УДК 539.374

ГРУППЫ СИММЕТРИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2006 Ю.Н. Радаев[1]

В работе дан групповой анализ системы дифференциальных уравнений в частных производных, представляющей интерес с точки зрения анализа плоского деформированного состояния идеально пластического тела. Система сформулирована относительно изостатической координатной сетки. Вычислены группы симметрий этой системы дифференциальных уравнений и определены инвариантно-групповые решения. Показано, что все инвариантно-групповые решения системы дифференциальных уравнений пластического плоского деформированного состояния вычисляются в элементарных функциях.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Представляемая работа посвящена построению непрерывных групп симметрий дифференциальных уравнений в частных производных плоской задачи теории идеальной пластичности, сформулированных в изостатической системе координат, и нахождению решений, инвариантных относительно указанных групп симметрий.

Вывод уравнений пространственной и осесимметричной задачи теории идеальной пластичности для напряженных состояний, соответствующих ребру призмы Треска, а также уравнений плоского деформированного состояния в координатной сетке линий главных напряжений приведен в работе [1]. В [2, 3] найдены автомодельные решения уравнений осесимметричной задачи и показано, что автомодельная переменная может быть выбрана в форме произведения степеней изостатических координат. Канонические формы соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений найдены в [4]. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности определены в [5]. Инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений осесимметричной задачи исследованы в работе [6].

Общий групповой анализ пространственных уравнений теории идеальной пластичности на ребре призмы Треска, представленных в декартовых координатах, дан в [7. С. 73–77]. Там же приводятся инвариантные и частично-инвариантные решения трехмерных уравнений. Плоская задача изучена лучше, однако поиск

[1]Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

точных решений уравнений плоского деформированного состояния с помощью методов группового анализа по-прежнему остается актуальной задачей[2]. Групповой анализ уравнений пространственной задачи теории идеальной пластичности в изостатических координатах приводится в [8]. Там же построена оптимальная система одномерных подалгебр одной естественной конечномерной подалгебры алгебры симметрий трехмерных уравнений (см. также [9]).

Методы группового анализа применительно к системам дифференциальных уравнений в частных производных изложены в классических монографиях [10, 11]. Оригинальное и компактное изложение теории групп Ли читатель может найти в книге: Журавлев, В.Ф. Прикладные методы в теории колебаний / В.Ф. Журавлев, Д.М. Климов. М.: Наука, 1988. С. 139–198. Теории групп Ли посвящена также известная монография [12]. Одной из основных задач группового анализа систем дифференциальных уравнений является исследование действия допускаемой данной системой дифференциальных уравнений группы на множестве решений этой системы. Допускаемая группа детерминирует алгебраическую структуру на множестве решений, которую можно использовать, в частности, для определения тех классов решений, отыскание которых в каком-либо смысле *проще* по сравнению с построением общего решения.

Групповой анализ исторически развивался как реализация *принципа простоты.* Сущность указанного принципа заключается в том, что уравнения и системы дифференциальных уравнений математической физики должны быть достаточно просты для того, чтобы их можно было анализировать и решать. Групповой анализ выдвигает в качестве критерия простоты условие того, чтобы система дифференциальных уравнений, моделирующая тот или иной физический процесс или состояние, допускала группу с определенными свойствами или, когда по каким-то причинам оказывается невозможным точно указать такие свойства, максимально широкую группу. *Принцип простоты*, понимаемый в расширенном смысле, имеет весьма важные применения в теории нелинейных уравнений с частными производными.[3]

Задача о равновесии тела, напряженное состояние которого соответствует ребру призмы Треска, статически определима, если граничные условия заданы в напряжениях. Уравнения равновесия могут быть формально рассмотрены независимо от кинематических уравнений. Для ребра призмы Треска, определяемого условием $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k$ (σ_1, σ_2, σ_3 — главные нормальные напряжения, k — предел текучести при сдвиге), уравнения равновесия $\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ можно представить в

[2] См., например:

Сенашов, С.И. Двумерная пластичность: симметрии, законы сохранения и точные решения / С.И. Сенашов, А.Н. Яхно // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород: сб. статей, посв. 70-летию проф. Л.В. Ершова; под ред. акад. РАН А.Ю. Ишлинского. М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2001. С. 283–298.

Аннин, Б.Д. Плоская задача идеальной пластичности в области, ограниченной логарифмическими спиралями / Б.Д. Аннин // Проблемы механики неупругих деформаций: сб. статей. К 70-летию Д.Д. Ивлева. М.: Физматлит, 2001. С. 42–46.

[3] Как *принцип простоты* может быть применен к вопросам классификации существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений с частными производными, показано в работах

Радаев, Ю.Н. Об одном принципе классификации уравнений осесимметричной задачи теории пластичности / Ю.Н. Радаев // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №3(37). 2005. С. 43–56;

Радаев, Ю.Н. О t-гиперболичности пространственных уравнений теории пластичности / Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №3(37). 2005. С. 57–71.

форме одного векторного уравнения

$$\operatorname{grad}\sigma_3 \mp 2k\operatorname{div}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \mathbf{0}, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичное векторное поле, имеющее направление главной оси тензора напряжений, соответствующей наибольшему (наименьшему) собственному значению σ_3 тензора напряжений. Уравнение (1.1) принадлежит к гиперболическому типу.

Ключевым для анализа уравнения (1.1) выступает условие расслоенности векторного поля $\mathbf{n}$ в зоне пластического течения.

Для разрешимости уравнения (1.1) необходима расслоенность векторного поля $\mathbf{n}$, т.е. $\mathbf{n}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{n} = 0$, а с расслоенным полем естественным образом связано каноническое преобразование координат (см. [3])

$$x_i = f_i(\omega^1, \omega^2, \omega^3) \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1.2}$$

где ω^j — канонические изостатические координаты, причем поверхности $\omega^3 = \mathrm{const}$ являются слоями поля $\mathbf{n}$.

В случае плоского деформированного состояния условие пластичности $\sigma_1-\sigma_2 = 2k$ показывает, что напряженное состояние соответствует грани призмы Треска. Однако и в этом случае уравнение равновесия все же удается привести (см. [3]) к двумерному аналогу (1.1), в которое вместо σ_3 следует подставить полусумму главных напряжений

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}.$$

Каноническое преобразование координат в плоской задаче записывается в виде

$$x_1 = f(\omega^1, \omega^3), \quad x_2 = h(\omega^1, \omega^3), \quad x_3 = \omega^2. \tag{1.3}$$

Отображающие функции f, h должны удовлетворять следующей системе уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial f}{\partial\omega^3} + \dfrac{\partial h}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial\omega^1}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^3} - \dfrac{\partial f}{\partial\omega^3}\dfrac{\partial h}{\partial\omega^1} = \pm 1. \end{cases} \tag{1.4}$$

Левые части этих уравнений обозначим соответственно через E_1 и E_2.

