

## О СПЕЦИАЛЬНОМ СУЖЕНИИ КОНЕЧНОГО РЕФЛЕКСИВНОГО, СИММЕТРИЧНОГО ОТНОШЕНИЯ ДО ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ<sup>1</sup>

© 2006 В.П. Цветов<sup>2</sup>

В работе приводится метод построения отношения эквивалентности, которое включено в рефлексивное, симметричное отношение и имеет максимально возможную мощность. Множества предполагаются конечными.

### 1. Предварительные сведения

В работе используются следующие обозначения и определения.

#### Обозначения.

$\sqcup, \cap, \setminus, \cup$  — дополнение, пересечение, разность, объединение множеств (в порядке старшинства);  $\neg, \wedge, \boxplus, \vee, \longrightarrow$  — отрицание, конъюнкция, сложение по модулю 2, дизъюнкция, импликация (в порядке старшинства).

$U := \{u_1, \dots, u_n\}$  — конечный универсум, при этом  $|U| := n$  — мощность  $U$ ; в частном случае,  $D := \{0, 1\}$  и  $m..n := \{m, m+1, \dots, n \mid m, n \in \mathbb{N} \wedge m \leq n\}$  — диапазон натуральных чисел от  $m$  до  $n$ .

$\langle U, \Sigma \rangle$  — модель (алгебра) с основой  $U$  и сигнатурой  $\Sigma = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ;  $\langle U_1, \Sigma_1 \rangle \sim \langle U_2, \Sigma_2 \rangle$  — изоморфизм моделей (алгебр).

$\mathbf{R} \subseteq U^2$  — бинарное отношение на  $U$ ;  $2^{U^2}$  — множество бинарных отношений на  $U$ ;  $\mathbf{I}$  — тождественное отношение;  $\tilde{\mathbf{R}}$  — отношение эквивалентности;  $\mathbf{R}^{-1}$  — обратное к  $\mathbf{R}$ ;  $\mathbf{R}_1 \circ \mathbf{R}_2$  — композиция  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ ;  $\mathbf{R}^k$  —  $k$ -я степень  $\mathbf{R}$ .

$[r_{ij}]$  — бинарная (булева) матрица,  $r_{ij} \in D$ ;  $M^{n^2}$  — множество квадратных бинарных матриц порядка  $n$ ;  $[\delta_{ij}]$  — единичная бинарная матрица;  $\text{rang}(r_{ij})$  — ранг бинарной матрицы  $[r_{ij}]$  над полем  $\langle D, \{\cdot, \boxplus\} \rangle$ .

#### Определения 1.1–1.8.

1.1. Отношение включения бинарных матриц  $[r_{ij}^1], [r_{ij}^2]$  задается условием:  $[r_{ij}^1] \subseteq [r_{ij}^2] := \forall i, j \ r_{ij}^1 \longrightarrow r_{ij}^2$ .

1.2. Мощность бинарной матрицы  $[r_{ij}]$  задается правилом:  $|r_{ij}| := \sum_{i,j=1}^n r_{ij}$  в алгебре  $\langle \mathbb{N} \cup \{0\}, \{+\} \rangle$ .

<sup>1</sup>Представлена доктором физико-математических наук профессором В.И. Астафьевым.

<sup>2</sup>Цветов Виктор Петрович (tsf@ssu.samara.ru), кафедра безопасности информационных систем Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

1.3. Инверсия бинарной матрицы  $[r_{ij}]$  задается правилом:  $\neg[r_{ij}] := [\neg r_{ij}]$ .

1.4. Транспонированная к бинарной матрице  $[r_{ij}]$  задается правилом:  $[r_{ij}]^T := [r_{ji}]$ .

1.5. Произведение бинарных матриц  $[r_{ik}^1], [r_{kj}^2]$  задается правилом:  $[r_{ik}^1] \bullet [r_{kj}^2] := [r^1 \bullet r^2] := [\bigvee_{k=1}^n r_{ik}^1 \wedge r_{kj}^2] := [r_{il}^1 \wedge r_{lj}^2 \vee \dots \vee r_{in}^1 \wedge r_{nj}^2]$ .

