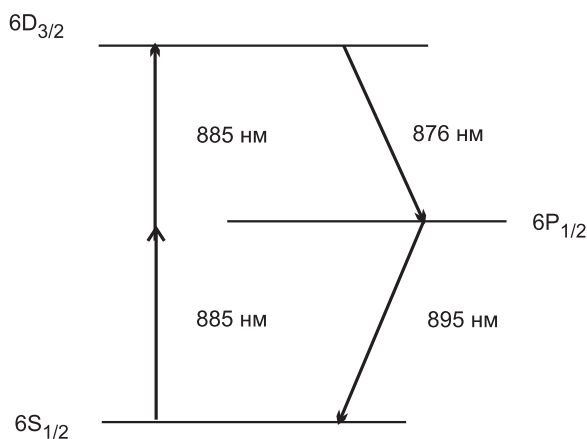


Рис. 11. Схема энергетических уровней и разрешенных переходов в эксперименте по наблюдению каскадного СИ в Cs

(в нашем случае — это уровень $6P$) [51]. Было проведено два эксперимента для чисел фотонов в импульсе накачки $5 \cdot 10^{10}$ и $1 \cdot 10^{11}$. Для первого эксперимента импульсы СИ в прямом направлении наблюдались как для верхнего, так и для нижнего перехода, в обратном направлении наблюдался только импульс СИ на верхнем переходе. Импульс СИ для верхнего перехода в прямом направлении имел задержку порядка 0.5 нс по сравнению с импульсом в обратном направлении и был примерно в 10 раз слабее по интенсивности. Для прямого направления импульсы на верхнем и нижнем переходах появлялись почти одновременно. Авторы дают следующее объяснение такого поведения импульсов СИ. Излучение с верхнего уровня создает макроскопический дипольный момент на верхнем переходе, который, за счет наличия связи с двухфотонной атомной когерентностью, одно-

временно индуцирует дипольный момент на нижнем переходе. Последний момент излучает когерентно в прямом направлении, эффективно опустошая населенность промежуточного уровня, что в свою очередь замедляет увеличение дипольного момента на верхнем переходе. Для обратного направления двухфотонная когерентность не влияет на процесс развития СИ на нижнем переходе, так как индуцированный дипольный момент на нижнем переходе обладает большой фазовой расстройкой относительно когерентности, возникающей на этом переходе. В этом случае излучение на нижнем переходе интерферирует деструктивно в образце, и опустошение промежуточного уровня мало. Таким образом, СИ в обратном направлении на верхнем переходе ведет себя так же, как для чисто двухуровневой системы. Поясним сказанное, используя простые формулы [51]. Пусть импульс накачки создал когерентную суперпозицию основного и верхнего уровней:

$$|\Psi\rangle = A |6P\rangle + C e^{i\vec{k}_{sd}\vec{r}} |6D\rangle,$$

где $\vec{k}_{sd}$ — волновой вектор когерентной суперпозиции. СИ на верхнем переходе когерентно населяет промежуточный уровень 6P, индуцируя автоматически макроскопический дипольный момент между уровнями 6S и 6P. Состояние излучателя при этом:

$$|\Psi'\rangle = A |6P\rangle + C' e^{i\vec{k}_0\vec{r}} |6D\rangle + B' e^{i(\vec{k}_{sd}-\vec{k}_{pd})\vec{r}} |6P\rangle.$$

Если импульс СИ испускается в прямом направлении, т.е. коллинеарен лазерному пучку ($\vec{k}_{pd} \parallel \vec{k}_{sd}$), тогда когерентная суперпозиция между 6P и 6D фазосогласована:

$$|\vec{k}_{sd} - \vec{k}_{pd}| = |\vec{k}_{sd}| - |\vec{k}_{pd}| = \omega_{sp}/c,$$

где ω_{sp} — оптическая частота между уровнями 6S и 6P. Макроскопический дипольный момент, связанный с этой суперпозицией, будет когерентно испускать электромагнитное поле в направлении импульса накачки. Для СИ в обратном направлении когерентная суперпозиция между 6P и 6D фазнесогласована:

$$|\vec{k}_{sd} - \vec{k}_{pd}| = |\vec{k}_{sd}| + |\vec{k}_{pd}| = (\omega_{sd} + \omega_{pd})/c,$$