При использовании неканонических изостатических координат ξ^1, ξ^3 вместо системы уравнений (1.4) имеем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}\dfrac{\partial f}{\partial\xi^3} + \dfrac{\partial h}{\partial\xi^1}\dfrac{\partial h}{\partial\xi^3} = 0, \\ \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\xi^3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial\xi^3}\right)^2\right]\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial\xi^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial\xi^1}\right)^2\right] = G_1(\xi^1)G_3(\xi^3), \end{cases} \tag{1.5}$$

где $G_1(\xi^1)$, $G_3(\xi^3)$ — некоторые функции.

Заметим также, что в силу первого из уравнений системы (1.5) имеем:

$$\begin{aligned} &\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\xi^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\xi^3}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial f}{\partial\xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial\xi^1}\right)^2\right] = \\ &\qquad = \left(\frac{\partial f}{\partial\xi^1}\frac{\partial h}{\partial\xi^3} - \frac{\partial f}{\partial\xi^3}\frac{\partial h}{\partial\xi^1}\right)^2. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Ясно, что пары изостатических координат ξ^1, ξ^3 и ω^1, ω^3 связаны посредством следующего соотношения:

$$\omega^1 = \int \sqrt{G_1(\xi^1)}\,d\xi^1, \qquad \omega^3 = \int \sqrt{G_3(\xi^3)}\,d\xi^3. \tag{1.7}$$

В целях более компактного представления для переменных ω^1, ω^3 введем новые обозначения υ^1, υ^2.

Поставим задачу об отыскании непрерывных групп преобразований, относительно которых система дифференциальных уравнений в частных производных (1.4) (или (1.5)) будет инвариантной.

2. Вычисление группы инвариантности системы уравнений плоской задачи

Для решения поставленной задачи рассмотрим, следуя [10], непрерывную однопараметрическую группу преобразований зависимых и независимых переменных (группу Ли)

$$\begin{aligned}
&\tilde{\upsilon}^1 = \tilde{\upsilon}^1(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h,\varepsilon) = \upsilon^1 + \varepsilon\Xi^1(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h) + \ldots,\\
&\tilde{\upsilon}^2 = \tilde{\upsilon}^2(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h,\varepsilon) = \upsilon^2 + \varepsilon\Xi^2(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h) + \ldots,\\
&\tilde{f} = \tilde{f}(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h,\varepsilon) = f + \varepsilon\mathrm{H}^1(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h) + \ldots,\\
&\tilde{h} = \tilde{h}(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h,\varepsilon) = h + \varepsilon\mathrm{H}^2(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h) + \ldots,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где ε — скалярный параметр группы преобразований.

Группа преобразований индуцирует касательное векторное поле, которое определяется компонентами [10. С. 55]

$$\varsigma = (\Xi^1(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h), \Xi^2(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h), \mathrm{H}^1(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h), \mathrm{H}^2(\upsilon^1,\upsilon^2,f,h)). \tag{2.2}$$

Составим инфинитезимальный оператор группы [10. С. 55]

$$\varsigma\cdot\partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial h}. \tag{2.3}$$

По инфинитезимальному оператору однопараметрическая группа преобразований (2.1) восстанавливается единственным образом (с точностью до замены параметра ε). Для этого необходимо проинтегрировать задачу Коши для автономной системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{d\tilde{\upsilon}^1}{d\tau} = \Xi^1(\tilde{\upsilon}^1,\tilde{\upsilon}^2,\tilde{f},\tilde{h}), \quad \frac{d\tilde{\upsilon}^2}{d\tau} = \Xi^2(\tilde{\upsilon}^1,\tilde{\upsilon}^2,\tilde{f},\tilde{h}),\\
&\frac{d\tilde{f}}{d\tau} = \mathrm{H}^1(\tilde{\upsilon}^1,\tilde{\upsilon}^2,\tilde{f},\tilde{h}), \quad \frac{d\tilde{h}}{d\tau} = \mathrm{H}^2(\tilde{\upsilon}^1,\tilde{\upsilon}^2,\tilde{f},\tilde{h}),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где τ — канонический параметр группы, с начальными данными

$$\tilde{\upsilon}^1\big|_{\tau=0} = \upsilon^1, \quad \tilde{\upsilon}^2\big|_{\tau=0} = \upsilon^2, \quad \tilde{f}\big|_{\tau=0} = f, \quad \tilde{h}\big|_{\tau=0} = h.$$

Рассмотрим далее один раз продолженную группу и ее касательное векторное поле $\underset{1}{\varsigma}$. Инфинитезимальный оператор продолженной группы имеет вид

$$\begin{aligned}
\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial = \Xi^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1} + \Xi^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2} + \mathrm{H}^1\frac{\partial}{\partial f} + \mathrm{H}^2\frac{\partial}{\partial h} + \mathrm{H}^1_1\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial\upsilon^1}\right)} + \mathrm{H}^1_2\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial f}{\partial\upsilon^2}\right)} + \\
+\mathrm{H}^2_1\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial h}{\partial\upsilon^1}\right)} + \mathrm{H}^2_2\frac{\partial}{\partial\left(\dfrac{\partial h}{\partial\upsilon^2}\right)},
\end{aligned} \tag{2.5}$$

где H^l_j выражаются согласно формул первого продолжения [10. С. 58]

$$\mathrm{H}^l_j = \frac{\partial\mathrm{H}^l}{\partial\upsilon^j} + \frac{\partial f_s}{\partial\upsilon^j}\frac{\partial\mathrm{H}^l}{\partial f_s} - \frac{\partial f_l}{\partial\upsilon^s}\left(\frac{\partial\Xi^s}{\partial\upsilon^j} + \frac{\partial f_r}{\partial\upsilon^j}\frac{\partial\Xi^s}{\partial f_r}\right) \qquad (l,j=1,2) \tag{2.6}$$

и для сокращения записи принято, что $f_1 = f$ и $f_2 = h$.

Если замена переменных в соответствии с формулами (2.1)

$$(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) \to (\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h})$$

преобразует систему дифференциальных уравнений (1.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2} + \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} &= 0,\\ \frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} - \frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1} &= \pm 1\end{aligned}$$

в систему в точности того же самого вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\upsilon}^1}\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\upsilon}^2} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{\upsilon}^1}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{\upsilon}^2} &= 0,\\ \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\upsilon}^1}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{\upsilon}^2} - \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{\upsilon}^2}\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{\upsilon}^1} &= \pm 1,\end{aligned} \tag{2.7}$$

то группу преобразований (2.1) называют группой инвариантности системы дифференциальных уравнений (1.4). Говорят также, что система дифференциальных уравнений (1.4) допускает группу (2.1).

Инфинитезимальный оператор первого продолжения группы, относительно которой уравнения (1.4) инвариантны, обладает тем свойством, что если его применить к указанным дифференциальным уравнениям и поставить условия, что сами уравнения выполняются, то должны получаться тождественно нулевые выражения:

$$\begin{aligned}&(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_1 = 0,\\ &(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_2 = 0,\\ &\mathrm{E}_1 = 0,\\ &\mathrm{E}_2 = \pm 1.\end{aligned}$$

Этим свойством пользуются для нахождения инфинитезимального оператора и группы инвариантности системы дифференциальных уравнений в частных производных.

Применим инфинитезимальный оператор $\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial$ к первому уравнению E_1 системы (1.4):

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2} + \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2}\right) = \mathrm{H}_1^1\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2} + \mathrm{H}_2^1\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1} + \mathrm{H}_1^2\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} + \mathrm{H}_2^2\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}. \tag{2.8}$$

Преобразуем полученное выражение, используя формулы (2.6) для величин H_j^l,[4] и привлечем затем систему уравнений (1.4) в нормальной по переменной υ^2 форме Коши:

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2} = \frac{-\dfrac{\partial h}{\partial \upsilon^1}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2}, \quad \frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon^1}}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2}. \tag{2.9}$$

Заменяя частные производные в соответствии с (2.9) и умножая на

$$\left[\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2\right]^2,$$

[4] Преобразования подобного вида ниже выполняются с помощью пакета символьных вычислений Maple V.

получим, что условие инвариантности первого уравнения системы (1.4)

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_1 = 0,$$

представляется в форме степенного многочлена от свободных частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}, \quad \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}$$

и поэтому расщепляется на ряд уравнений, получающихся приравниванием нулю коэффициентов указанного степенного многочлена от этих производных.

Таким образом, находим следующие условия инвариантности:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^2} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^1} = 0, \\
\frac{\partial \Xi^2}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial f} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2} = 0, \\
\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial h} - \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} = 0.
\end{gathered} \tag{2.10}$$

Применим инфинитезимальный оператор $\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial$ ко второму уравнению E_2 системы (1.4), т.е. вычислим

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} - \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}\right). \tag{2.11}$$

Прежде всего имеем

$$(\underset{1}{\varsigma}\cdot\partial)\mathrm{E}_2 = \mathrm{H}^1_1\frac{\partial h}{\partial \upsilon^2} + \frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\mathrm{H}^2_2 - \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\mathrm{H}^1_2 - \mathrm{H}^2_1\frac{\partial f}{\partial \upsilon^2}, \tag{2.12}$$

где H^l_j находятся с помощью (2.6).

Подставим выражения (2.9) в (2.12) и умножим на

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \upsilon^1}\right)^2,$$

в результате получим степенной многочлен от свободных частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial \upsilon^1}, \quad \frac{\partial h}{\partial \upsilon^1},$$

коэффициенты которого должны обращаться в нуль:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \Xi^2}{\partial f} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^1} = 0, \quad \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial f} + \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial h} - \frac{\partial \Xi^1}{\partial \upsilon^1} - \frac{\partial \Xi^2}{\partial \upsilon^2} = 0, \\
\frac{\partial \Xi^1}{\partial h} + \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^2} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^2}{\partial h} - \frac{\partial \mathrm{H}^1}{\partial \upsilon^1} = 0, \quad \frac{\partial \Xi^1}{\partial f} - \frac{\partial \mathrm{H}^2}{\partial \upsilon^2} = 0.
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Анализ определяющих уравнений (2.10), (2.13) показывает, что касательное векторное поле ς имеет компоненты, зависимость которых от преобразуемых под действием группы переменных выражается как

$$\Xi^1(\upsilon^1), \quad \Xi^2(\upsilon^2), \quad \mathrm{H}^1(f,h), \quad \mathrm{H}^2(f,h), \tag{2.14}$$

а более детальные рассмотрения позволяют заключить, что инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы дифференциальных уравнений (1.4) может иметь только следующую форму:

$$\begin{aligned}\varsigma\cdot\partial = C_1\left(\upsilon^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1}+\upsilon^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2}+f\frac{\partial}{\partial f}+h\frac{\partial}{\partial h}\right)+C_2\left(\upsilon^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1}-\upsilon^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2}\right)+\\ +C_3\left(h\frac{\partial}{\partial f}-f\frac{\partial}{\partial h}\right)+\\ +C_4\frac{\partial}{\partial\upsilon^1}+C_5\frac{\partial}{\partial\upsilon^2}+C_6\frac{\partial}{\partial f}+C_7\frac{\partial}{\partial h},\end{aligned}\tag{2.15}$$

где C_j — произвольные постоянные.

Вводя базисные инфинитезимальные операторы

$$\begin{aligned}&\varsigma_1\cdot\partial=\upsilon^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1}+\upsilon^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2}+f\frac{\partial}{\partial f}+h\frac{\partial}{\partial h},\\ &\varsigma_2\cdot\partial=\upsilon^1\frac{\partial}{\partial\upsilon^1}-\upsilon^2\frac{\partial}{\partial\upsilon^2},\\ &\varsigma_3\cdot\partial=h\frac{\partial}{\partial f}-f\frac{\partial}{\partial h},\\ &\varsigma_4\cdot\partial=\frac{\partial}{\partial\upsilon^1},\\ &\varsigma_5\cdot\partial=\frac{\partial}{\partial\upsilon^2},\\ &\varsigma_6\cdot\partial=\frac{\partial}{\partial f},\\ &\varsigma_7\cdot\partial=\frac{\partial}{\partial h},\end{aligned}\tag{2.16}$$

множество операторов (2.15) представим как линейное пространство размерности 7, совпадающее с линейной оболочкой базисной системы (2.16).

Заметим, что инфинитезимальные операторы $(\varsigma_4\cdot\partial)$, $(\varsigma_5\cdot\partial)$ определяют сдвиги изостатических координат υ^1, υ^2, а операторы $(\varsigma_6\cdot\partial)$, $(\varsigma_7\cdot\partial)$ — сдвиги декартовых координат x_1, x_2. Оператор $(\varsigma_3\cdot\partial)$ соответствует повороту в плоскости течения относительно координатной оси x_3. Оператор $(\varsigma_1\cdot\partial)$ соответствует одновременному растяжению координат υ^1, υ^2, f, h в одинаковых отношениях l, l, l, l. Оператор $(\varsigma_2\cdot\partial)$ соответствует одновременному растяжению координат υ^1, υ^2 в отношениях l, l^{-1}.

3. Инвариантные решения уравнений плоского деформированного состояния

Группа, относительно которой система дифференциальных уравнений инвариантна, обладает также тем свойством, что примененная к любому решению этой системы дифференциальных уравнений она снова переводит его в решение этой системы (см. [11. С. 147]).

Пусть имеется произвольное решение

$$f=f(\upsilon^1,\upsilon^2),\quad h=h(\upsilon^1,\upsilon^2)$$

системы дифференциальных уравнений (1.4). Группа преобразований (2.1) позволяет тогда определить зависимости

$$\tilde f=\tilde f(\tilde\upsilon^1,\tilde\upsilon^2,\varepsilon),\quad \tilde h=\tilde h(\tilde\upsilon^1,\tilde\upsilon^2,\varepsilon).$$

Если они удовлетворяют в точности такой же системе дифференциальных уравнений (2.7), то группа преобразований (2.1) называется группой симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4).

Таким образом, группа, относительно которой система дифференциальных уравнений инвариантна, есть также и группа симметрий этой системы. Полная группа симметрий данной системы дифференциальных уравнений — наибольшая группа преобразований, действующая на зависимые и независимые переменные и обладающая свойством переводить решения системы в другие ее решения.

Функция $I(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h)$ называется инвариантом группы преобразований (2.1), если

$$I(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}) = I(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h),$$

где аргументы связаны формулами (2.1).