и СИ на нижнем переходе отсутствует. Эффект двухфотонной когерентности приводит для верхнего перехода к задержке импульса СИ в прямом направлении по сравнению с обратным и генерации СИ на нижнем переходе практически одновременно с верхним переходом. СИ на нижнем переходе в обратном направлении может возникнуть только при заметном опустошении основного уровня, по крайней мере, на 50 %. В этом случае возможно чисто каскадное СИ для излучения в обратном направлении, при этом излучение на нижнем переходе возникает с задержкой по отношению к СИ на верхнем переходе. Каскадное СИ для излучения на обратном переходе наблюдалось в эксперименте при использовании накачки, содержащей $1 \cdot 10^{11}$ фотонов. В этом случае увеличивалась инверсия между верхним и основным уровнем и, соответственно, уменьшалась двухфотонная атомная когерентность между этими уровнями. В этом случае на временах порядка времени неоднородного уширения 0.5 нс происходила дефазировка начальной когерентности. В результате исчезало различие между начальным когерентным и некогерентным приготовлением состояния излучателя для СИ в обратном направлении, что и приводило к реализации чистого каскадного СИ для этого направления. Число возбужденных атомов для второго случая было порядка 10^{11} . В рамках квантовой теории среднего поля мы не можем описать эффекты распространения импульса СИ, поэтому рассмотрим значения параметров импульсов только в режиме чистого каскадного СИ в направлении обратном направлению

распространения импульса накачки. Экспериментальные ширины импульсов СИ для верхнего и нижнего перехода составляют примерно 1 нс, время задержки второго импульса относительно первого — несколько нс (максимально до 5 нс). Время спонтанного излучения для верхнего перехода составляет примерно 80 нс. Тогда, используя указанные выше значения параметров установки, находим, что время СИ для верхнего перехода приблизительно равно $4 \cdot 10^{-5}$ нс. Таким образом, экспериментальная ширина импульса СИ примерно в 10^4 превосходит время СИ (ширина импульса для "чистого" СИ равна нескольким временам СИ). Это означает, что в рассматриваемом случае, как и в эксперименте Р. Флориана с соавторами [18], не выполнены условия "чистого" СИ. Поэтому сравнение теоретических расчетов, полученных на основе развиваемой нами квантовой теории, с данными экспериментов по каскадному СИ в Cs возможно только на качественном уровне.

Перейдем к теоретическому описанию чистого каскадного СИ в трехуровневых системах Ξ -типа. Для рассматриваемой трехуровневой системы кинетические уравнения (28) примут вид:

$$\begin{aligned}\dot{X}_1 &= \frac{1}{\tau_{12}}(1 - X_1 - X_3) + \frac{1}{\tau_{R12}}F^{(13)}, \\ \dot{X}_3 &= -\frac{1}{\tau_{23}}(2X_3 + X_1 - 1) - \frac{1}{\tau_{R23}}F^{(23)}, \\ \dot{X}_2 &= -\dot{X}_1 - \dot{X}_3, \\ \dot{F}^{(12)} &= \frac{1}{\tau_{R12}}(1 - 2X_1 - X_3)(F^{(13)} + N^{-1}(1 - X_1 - X_3)) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{13}}F^{(13)} - \frac{1}{\tau_{R13}}(\alpha'_3 - \alpha_3)(F^{(13)})^2, \\ \dot{F}^{(23)} &= \frac{1}{\tau_{R23}}(2X_3 + X_1 - 1)(F^{(23)} + N^{-1}X_3) - \\ &\quad - \frac{1}{\tau_{23}}F^{(23)} - \frac{1}{\tau_{R23}}(\alpha'_2 - \alpha_2)(F^{(23)})^2, \\ (\alpha'_2 - \alpha_2) &= m(2X_3 + X_1 - 1), \quad (\alpha'_3 - \alpha_3) = k(X_3 - X_1).\end{aligned}\tag{33}$$

Решение уравнений (33) позволяет также найти временную зависимость интенсивностей сверхизлучения на переходах 3–2 и 2–1. Действительно, из закона сохранения энергии для интенсивностей имеем

$$I_{23}(t) = -\hbar \omega_{23} \langle \dot{R}_{33}(t) \rangle = -\hbar \omega_{23} N \dot{X}_3,\tag{34}$$

$$I_{12}(t) = \hbar \omega_{12} \langle \dot{R}_{11}(t) \rangle = \hbar \omega_{12} N \dot{X}_1.\tag{35}$$