Инфинитезимальный оператор группы инвариантности системы обладает свойством, что если его применить к инварианту I, то получим равное нулю выражение:

$$(\varsigma \cdot \partial) I = 0,$$

т.е. инвариант есть корень инфинитезимального оператора группы.

Учитывая (2.15), это условие инвариантности можно представить в форме линейного уравнения в частных производных первого порядка:

$$\begin{gathered}((C_1 + C_2)\upsilon^1 + C_4)\frac{\partial I}{\partial \upsilon^1} + ((C_1 - C_2)\upsilon^2 + C_5)\frac{\partial I}{\partial \upsilon^2} + (C_1 f + C_3 h + C_6)\frac{\partial I}{\partial f} + \\ +(C_1 h - C_3 f + C_7)\frac{\partial I}{\partial h} = 0,\end{gathered} \tag{3.1}$$

где $I(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h)$ — инвариант системы дифференциальных уравнений (1.4).

Для его решения рассмотрим характеристическую систему

$$\begin{gathered}\frac{d\upsilon^1}{(C_1 + C_2)\upsilon^1 + C_4} = \frac{d\upsilon^2}{(C_1 - C_2)\upsilon^2 + C_5} = \\ = \frac{df}{C_1 f + C_3 h + C_6} = \frac{dh}{C_1 h - C_3 f + C_7}.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Удобно, прежде всего, совершить трансляцию декартовых координат

$$f^* = f - l_1, \quad h^* = h - l_2,$$

где

$$l_1 = \frac{-C_1 C_6 + C_7 C_3}{C_1^2 + C_3^2}, \quad l_2 = -\frac{C_1 C_7 + C_6 C_3}{C_1^2 + C_3^2}.$$

Затем введем полярные координаты согласно

$$r^* = \sqrt{f^{*2} + h^{*2}}, \quad \mathrm{tg}\varphi^* = \frac{h^*}{f^*}.$$

Произведем также растяжение и трансляцию изостатических координат

$$\upsilon^{1*} = \alpha^{-1}\upsilon^1 + C_4 C_1^{-1}, \quad \upsilon^{2*} = \beta^{-1}\upsilon^2 + C_5 C_1^{-1},$$

где

$$\alpha = \frac{C_1}{C_1 + C_2}, \quad \beta = \frac{C_1}{C_1 - C_2}, \tag{3.3}$$

и введем переменную[5]

$$\upsilon^* = (\upsilon^{1*})^{\alpha}(\upsilon^{2*})^{-\beta}.$$

[5]Эту переменную мы называем автомодельной переменной.

Три независимых первых интеграла характеристической системы без труда находятся и позволяют определить базисные инварианты группы симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) в форме

$$I_1 = \upsilon^*, \quad I_2 = (\upsilon^{1^*})^{\alpha}(\upsilon^{2^*})^{\beta}\exp(2C^{-1}\varphi^*), \quad I_3 = (\upsilon^{1^*})^{-\alpha}(\upsilon^{2^*})^{-\beta}r^{*2}. \tag{3.4}$$

Здесь использовано следующее обозначение:

$$C = \frac{C_3}{C_1}.$$

В дальнейшем мы рассмотрим лишь случай, когда

$$C_1 \neq 0, \quad C_3 \neq 0, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0.$$

Поскольку $I(I_1, I_2, I_3)$, где I — произвольная функция своих аргументов, представляет собой общее решение уравнения (3.1), то $I(I_1, I_2, I_3)$ — наиболее общая форма инварианта группы симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4).

Инвариантными решениями системы дифференциальных уравнений относительно группы преобразований (2.1) называются решения этой системы, которые переводятся этой группой преобразований сами в себя. Другими словами, решение системы дифференциальных уравнений (1.4), которое мы представим в неявной форме как

$$\Phi_1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) = 0, \quad \Phi_2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h) = 0, \tag{3.5}$$

инвариантно относительно группы преобразований (2.1), если

$$\Phi_1(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}) = 0, \quad \Phi_2(\tilde{\upsilon}^1, \tilde{\upsilon}^2, \tilde{f}, \tilde{h}) = 0, \tag{3.6}$$

где, как обычно, переменные υ^1, υ^2, f, h и $\tilde{\upsilon}^1$, $\tilde{\upsilon}^2$, $\tilde{f}$, $\tilde{h}$ связаны формулами группового преобразования (2.1). Кроме того, мы предполагаем отличным от нуля якобиан $\partial(\Phi_1, \Phi_2)/\partial(f, h)$.

С геометрической точки зрения каждому инвариантному решению (3.5) соответствует инвариантное многообразие размерности 2 в четырехмерном пространстве, арифметизованном с помощью координат υ^1, υ^2, f, h.

Ясно, что достаточное условие инвариантности решения (3.5) системы дифференциальных уравнений (1.4) заключается в том, чтобы функции

$$\Phi_1(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h), \quad \Phi_2(\upsilon^1, \upsilon^2, f, h)$$

были инвариантами группы симметрий этой системы, т.е.

$$(\varsigma \cdot \partial)\Phi_1 = 0,$$

$$(\varsigma \cdot \partial)\Phi_2 = 0.$$

Обратное утверждение неверно, однако можно доказать (см., например, [10, с. 244, 245]), что если решение системы дифференциальных уравнений (1.4), определяемое неявно в форме (3.5), инвариантно, то найдутся инварианты J_1, J_2 группы симметрий этой системы такие, что то же самое решение будет задаваться неявно уравнениями

$$J_1(I_1, I_2, I_3) = 0, \quad J_2(I_1, I_2, I_3) = 0 \tag{3.7}$$

в том смысле, что переменные υ^1, υ^2, f, h будут удовлетворять системе уравнений (3.5) тогда и только тогда, когда они будут удовлетворять системе уравнений (3.7). Такую форму задания инвариантного решения можно назвать канонической.

Заметим, что в рассматриваемом случае системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.4) функции J_1, J_2, задающие каноническую форму инвариантного решения, будут определяться из системы *обыкновенных* дифференциальных уравнений.[6]

Итак, лишь те решения системы дифференциальных уравнений (1.4), которые задаются неявно в форме двух зависимостей между базисными инвариантами I_1, I_2, I_3, являются инвариантными. В частности, инвариантные решения можно искать в форме

$$\begin{gathered}\ln r^* = \ln\sqrt{(\upsilon^{1*})^{\alpha}(\upsilon^{2*})^{\beta}} + \Psi(\upsilon^*),\\ \varphi^* = C\left(-\ln\sqrt{(\upsilon^{1*})^{\alpha}(\upsilon^{2*})^{\beta}} + \Phi(\upsilon^*)\right).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Функции Φ и Ψ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая получается при подстановке (3.8) в (1.4).

Второе уравнение системы (1.4) сводится к обыкновенному дифференциальному, только если

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 2,$$

что выполняется в силу (3.3). Полагая для удобства

$$\alpha = \frac{1}{1+\omega}, \quad \beta = \frac{1}{1-\omega},$$

приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющей инвариантные решения (1.4):

$$\begin{gathered}\frac{1}{4} - (\upsilon^*)^2\Psi'^2 + C^2\left[\frac{1}{4} - (\upsilon^*)^2\Phi'^2\right] = 0,\\ \left(\frac{1}{2} + \upsilon^*\Psi'\right)\left(\frac{1}{2} + \upsilon^*\Phi'\right) - \left(\frac{1}{2} - \upsilon^*\Psi'\right)\left(\frac{1}{2} - \upsilon^*\Phi'\right) = \mp C^{-1}e^{-2\Psi}(\upsilon^*)^{\omega}.\end{gathered} \tag{3.9}$$

Здесь штрихом обозначается дифференцирование по автомодельной переменной υ^*.

Исключая производную $\upsilon^*\Phi'$, можно получить одно неавтономное уравнение первого порядка для функции $\Psi(\upsilon^*)$:

$$\begin{aligned}-\left(\frac{1}{2} + \upsilon^*\Psi'\right)&\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + C^{-2}\left[\frac{1}{4} - (\upsilon^*)^2\Psi'^2\right]}\right) +\\ &+\left(\frac{1}{2} - \upsilon^*\Psi'\right)\left(\frac{1}{2} \mp \sqrt{\frac{1}{4} + C^{-2}\left[\frac{1}{4} - (\upsilon^*)^2\Psi'^2\right]}\right) =\\ &= \pm C^{-1}e^{-2\Psi}(\upsilon^*)^{\omega}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

В этом уравнении знаки $\pm$ и $\mp$ в левой части согласованы, а в правой — выбор знака может осуществляться независимо.

Полученное уравнение приводится к автономному дифференциальному уравнению первого порядка заменой

$$\upsilon^* = e^t, \quad \Lambda = -2\Psi + \omega t.$$

[6]Как известно, указанная система обыкновенных дифференциальных уравнений может вообще не иметь решений, и в этом случае инвариантного решения существовать не будет (см., например, [10. С. 254] об *условном* существовании инвариантно-групповых решений).

В результате имеем (точкой обозначается дифференцирование по переменной t)[7]:

$$\begin{gathered}-(1+\omega-\dot{\Lambda})(1\pm\sqrt{1+C^{-2}[1-(\omega-\dot{\Lambda})^2]})+\\ +(1-\omega+\dot{\Lambda})(1\mp\sqrt{1+C^{-2}[1-(\omega-\dot{\Lambda})^2]})=\pm4C^{-1}e^{\Lambda}.\end{gathered}\tag{3.11}$$

Вводя обозначение

$$P=\omega-\dot{\Lambda},\tag{3.12}$$

уравнение (3.11) представим в форме (знаки $\pm$ в левой и правой части не согласованы)

$$-2P\pm2\sqrt{1+C^{-2}\left[1-P^2\right]}=\pm4C^{-1}e^{\Lambda},\tag{3.13}$$

откуда получаем квадратное уравнение относительно P

$$(1+C^{-2})P^2\pm4C^{-1}e^{\Lambda}P+4C^{-2}e^{2\Lambda}-(1+C^{-2})=0,\tag{3.14}$$

дискриминант которого вычисляется как

$$\begin{gathered}D=(4C^{-1}e^{\Lambda})^2-4(1+C^{-2})(4C^{-2}e^{2\Lambda}-(1+C^{-2}))=(4C^{-1}e^{\Lambda})^2-\\ -4(1+C^{-2})4C^{-2}e^{2\Lambda}+4(1+C^{-2})^2=4((1+C^{-2})^2-4C^{-4}e^{2\Lambda}).\end{gathered}\tag{3.15}$$

Поэтому находим, что (знаки $\mp$ и $\pm$ не согласованы)

$$P=\frac{\mp2C^{-1}e^{\Lambda}\pm\sqrt{(1+C^{-2})^2-4C^{-4}e^{2\Lambda}}}{1+C^{-2}}.\tag{3.16}$$

Полагая

$$e^{\Lambda}=Q\tag{3.17}$$

и разделяя переменные, имеем

$$\frac{(1+C^{-2})dQ}{\omega(1+C^{-2})Q\mp2C^{-1}Q^2\pm Q\sqrt{(1+C^{-2})^2-4C^{-4}Q^2}}=dt\tag{3.18}$$

или (знаки $\mp$ и $\pm$ не согласованы)

$$\frac{dQ}{\omega Q\mp\sqrt{2\gamma-\gamma^2}Q^2\pm Q\sqrt{1-\gamma^2Q^2}}=dt,\tag{3.19}$$

где

$$\gamma=\frac{2}{1+C^2}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int\frac{dQ}{\omega Q\mp\sqrt{2\gamma-\gamma^2}Q^2\pm Q\sqrt{1-\gamma^2Q^2}}=t+\text{const}.\tag{3.20}$$

[7]Напомним, что предполагается выполнение условий $C\neq0$, $\omega\neq\pm1$.

Интеграл в левой части уравнения (3.20) вычисляется в форме[8]:

$$\int \frac{d\Lambda}{\omega + \sqrt{2\gamma - \gamma^2} e^{\Lambda} \pm \sqrt{1 - \gamma^2 e^{2\Lambda}}} =$$

$$= -\Bigg[4\sqrt{2-\gamma}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{-\omega\sqrt{2-\gamma} + 2\sqrt{\gamma} e^{\Lambda}}{\sqrt{-2+\omega^2\gamma}}\right)\sqrt{-2+\omega^2\gamma} -$$

$$-4(\omega \mp 1)\Lambda\left(2 - \omega^2\gamma\right) \mp 4\left(2-\omega^2\gamma\right)\ln(2 + 2\sqrt{1-\gamma^2 e^{2\Lambda}}) +$$

$$+2\omega\ln\left(\left(\omega\sqrt{2-\gamma} - 2\sqrt{\gamma}e^{\Lambda}\right)^2 - 2 + \omega^2\gamma\right)\left(2-\omega^2\gamma\right) \pm$$

$$\pm\left(\omega\sqrt{2-\gamma} + \sqrt{2-\omega^2\gamma}\right)\sqrt{2-\omega^2\gamma}\left(\sqrt{2-\gamma}\sqrt{2-\omega^2\gamma} + \omega\gamma\right) \times$$

$$\times \ln\left(\frac{4 - 4\gamma^2 e^{2\Lambda} + 2\left(\sqrt{2-\gamma}\sqrt{2-\omega^2\gamma} + \omega\gamma\right)\sqrt{1-\gamma^2 e^{2\Lambda}}}{2\sqrt{\gamma}e^{\Lambda} - \omega\sqrt{2-\gamma} + \sqrt{2-\omega^2\gamma}} + 2\gamma^{3/2}e^{\Lambda}\right) -$$

$$-\left(\omega\sqrt{2-\gamma} - \sqrt{2-\omega^2\gamma}\right)\sqrt{2-\omega^2\gamma}\left(\sqrt{2-\gamma}\sqrt{2-\omega^2\gamma} - \omega\gamma\right) \times$$

$$\times \ln\left(\frac{-4 + 4\gamma^2 e^{2\Lambda} \mp 2\left(\sqrt{2-\gamma}\sqrt{2-\omega^2\gamma} - \omega\gamma\right)\sqrt{1-\gamma^2 e^{2\Lambda}}}{-2\sqrt{\gamma}e^{\Lambda} + \omega\sqrt{2-\gamma} + \sqrt{2-\omega^2\gamma}} + 2\gamma^{3/2}e^{\Lambda}\right)\Bigg] \times$$

$$\times \frac{1}{4\left(2-\omega^2\gamma\right)\left(\omega^2 - 1\right)}.$$

Таким образом, все инвариантно-групповые решения системы дифференциальных уравнений (1.4) вычисляются в элементарных функциях.