Численное решение уравнений (33)–(35) проводилось для значений параметров, взятых из работы [47]: $N = 10^8$, $\tau_{R12}/\tau_{23} = 0.02$, $\tau_{R12}/\tau_{23} = 0.05$, $\tau_{R12}/\tau_{23} = 1.25$. Поскольку длительность импульса накачки $\tau_p = 2$ нс сравнима с временем СИ на верхнем переходе $\tau_{R23} \approx 1$ нс, в конце процесса накачки, как и в двухуровневом случае, на верхнем переходе возникает отличная от нуля макроскопическая поляризация. Учесть влияния процессов накачки на СИ мы можем, выбрав в начальное условие для величины $F^{(23)}$ в виде [39]:

$$F^{(23)} = N^{-1} \exp \left\{ \frac{\tau_p}{4\tau_{R23}} - \frac{\sin(\omega_R \tau_p/2)}{2\tau_{R23}\omega_R} \right\} \sin \frac{\omega_R \tau_p}{2},$$

где ω_R — частота Раби для второго импульса накачки. Для π импульса накачки получаем: $F^{(23)} = 3,5 \times 10^{-9}$.

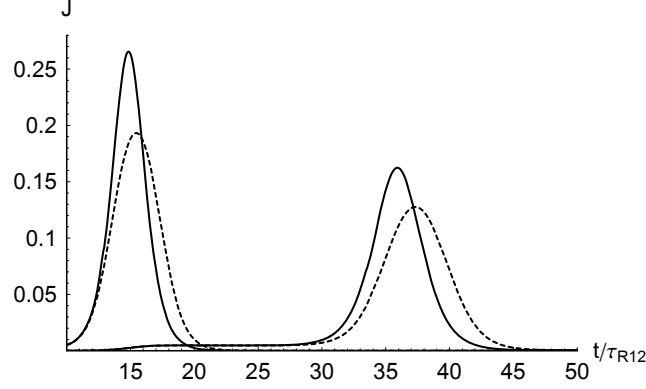


Рис. 12. Временная зависимость относительных интенсивностей для каскадного СИ. Сплошная линия соответствует стандартной модели, точечная — модифицированной с $m = k = 3$

На рис. 12 показаны временные зависимости относительных интенсивностей СИ на верхнем и нижнем переходах при использовании стандартного расщепления (сплошные линии) и модифицированного расщепления для параметров $m = k = 3$. Полученные графики находятся в хорошем качественном соответствии с экспериментальными кривыми для чистого каскадного СИ, полученными в работе [47], а также в работах [49, 50]. Мы можем также провести количественное сравнение теоретического значения ширины импульса СИ на втором переходе с ее экспериментальным значением для эксперимента М. Гросса с соавторами [47], так как именно для нижнего перехода в этом эксперименте наблюдалось одноимпульсное СИ. Оценивая указанную величину с помощью рис. 12 мы получаем, что ее значение составляет примерно $5\tau_{R12}$, что совпадает с экспериментальным значением. Теоретическое значение ширины импульса на верхнем переходе также мало отличается от экспериментального. Наименьшее количественное согласие между теорией и экспериментом имеет место для времен задержек импульсов СИ. В эксперименте максимальное время задержки первого импульса по отношению ко второму импульсу накачки составляло $9\tau_{R12}$, а между импульсами — $13\tau_{R12}$ (в экспериментах Хартмана и с соавторами время задержки для первого импульса чистого каскадного СИ в направлении, обратном направлению распространения импульса вообще отсутствовало). Теоретические значения времен задержки для рассматриваемой квантовой модели каскадного СИ примерно в два раза больше экспериментальных значений, полученных в опытах М. Гросса с соавторами. Указанное несоответствие можно объяснить тем, что для указанного эксперимента не выполнялось одно из важных условий "чистого" СИ: $T_2^* < \tau_R$. В этом случае излучение происходит в пограничном режиме между СИ и усилением спонтанного излучения, что может привести к заметному сокращению времени задержки для импульсов СИ на верхнем и нижнем переходах [45].

Таким образом, в настоящей работе на основе метода исключения бозонных переменных построена квантовая теория СИ среднего поля в двух- и трехуровневых макроскопических системах, взаимодействующих с квантовыми электромагнитными полями. Использование нового подхода в квантовой теории СИ позволило значительно улучшить согласие теоретических предсказаний для ширины свертхизлучательного импульса с экспериментальными данными.