Заметим, что постоянная

$$\Lambda = \ln\left(\frac{\pm\sqrt{2-\gamma}\omega \pm \sqrt{2-\omega^2\gamma}}{2\sqrt{\gamma}}\right) \tag{3.21}$$

является решением дифференциального уравнения (3.11).

4. Оптимальная система Θ_1 одномерных подалгебр алгебры симметрий

Рассмотрим алгебру симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) с базисными операторами $(\varsigma_i \cdot \partial)$ (см. (2.16)). Линейное пространство размерности 7 с базисом из инфинитезимальных операторов $(\varsigma_i \cdot \partial)$ наделяется стандартной алгебраической структурой с помощью билинейной операции коммутации операторов (скобка Пуассона операторов). Чтобы доказать, что линейная оболочка операторов $(\varsigma_i \cdot \partial)$ образует алгебру Ли, необходимо составить таблицу коммутации базисных инфинитезимальных операторов. Таблица коммутации, приведенная ниже, показывает, что инфинитезимальные операторы (2.16) действительно определяют алгебру Ли непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4).

[8]Интегрирование выполнено с помощью пакета символьных вычислений Maple V.

	$(\varsigma_1 \cdot \partial)$	$(\varsigma_2 \cdot \partial)$	$(\varsigma_3 \cdot \partial)$	$(\varsigma_4 \cdot \partial)$	$(\varsigma_5 \cdot \partial)$	$(\varsigma_6 \cdot \partial)$	$(\varsigma_7 \cdot \partial)$
$(\varsigma_1 \cdot \partial)$	0	0	0	$-(\varsigma_4 \cdot \partial)$	$-(\varsigma_5 \cdot \partial)$	$-(\varsigma_6 \cdot \partial)$	$-(\varsigma_7 \cdot \partial)$
$(\varsigma_2 \cdot \partial)$	0	0	0	$-(\varsigma_4 \cdot \partial)$	$(\varsigma_5 \cdot \partial)$	0	0
$(\varsigma_3 \cdot \partial)$	0	0	0	0	0	$(\varsigma_7 \cdot \partial)$	$-(\varsigma_6 \cdot \partial)$
$(\varsigma_4 \cdot \partial)$	$(\varsigma_4 \cdot \partial)$	$(\varsigma_4 \cdot \partial)$	0	0	0	0	0
$(\varsigma_5 \cdot \partial)$	$(\varsigma_5 \cdot \partial)$	$-(\varsigma_5 \cdot \partial)$	0	0	0	0	0
$(\varsigma_6 \cdot \partial)$	$(\varsigma_6 \cdot \partial)$	0	$-(\varsigma_7 \cdot \partial)$	0	0	0	0
$(\varsigma_7 \cdot \partial)$	$(\varsigma_7 \cdot \partial)$	0	$(\varsigma_6 \cdot \partial)$	0	0	0	0

Структура общего инфинитезимального оператора (2.15) может быть проанализирована с помощью внутренних автоморфизмов рассматриваемой алгебры Ли.

Чтобы найти внутренние автоморфизмы алгебры Ли, необходимо решить уравнение Ли (см. [10. С. 188]):

$$\frac{\partial \varsigma'}{\partial \tau} = [\varsigma', \varsigma_i] \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$\varsigma'(0) = \varsigma. \tag{4.2}$$

Поясним, что ς' — касательное векторное поле, в которое переходит касательное векторное поле ς под действием однопараметрической группы преобразований, заданной уравнением Ли.

Заметим, что в терминах инфинитезимальных операторов уравнение (4.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\varsigma' \cdot \partial) = [(\varsigma' \cdot \partial), (\varsigma_i \cdot \partial)],$$

а начальное условие (4.2) —

$$(\varsigma' \cdot \partial)\big|_{\tau=0} = (\varsigma \cdot \partial).$$

Для каждого базисного вектора ς_j $(j = \overline{1,7})$ имеем соответствующую однопараметрическую группу внутренних автоморфизмов, действующую на постоянные C_i, в разложении общего инфинитезимального оператора (2.15), определяемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [10. С. 189]):

$$\begin{aligned}
&1)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = C_4',\ \dot C_5' = C_5',\ \dot C_6' = C_6',\ \dot C_7' = C_7';\\
&2)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = C_4',\ \dot C_5' = -C_5',\ \dot C_6' = 0,\ \dot C_7' = 0;\\
&3)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = 0,\ \dot C_5' = 0,\ \dot C_6' = C_7',\ \dot C_7' = -C_6';\\
&4)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = -C_1' - C_2',\ \dot C_5' = 0,\ \dot C_6' = 0,\ \dot C_7' = 0;\\
&5)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = 0,\ \dot C_5' = -C_1' + C_2',\ \dot C_6' = 0,\ \dot C_7' = 0;\\
&6)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = 0,\ \dot C_5' = 0,\ \dot C_6' = -C_1',\ \dot C_7' = C_3';\\
&7)\ \dot C_1' = 0,\ \dot C_2' = 0,\ \dot C_3' = 0,\ \dot C_4' = 0,\ \dot C_5' = 0,\ \dot C_6' = -C_3',\ \dot C_7' = -C_1'.
\end{aligned}$$

Здесь дифференцирование (обозначаемое точкой) производится по параметру τ.

Решая каждую из семи выписанных систем с начальными данными $C_i'\big|_{\tau=0} = C_i$, находим, как действуют внутренние автоморфизмы на постоянные C_i в разложении общего инфинитезимального оператора (2.15):

$$
\begin{aligned}
&1)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4 e^{\tau},\ \ C_5' = C_5 e^{\tau},\\
&\quad C_6' = C_6 e^{\tau},\ \ C_7' = C_7 e^{\tau};\\
&2)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4 e^{\tau},\ \ C_5' = C_5 e^{-\tau},\\
&\quad C_6' = C_6,\ \ C_7' = C_7;\\
&3)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4,\ \ C_5' = C_5,\\
&\quad C_6' = C_6 \cos\tau + C_7 \sin\tau,\ \ C_7' = -C_6 \sin\tau + C_7 \cos\tau;\\
&4)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4 - \tau C_1 - \tau C_2,\ \ C_5' = C_5,\\
&\quad C_6' = C_6,\ \ C_7' = C_7;\\
&5)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4,\ \ C_5' = C_5 - \tau C_1 + \tau C_2,\\
&\quad C_6' = C_6,\ \ C_7' = C_7;\\
&6)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4,\ \ C_5' = C_5,\\
&\quad C_6' = C_6 - \tau C_1,\ \ C_7' = C_7 + \tau C_3;\\
&7)\ C_1' = C_1,\ \ C_2' = C_2,\ \ C_3' = C_3,\ \ C_4' = C_4,\ \ C_5' = C_5,\\
&\quad C_6' = C_6 - \tau C_3,\ \ C_7' = C_7 - \tau C_1.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Построение оптимальной системы Θ_1 одномерных подалгебр алгебры Ли непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4) мы осуществим с помощью "наивного" подхода, состоящего в том, что коэффициенты C_i инфинитезимального оператора (2.15) подвергаются различным преобразованиям из списка (4.3) так, чтобы "упростить" его настолько, насколько это представляется возможным (в частности, стремясь привести к нулевому значению как можно больше из указанных семи постоянных). Далее мы выбираем из каждого класса инфинитезимальных операторов, переводящихся друг в друга автоморфизмами (4.3), по одному простейшему представителю и формируем оптимальную систему одномерных подалгебр Θ_1 алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений в частных производных (1.4).

При поиске указанных простейших представителей, кроме однопараметрических групп автоморфизмов, будем применять также преобразование, заключающееся в умножении инфинитезимального оператора на некоторую постоянную (так называемое преобразование умножения).

Рассмотрим, как изменяются постоянные C_i в представлении общего инфинитезимального оператора (2.15) группы симметрий системы уравнений (1.4) при применении к ним однопараметрических групп автоморфизмов (1)–(7) из приведенного выше списка (4.3).

Рассмотрим постоянные C_6 и C_7 как компоненты вектора $\mathbf{A}$ на плоскости x_1, x_2. Тогда автоморфизм (3) представляет собой поворот этого вектора на различные углы τ относительно начала координат.

Если вектор $\mathbf{A}$ ненулевой (т.е. хотя бы одна из его компонент C_6 или C_7 не равна нулю) и хотя бы один из коэффициентов C_1 и C_3 не равен нулю, то такими поворотами можно перевести вектор $\mathbf{A}$ в положение, когда он будет коллинеарен вектору с компонентами $-C_1$ и C_3. Применяя далее автоморфизм (6), можно добиться того, чтобы коэффициенты C_6 и C_7 стали нулевыми.

Если вектор $\mathbf{A}$ ненулевой, но оба коэффициента C_1 и C_3 равны нулю, то не удается одновременно привести к нулевым значениям коэффициенты C_6 и C_7. Однако поворотом (3) можно перевести вектор $\mathbf{A}$ в положение, когда коэффициент C_7 (или C_6) становится нулевым.

Таким образом, при любых обстоятельствах можно добиться того, чтобы выполнялось равенство $C_7 = 0$ (или $C_6 = 0$). Поэтому в дальнейших рассуждениях мы полагаем, что $C_7 = 0$, правда, тогда придется дополнить оптимальную систему элементами, которые получаются в результате замены индекса 6 на 7.

Если C_1, C_2 выбираются так, что $C_1 \pm C_2 \neq 0$ и $C_1 \neq 0$, то[9], применяя автоморфизмы (4), (5) при τ, равном соответственно $\dfrac{C_4}{C_1 + C_2}$ и $\dfrac{C_5}{C_1 - C_2}$, можно привести к нулевому значению коэффициенты C_4, C_5. Применяя затем преобразование умножения, приводим коэффициент C_1 к единице и получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_3 \cdot \partial), \tag{4.4}$$

где D_1, D_2 — произвольные постоянные.

Если $C_1 \pm C_2 \neq 0$, но $C_1 = 0$ и $C_3 \neq 0$, то коэффициенты C_6 и C_7 приводятся к нулевым значениям, применяя преобразование умножения, приводим коэффициент C_2 к единице и, таким образом, получаем множество простейших представителей вида:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_3 \cdot \partial). \tag{4.5}$$

Если $C_1 + C_2 = 0$ и $C_2 \neq 0$, то и $C_1 \neq 0$, т.е. коэффициенты C_6 и C_7 приводятся к нулевым значениям. Однако не удается сделать нулевым коэффициент C_4. Применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_1/C_4|$, получаем простейшего представителя вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) - (\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial). \tag{4.6}$$

Если $C_1 - C_2 = 0$ и $C_2 \neq 0$, то и $C_1 \neq 0$, т.е. коэффициенты C_6 и C_7 приводятся к нулевым значениям. Однако не удается сделать нулевым коэффициент C_5. Применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_1/C_5|$, получаем простейшего представителя вида:

$$(\varsigma_1 \cdot \partial) + (\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \tag{4.7}$$

Если $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$, но $C_3 \neq 0$, то коэффициенты C_6 и C_7 приводятся к нулевым значениям. Не удается привести к нулевым значениям коэффициенты C_4 и C_5. Если $C_4 \neq 0$ и $C_5 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (2) при τ, равном $\dfrac{1}{2}\ln|C_5/C_4|$, приводим коэффициенты C_4 и C_5 к одному и тому же абсолютному значению, которое затем с помощью автоморфизма (1) приводится к абсолютному значению C_3. Соответствующий простейший представитель есть

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \tag{4.8}$$

Если $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 \neq 0$ и $C_4 \neq 0$, $C_5 = 0$ (или $C_5 \neq 0$, $C_4 = 0$), то, применяя автоморфизм (1) при τ, равном соответственно $\ln|C_3/C_4|$ (или $\ln|C_3/C_5|$), получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial), \tag{4.9}$$

$$(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial). \tag{4.10}$$

Если $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 \neq 0$, $C_4 = 0$ и $C_5 = 0$, то получаем представитель вида

$$(\varsigma_3 \cdot \partial). \tag{4.11}$$

Если $C_1 = 0$ и $C_3 = 0$, но $C_2 \neq 0$, то коэффициент C_7 можно привести к нулевому значению, однако привести к нулевому значению коэффициент C_6 не удается.

[9]Как было только что показано, при указанных условиях коэффициенты C_6 и C_7 приводятся к нулевым значениям.

Применяя автоморфизмы (4) и (5), приводим к нулевым значениям коэффициенты C_4, C_5. Применяя автоморфизм (1) при τ, равном $\ln|C_2/C_6|$, приводим к одинаковым абсолютным значениям коэффициенты C_2, C_6. Применяя далее автоморфизм (3) при τ, равном π, изменяем, если необходимо, знак C_6; получаем простейшего представителя вида:

$$(\varsigma_2 \cdot \partial) + (\varsigma_6 \cdot \partial). \tag{4.12}$$

Если $C_1 = 0$, $C_3 = 0$ и $C_2 = 0$, то C_7 приводится к 0, однако привести к нулевым значениям C_4, C_5, C_6 не удается. Если $C_4 \neq 0$, $C_5 \neq 0$, то, применяя автоморфизм (2) при τ, равном $\dfrac{1}{2}\ln|C_5/C_4|$, приводим коэффициенты C_4 и C_5 к одному и тому же абсолютному значению. В результате находим простейших представителей вида:

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial) + D(\varsigma_6 \cdot \partial). \tag{4.13}$$