Заключение

Автор благодарит С.Н. Андрианова, Н.Н. Боголюбова(мл.), А.В. Горохова, В.Л. Дербова, С.В. Петрушкина, В.В. Самарцева, Ле Киена Фам, А.С. Шумовского, В.И. Юкалова за многочисленные обсуждения различных аспектов квантовой теории СИ.

Литература

- [1] Dicke, R.H. Coherence in spontaneous radiation processes / R.H. Dicke // Phys. Rev. 1954. V. 93. №1 С. 99–110.
- [2] Электромагнитное сверхизлучение / под ред. В.А. Голенищева-Кутузова, В.В. Самарцева. Казань: Татполиграф. 1975. 427 с.
- [3] Аллен, Л. Оптический резонанс и двухуровневые атомы / Л. Аллен, Дж. Эберли. М.: Мир. 1978. 224 с.
- [4] Андреев, А.В. Коллективное спонтанное излучение (сверхизлучение Дике) / А.В. Андреев, В.И. Емельянов, Ю.А. Ильинский // УФН. 1980. Т. 131. Вып. 4 С. 653–694.
- [5] Теория кооперативных когерентных эффектов в излучении / под ред. Е.Д. Трифонова, А.С. Трошина, Г.М. Недялковой. Л.: Ленингр. пед. институт, 1980. 98 с.
- [6] Gross, M. Superradiance: An essay on the theory of collective spontaneous emission / M. Gross, S. Haroche // Phys. Repts. 1982. V. 93. №5 P. 301–396.
- [7] Когерентная спектроскопия молекулярных кристаллов / Ю.В. Набойкин [и др.]. Киев: Наукова Думка, 1986. 204 с.
- [8] Боголюбов, Н.Н.(мл.) Сверхизлучение / Н.Н. Боголюбов(мл.), А.С. Шумовский. Дубна: ОИЯИ Р17-87-176, 1987. 85 с.
- [9] Андреев, А.В. Кооперативные явления в оптике / А.В. Андреев, В.И. Емельянов, Ю.А. Ильинский. М.: Наука, 1988. 288 с.
- [10] Желязняков, В.В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах / В.В. Желязняков, В.В. Кочаровский, Вл.В. Кочаровский // УФН. 1989. Т. 159. Вып. 2, С. 193–260.
- [11] Андреев, А.В. Оптическое сверхизлучение: Новые идеи и новые эксперименты / А.В. Андреев // УФН. 1990. Т. 160. Вып. 12 С. 1–60.
- [12] Benedict, M.G. Superradiance: Multiatomic coherent emission / M.G. Benedict [et al.]. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 1996.
- [13] Меньшиков, Л.И. Сверхизлучение и некоторые родственные явления / Л.И. Меньшиков // УФН. 1999. Т. 169. Вып. 4 С. 113–154.
- [14] Андрианов, С.Н.. Оптическое сверхизлучение и лазерное охлаждение в твердых телах / С.Н. Андрианов, В.В. Самарцев. Казань.: Изд-во Казанского гос ун-та, 1988. 131 с.
- [15] Калачев, А.А. Когерентные явления в оптике / А.А. Калачев, В.В. Самарцев. Казань.: Изд-во Казанского ГУ, 2003. 281 с.
- [16] Yukalov, V.I. Coherent nuclear radiation / V.I. Yukalov, E.P. Yukalova // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35. Вып. 3. С. 640–708.
- [17] Observation of Dicke superradiance in optically pumped HF gas / N. Scribanivitz [et al.] // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. No. 8. P. 309–312.

- [18] Florian, R. Superradiance and high-gain mirror-less laser activity of O_2^- centers in KCl / R. Florian, L.O. Schwan, D. Schmid // Solid State Commun. 1982. V. 42. P. 55–57.
- [19] Florian, R. Time-resolving experiments on Dicke superfluorescence of O_2^- centers in KCl. two-color superfluorescence / R. Florian, L.O. Schwan, D. Schmid // Phys. Rev. 1984. V. A29. No. 5. P. 2709–2715.
- [20] Сверхизлучение в кристалле дифенила с пиреном / П.В. Зиновьев [и др.] // ЖЭТФ. 1983. V. 85. P. 1945–1952.
- [21] Superfluorescence from O_2^- molecules in alkali halide crystals / M. Ashida [et al.] // J. Luminiscence. 1996. V. 66–67. P. 259–263.
- [22] Оптическое сверхизлучение в кристалле $LaF_3:Pr^{3+}$ / В.А. Зуйков [и др.] // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. № 7. С. 629–631; Laser Phys. 1999. V. 9. No. 4. P. 1–4.
- [23] The spectral characteristics of superfluorescence in rare-earth-doped silica fibres / F. Gan [et al.] // Pure Appl. Opt. 1993. V. 2. P. 359–365.
- [24] Greiner, G. Superradiant emission dynamics of the optically thin material sample in a short-decay-time optical cavity / G. Greiner, B. Boggs, T.W. Mossberg // Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. №18. P. 3793–3796.
- [25] Evidence for superradiant decay of excitons in InAs quantum sheets/ O. Brandt [et al.] // Phys. Rev. 1992. V. A45. No. 7. P. 3803–3806.
- [26] Сверхизлучение в полупроводниках / С.В. Зайцев [и др.] // Физика и техника полупр. 1999. Т. 33. Вып. 12. С. 1456–1461.
- [27] Сверхизлучение в квантовых гетероструктурах / А.И. Климовская [и др.] // Физика и техника полупр. 2003. Т. 33. Вып. 12. С. 1456–1461.
- [28] Properties of two-photon fluorescence and superradiance of new organic dye $C_{46}H_{51}N_2B$ / G. Zhou [et al.] // Eur. Phys. Lett. 2000. V. D19. P. 389–393.
- [29] Gibbs, H.M. Single-pulse superfluorescence in cesium / H.M. Gibbs, Q.H.F. Vrehen, H.M.J. Hikspoors // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 39. No. 9. P. 547–550.
- [30] Bonifacio, R. Quantum statistical theory of superradiance. I,II / R. Bonifacio, P. Schwendimann, F. Haake // Phys. Rev. 1971. V. A4. No. 1. P. 302–313; No. 3. P. 854–864.
- [31] Башкиров, Е.К. Расщепление многочастичных корреляторов в квантовой теории сверхизлучения / Е.К. Башкиров // Известия РАН. Серия Физическая. 1998. Т. 62. №2. С. 327–322.
- [32] Башкиров, Е.К. Метод исключения бозонных переменных в теории сверхизлучения / Е.К. Башкиров. Самара: Изд-во СамГУ, 1992. 24 с.
- [33] Сверхизлучательные процессы в трехуровневой системе / Н.Н. Боголюбов (мл.) [и др.] // Сообщение ОИЯИ. P17-84-665. Дубна, 1984. 7 с.
- [34] Генерация сверхизлучения в системе с тремя разрешенными переходами / Н.Н. Боголюбов (мл.) [и др.] // Письма в ЭЧАЯ. 1984. №3. С. 26–32.
- [35] Сверхизлучение в системе с тремя разрешенными переходами / Н.Н. Боголюбов (мл.) [и др.] // Сообщение ОИЯИ. P17-87-837. Дубна. 1984. 7 с.
- [36] Башкиров, Е.К. Динамика сверхизлучательной генерации в сегнетоэлектриках / Е.К. Башкиров, А.С. Шумовский, В.И. Юкалов // ДАН СССР. Т. 282. №2. С. 300–303.
- [37] Динамика сверхизлучательных процессов в двухуровневых макроскопических системах в кристалле / Н.Н. Боголюбов (мл.) [и др.] // Теоретическая и математическая физика. 1987. Т. 70. №3. С. 454–461.