Если $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_2 = 0$ и $C_4 = 0$ (или $C_5 = 0$), но $C_5 \neq 0$ (соответственно $C_4 \neq 0$), то по-прежнему C_6 не удается привести к нулевому значению, однако, применяя автоморфизм (2) при τ, равном $\ln|C_5/C_6|$ (или $\ln|C_6/C_4|$), приводим коэффициенты C_6 и C_5 (или C_6 и C_4) к одному и тому же абсолютному значению. Применяя затем автоморфизм (3) при τ, равном π, изменяем, если необходимо, знак C_6; получаем простейших представителей вида:

$$(\varsigma_5 \cdot \partial) + (\varsigma_6 \cdot \partial), \tag{4.14}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial) + (\varsigma_6 \cdot \partial). \tag{4.15}$$

Если $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_2 = 0$, $C_6 = 0$ и $C_4 = 0$ (или $C_5 = 0$), но $C_5 \neq 0$ (соответственно $C_4 \neq 0$), то имеем двух представителей

$$(\varsigma_5 \cdot \partial), \tag{4.16}$$

$$(\varsigma_4 \cdot \partial). \tag{4.17}$$

Остается еще простейший представитель вида

$$(\varsigma_6 \cdot \partial). \tag{4.18}$$

Построенные инфинитезимальные операторы образуют оптимальную систему Θ_1 одномерных подалгебр алгебры непрерывных симметрий системы дифференциальных уравнений (1.4). Это подалгебры, порожденные следующими инфинитезимальными операторами (D, D_1, D_2 — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
&(\varsigma_1 \cdot \partial) + D_1(\varsigma_2 \cdot \partial) + D_2(\varsigma_3 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_3 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_1 \cdot \partial) - (\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_1 \cdot \partial) + (\varsigma_2 \cdot \partial) + D(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_4 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_3 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_3 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_2 \cdot \partial) + (\varsigma_6 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_4 \cdot \partial) \pm (\varsigma_5 \cdot \partial) + D(\varsigma_6 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_5 \cdot \partial) + (\varsigma_6 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_4 \cdot \partial) + (\varsigma_6 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_5 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_4 \cdot \partial),\\
&(\varsigma_6 \cdot \partial).
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

Здесь выбор знаков может производиться несогласованно. Приведенный список следует дополнить операторами, которые получаются заменой индекса 6 на 7.

Описанный выше алгоритм построения оптимальной системы Θ_1 в наглядной форме приводится в приложении.

Литература

[1] Радаев, Ю.Н. О канонических преобразованиях Пуанкаре и инвариантах уравнений пластического равновесия / Ю.Н. Радаев // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1990. №1. С. 86–94.

[2] Радаев, Ю.Н. К теории осесимметричной задачи математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев, Ю.Н. Бахарева // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 125–139.

[3] Радаев, Ю.Н. Пространственная задача математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев Самара: Изд-во Самарского гос. университета, 2004. 147 с.

[4] Радаев, Ю.Н. О канонических формах автомодельных уравнений осесимметричной задачи теории пластичности / Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №4(30). С. 140–146.

[5] Радаев, Ю.Н. Группы симметрий дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №4(34). 2004. С. 99–111.

[6] Радаев, Ю.Н. Инвариантно-групповые решения дифференциальных уравнений осесимметричной задачи математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. Второй спец. выпуск. 2004. С. 65–84.

[7] Аннин, Б.Д. Групповые свойства уравнений упругости и пластичности / Б.Д. Аннин, В.О. Бытев, С.И. Сенашов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985. 143 с.

[8] Радаев, Ю.Н. Об одной естественной конечномерной подалгебре алгебры симметрий трехмерных уравнений математической теории пластичности / Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. №5(39). 2005. С. 52–70.

[9] Радаев, Ю.Н. Группы симметрий и система одномерных оптимальных подалгебр трехмерных уравнений теории пластичности / Ю.Н. Радаев, В.А. Гудков // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Международной конференции, посв. 85-летию акад. РАН И.И. Воровича, г. Ростов–на–Дону, 11–15 октября 2005 г. Т. 1. Ростов–на–Дону: Изд-во ООО "ЦВВР", 2005. С. 166–170.

[10] Овсянников, Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л.В. Овсянников. М.: Наука, 1978. 400 с.

[11] Олвер, П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям / П. Олвер. М: Мир, 1989. 639 с.

[12] Эйзенхарт, Л.П. Непрерывные группы преобразований / Л.П. Эйзенхарт. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1947. 360 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ: АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ Θ_1

1-2: $C_1 \pm C_2 \neq 0$
  1: $C_1 \neq 0$ (C_4, C_5, C_6 приводятся к 0; C_1 приводится к 1)
  2: $C_1 = 0$, $C_3 \neq 0$ (C_4, C_5, C_6 приводятся к 0; C_2 приводится к 1)
3: $C_1 + C_2 = 0$, $C_2 \neq 0$ (C_6 приводится к 0; C_4 приводится к $\pm C_1$, а C_1 — к 1)
4: $C_1 - C_2 = 0$, $C_2 \neq 0$ (C_6 приводится к 0; C_5 приводится к $\pm C_1$, а C_1 — к 1)
5-8: $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 \neq 0$
  5: $C_4 \neq 0$, $C_5 \neq 0$ (C_6 приводится к 0; C_4 приводится к $\pm C_3$, C_5 приводится к $\pm C_3$, а C_3 — к 1)
  6: $C_4 \neq 0$, $C_5 = 0$ (C_6 приводится к 0; C_3 приводится к $\pm C_4$)
  7: $C_5 \neq 0$, $C_4 = 0$ (C_6 приводится к 0; C_3 приводится к $\pm C_5$)
  8: $C_4 = 0$, $C_5 = 0$ (C_6 приводится к 0)
9: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_2 \neq 0$ (C_4, C_5 приводятся к 0; C_2 приводится к C_6)
10-15: $C_1 = 0$, $C_3 = 0$, $C_2 = 0$
  10: $C_4 \neq 0$, $C_5 \neq 0$ (C_4 приводится к $\pm C_5$)
  11: $C_4 = 0$, $C_5 \neq 0$ (C_5 приводится к C_6)
    13: $C_6 = 0$ (C_5 приводится к 1)
  12: $C_5 = 0$, $C_4 \neq 0$ (C_4 приводится к C_6)
    14: $C_6 = 0$ (C_4 приводится к 1)
  15: $C_4 = 0$, $C_5 = 0$

Номера слева соответствуют строкам в списке элементов оптимальной системы Θ_1.

Поступила в редакцию 18/*VIII*/2005;
в окончательном варианте — 18/*VIII*/2005.

ON SYMMETRY GROUPS OF THE PLANE-STRAIN EQUATIONS OF THE MATHEMATICAL PLASTICITY

© 2006 Y.N. Radayev[10]

Group analysis of the system of partial differential equations of plane-strain plastic equilibrium is given. The static equilibrium equations are represented in the stress principal lines co-ordinate net (isostatic net). Their symmetry groups are obtained. The Lie algebra is studied. The group invariant solutions of the system are shown can be expressed via the elementary functions only.

Paper received 18/*VIII*/2005.
Paper accepted 18/*VIII*/2005.

[10]Radayev Yuri Nickolaevich (`radayev@ssu.samara.ru`), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.