- [38] Bashkirov, E.K. Dynamics of phonon mode in superradiance regime of laser cooling of crystals / E.K. Bashkirov // *Phys. Lett.* 2005. V. A341. P. 345–351.
- [39] Superradiance allowing for the pumping processes / N.N. Bogolubov (Jr.) [et al.] // *Physica*. 1985. V. 133A. P. 413–424.
- [40] Башкиров, Е.К. Сверхизлучение в трехуровневых системах с учетом когерентной накачки / Е.К. Башкиров // *Известия РАН. Серия Физическая*. 2000. Т. 64. №10. С. 1920–1923.
- [41] Боголюбов, Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с бозонным полем / Н.Н. Боголюбов, Н.Н. Боголюбов (мл.) // *ЭЧАЯ*. 1980. Т. 11. Вып. 2. С. 245–300.
- [42] Samartsev, V.V. Dicke superradiance in a biphenyl crystal doped with pyrene molecules and the possibility of this phenomenon in a gamma range / V.V. Samartsev // *Hyperfine Interact.* 1997. V. 107. P. 359–367.
- [43] Рудой, Ю.Г. Современное состояние метода двухвременных функций грин в квантовой теории магнетизма / Ю.Г. Рудой. *Статистическая физика и квантовая теория поля*. М.: Наука, 1973. С.97–164.
- [44] Schwendimann, P. Damping effects in two-colour superfluorescence / P. Schwendimann // *Optica Acta*. 1984. V. 31. No. 1. P. 107–114.
- [45] Transition from superfluorescence to amplified spontaneous emission / M.S. Malcuit [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 1987. V. 59. No. 11. P. 1189–1192.
- [46] Cooperative cascade emission / J. Okada [et al.] // *Opt. Commun.* 1978. V. 28. No. 2. P. 189–192.
- [47] Observation of near-infrared Dicke superradiance on cascading transitions in atomic sodium / M. Gross [et al.] // *Phys. Rev. Lett.* 1976. V. 36. No. 17. P. 1035–1038.
- [48] Kulina, R. Collective emission of Ba atoms in a resonant cavity / R. Kulina, C. Leonard, R.-H. Rinkleff // *Phys. Rev.* 1986. V. 34. No. 1. P. 227–230.
- [49] Brownell, J.H. Yoked superfluorescence / J.H. Brownell, X. Lu, S.R. Hartman // *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75. No. 18. P. 3265–3268.
- [50] Lu, X. Cooperative superfluorescence and time delayed 2nd harmonic generation / X. Lu, J.H. Brownell, S.R. Hartman // *Prog. Crystal Growth and Charact.* 1996. V. 33. P. 311–318.
- [51] Lvovsky, A.I. Omnidirectional superfluorescence transitions: Thesis Ph.D. / A.I. Lvovsky. Columbia University, 1998.

Поступила в редакцию 13/I/2006;
в окончательном варианте — 13/I/2006.

QUANTUM THEORY OF SUPERRADIANCE. PART I³

© 2006 E.K. Bashkirov⁴

The quantum theory of superradiance in the two- and three-level macroscopic system interacting with electromagnetic fields based on the method of boson variables elimination is developed.

Paper received 13/I/2006.

Paper accepted 13/I/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A.Saleev.

⁴Bashkirov Eugene Konstantinovich (bash@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Метод исключения бозонных переменных Боголюбова-Боголюбова (мл.)

Рассмотрим произвольную динамическую систему A , взаимодействующую с бозонным полем F . Пусть полный гамильтониан системы $(A + F)$ имеет вид:

$$H = H_A + H_F + H_{AF}, \quad (\text{П1})$$

где H_A — собственный гамильтониан системы A ,

$$H_F = \sum_k \hbar \omega_k a_k^+ a_k$$

— гамильтониан свободного бозонного поля F и

$$H_{AF} = \sum_k \{C_k(A) a_k + C_k^+(A) a_k^+\}$$

— гамильтониан взаимодействия системы A с бозонным полем. Мы ограничимся рассмотрением гамильтониана взаимодействия, линейного по бозонным переменным. Здесь $a_k^+(a_k)$ — оператор рождения (уничтожения) бозона в состоянии $k \equiv (\vec{k}, \lambda)$, где $\vec{k}$ — волновой вектор бозона и λ — его поляризация, и $C_k(A)$ — операторы, зависящие только от переменных A -подсистемы.

Статистический оператор ρ_t полной системы $(A + F)$ удовлетворяет квантовому уравнению Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = [\rho_t, H]. \quad (\text{П2})$$

Предположим, что взаимодействие подсистемы A с бозонным полем F включается в момент времени t_0 . Тогда начальное условие для уравнения эволюции (П2) можно записать в виде:

$$\rho_{t_0} = \rho_A \otimes \rho_F,$$

где ρ_A и ρ_F — статистические операторы невзаимодействующих подсистем A и F . Начальное состояние бозонного поля выберем в виде равновесного теплового распределения с эффективной температурой $\beta = 1/k_B T$:

$$\rho_F = Q^{-1} e^{-\beta H_F}, \quad Q = \text{Sp} e^{-\beta H_F}.$$

Введем представление Гейзенберга для произвольной динамической величины изучаемой системы

$$G_{AF}(t) = e^{iH/\hbar t} G_{AF} e^{-iH/\hbar t}.$$

Уравнение движения для динамической величины $G_{AF}(t)$:

$$i\hbar \frac{\partial G_{A,F}(t)}{\partial t} = [H, G_{A,F}(t)].$$

В частности, выбирая в качестве G операторы рождения и уничтожения моды бозонного поля k , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_k(t)}{\partial t} &= -i\omega_k a_k(t) - \frac{i}{\hbar} C_k^+(t), \\ \frac{\partial a_k^+(t)}{\partial t} &= i\omega_k a_k(t) + \frac{i}{\hbar} C_k(t). \end{aligned} \quad (\text{П3})$$

Принимая во внимание начальные условия $a_k(t_0) = a_k$, $a_k^+(t_0) = a_k^+$, мы можем записать формальное решение уравнений (П3) в виде

$$\begin{aligned} a_k(t) &= a_k e^{-i\omega_k(t-t_0)} - i\mathcal{B}_k(t), \\ a_k^+(t) &= a_k^+ e^{i\omega_k(t-t_0)} + i\mathcal{B}_k^+(t), \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

где

$$\mathcal{B}_k(t) = \int_{t_0}^t e^{-i\omega_k(t-\tau)} C_k^+(\tau) d\tau.$$

Обозначим через $\mathcal{O}$ произвольный оператор, действующий только на переменные "атомной" подсистемы. Уравнение движения для оператора $\mathcal{O}$ в представлении Гейзенберга имеет вид:

$$i\hbar \frac{\partial \mathcal{O}(t)}{\partial t} = [\mathcal{O}(t), H]. \quad (\text{П5})$$

Совершим в обеих частях уравнения (П5) усреднение по начальному равновесному состоянию системы $\langle \dots \rangle = S p(\dots \rho_{t_0})$. Учитывая явный вид гамильтониана системы (П1) и формальные решения для операторов рождения и уничтожения бозонного поля (П4), получаем уравнение эволюции для среднего значения наблюдаемой $\mathcal{O}$ в виде:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \langle \mathcal{O}(t) \rangle}{\partial t} - \langle [\mathcal{O}, H_A(t)] \rangle &= \\ &= \sum_k \left\{ \langle a_k(t) [\mathcal{O}(t), C_k(t)] \rangle e^{-i\omega_k(t-t_0)} + \langle a_k^+ [\mathcal{O}(t), C_k^+(t)] \rangle e^{-i\omega_k(t-t_0)} \right\} - \\ &- i \sum_k \left\{ \langle \mathcal{B}_k(t) [\mathcal{O}(t), C_k(t)] \rangle - \langle \mathcal{B}_k^+(t) [\mathcal{O}(t), C_k^+(t)] \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П6})$$

Исключим теперь из правой части уравнения (П6) бозонные операторы. С этой целью воспользуемся следующей леммой.

Лемма Боголюбова-Боголюбова (мл.). Пусть $\mathcal{U}$ — произвольный оператор, действующий на переменные (A, F) системы, тогда

$$\begin{aligned} \langle a_k \mathcal{U}(t) \rangle &= (1 + N_k) \langle [a_k, \mathcal{U}(t)] \rangle, \\ \langle a_k^+ \mathcal{U}(t) \rangle &= -N_k \langle [a_k^+, \mathcal{U}(t)] \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

где

$$N_k = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_k} - 1}$$

— равновесное число бозонов в k -ой моде.

Доказательство.

Используя свойства начального состояния (A, F) системы, имеем

$$\langle a_k \mathcal{U}(t) \rangle = S p_{(A, F)} a_k \mathcal{U}(t) \rho_{t_0} = S p_{(F_k)} a_k \left\{ S p_{(A, \bigotimes_{k' \neq k} F_{k'})} \mathcal{U}(t) \rho_A \otimes \prod_{k' \neq k} \rho_{F_{k'}} \right\} \rho_{F_k},$$

где

$$\rho_{F_k} = Q_k^{-1} e^{-\beta \hbar a_k^+ a_k}, \quad Q_k^{-1} = \{1 - e^{-\beta \hbar \omega_k}\}^{-1}.$$

Так как

$$\langle n_k | \rho_{F_k} | n_{k'} \rangle = \delta_{n_k n_{k'}} Q_k^{-1} e^{-\beta \hbar n_k},$$