1.6. Степень бинарной матрицы  $[r_{ij}]$  при  $m \geq 0$ , задается правилом:  $[r_{ij}]^0 := [\delta_{ij}]$ ,  $[r_{ij}]^m := [r_{ik}]^{m-1} \bullet [r_{kj}]$ .

1.7. Сумма бинарных матриц  $[r_{ij}^1], [r_{ij}^2]$  задается правилом:  $[r_{ij}^1] \sqcup [r_{ij}^2] := [r^1 \sqcup r^2] := [r_{ij}^1 \vee r_{ij}^2]$ .

1.8. Элементы бинарной матрицы  $[r_{ij}] \in M^{|U|^2}$  отношения  $\mathbf{R} \in 2^{U^2}$  задаются правилом:

$$r_{ij} := \begin{cases} 1, & (u_i, u_j) \in \mathbf{R} \\ 0, & (u_i, u_j) \notin \mathbf{R} \end{cases}.$$

**Определения 1.9–1.16.** Говорят, что

1.9.  $\mathbf{R}$  — рефлексивно, если  $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ ;

1.10.  $\mathbf{R}$  — симметрично, если  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1}$ ;

1.11.  $\mathbf{R}$  — транзитивно, если  $\mathbf{R} \circ \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R}$ ;

1.12.  $\mathbf{R}$  — идемпотентно, если  $\mathbf{R} \circ \mathbf{R} = \mathbf{R}$ ;

1.13.  $\mathbf{R}_1$  — сужение отношения  $\mathbf{R}_2$ , если  $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}_2$ ;

1.14.  $[r_{ij}]$  — рефлексивная, если  $[\delta_{ij}] \sqsubseteq [r_{ij}]$ ;

1.15.  $[r_{ij}]$  — симметрическая, если  $[r_{ij}] = [r_{ij}]^T$ ;

1.16.  $[r_{ij}]$  — идемпотентная, если  $[r \bullet r_{ij}] = [r_{ij}]$ .

**Определение 1.17.** Отношение  $[\tilde{\mathbf{R}}] \in 2^{U^2}$  называют транзитивным, рефлексивным, симметричным замыканием отношения  $\mathbf{R} \in 2^{U^2}$ , если

1.17.1.  $[\tilde{\mathbf{R}}]$  — отношение эквивалентности;

1.17.2.  $\mathbf{R} \subseteq [\tilde{\mathbf{R}}]$ ;

1.17.3.  $\forall \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R} \subseteq \tilde{\mathbf{R}} \longrightarrow [\tilde{\mathbf{R}}] \subseteq \tilde{\mathbf{R}}$ .

**Определение 1.18.** Отношение  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \in 2^{U^2}$  назовем сужением отношения  $\mathbf{R} \in 2^{U^2}$  до отношения эквивалентности максимальной мощности, если

1.18.1.  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$  — отношение эквивалентности;

1.18.2.  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathbf{R}$ ;

1.18.3.  $\forall \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow |\tilde{\mathbf{R}}| \leq |\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}|$ .

Хорошо известны (см. например, [1, 2]) или легко устанавливаются следующие

**Леммы 1.1–1.6.**

1.1.  $\langle \{2^{U^2}, \mathbf{N}, \{\circ, ^{-1}, \neg, \cup, \subseteq, |\cdot|\}\} \rangle \sim \langle \{M^{|U|^2}, \mathbf{N}, \{\bullet, ^T, \neg, \sqcup, \sqsubseteq, |\cdot|\}\} \rangle$ .

1.2.  $[\tilde{\mathbf{R}}] = \bigcup_{k=0}^{|U|-1} (\mathbf{R} \cup \mathbf{R}^{-1})^k \sim [\tilde{r}_{ij}] := \bigvee_{k=0}^{|U|-1} ([r_{ij}] \vee [r_{ij}]^T)^k$ .

1.3.  $\mathbf{I} \sim [\delta_{ij}]$ .

1.4.  $\mathbf{R}$  — рефлексивно  $\wedge \mathbf{R}$  — симметрично  $\implies \mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ .

1.5.  $\tilde{\mathbf{R}}$  — отношение эквивалентности  $\iff \mathbf{I} \subseteq \tilde{\mathbf{R}} \wedge \tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^{-1} \wedge \tilde{\mathbf{R}} \circ \tilde{\mathbf{R}} = \tilde{\mathbf{R}}$ .

1.6.  $\tilde{\mathbf{R}}$  — отношение эквивалентности  $\wedge \tilde{\mathbf{R}} \sim [\tilde{r}_{ij}] \iff [\delta_{ij}] \sqsubseteq [\tilde{r}_{ij}] \wedge [\tilde{r}_{ij}] = [\tilde{r}_{ij}]^T \wedge \wedge [\tilde{r} \bullet \tilde{r}_{ij}] = [\tilde{r}_{ij}]$ .

## 2. Постановка задачи

Пусть  $U$  — конечный универсум.  $\mathbf{R}$  — рефлексивное, симметричное отношение на  $U$ . Требуется построить сужение заданного отношения  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$ , имеющего максимальную мощность.

Так как  $\mathbf{I} \in 2^{U^2}$  — отношение эквивалентности и  $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$ , то решение задачи существует.

Решение задачи может быть не единственно.

**Пример 1.**

$$\mathbf{R} \sim [r_{ij}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^1 \sim [\tilde{\rho}_{ij}^1] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^2 \sim [\tilde{\rho}_{ij}^2] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из сказанного следует, что поставленная задача всегда имеет непустой класс решений.

В силу ограничений, наложенных на  $\mathbf{R}$ , имеем  $\mathbf{R} \subseteq \mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ .

От решения  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$  требуется выполнение следующих условий:

R1.  $\mathbf{I} \subseteq \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \wedge \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^{-1} \wedge \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \circ \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} = \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$ ;

R2.  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathbf{R}$ ;

R3.  $\forall \tilde{\mathbf{R}} \ \tilde{\mathbf{R}} \subseteq \mathbf{R} \longrightarrow |\tilde{\mathbf{R}}| \leq |\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}|$ .

Как следует из леммы 1.4, свойство транзитивности рефлексивного симметричного отношения равносильно свойству идемпотентности.

На основании леммы 1.1 перейдем к эквивалентной формулировке задачи в модели бинарных матриц.

От матрицы решения  $[\tilde{\rho}_{ij}^0] \sim \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$  требуется выполнение следующих условий:

ρ1.  $[\delta_{ij}] \subseteq [\tilde{\rho}_{ij}^0] \wedge [\tilde{\rho}_{ij}^0] = [\tilde{\rho}_{ij}^0]^T \wedge [\tilde{\rho}^0 \bullet \tilde{\rho}_{ij}^0] = [\tilde{\rho}_{ij}^0]$ ;

ρ2.  $[\tilde{\rho}_{ij}^0] \subseteq [r_{ij}]$ ;

ρ3.  $\forall [\tilde{\rho}_{ij}] \ [\tilde{\rho}_{ij}] \subseteq [r_{ij}] \longrightarrow |\tilde{\rho}_{ij}| \leq |\tilde{\rho}_{ij}^0|$ .

Таким образом, матрица искомого решения должна быть рефлексивной, симметрической и идемпотентной.

Исходная задача эквивалентна построению матрицы, обладающей свойствами ρ1–ρ3.

## 3. Метод решения

Так как  $[r_{ij}] \subseteq [r \bullet r_{ij}]$ , то

$$\forall i, j \ r_{ij} \longrightarrow r \bullet r_{ij} = \forall i, j \ \neg r \bullet r_{ij} \longrightarrow \neg r_{ij}.$$

Это означает, что если  $r_{ij} = 1$ , то и  $r \bullet r_{ij} = 1$ , а если  $r \bullet r_{ij} = 0$ , то и  $r_{ij} = 0$ , в силу чего матрица  $[r \bullet r_{ij}]$  может отличаться от матрицы  $[r_{ij}]$  только появлением дополнительных единичных элементов на тех местах, на которых в матрице  $[r_{ij}]$  стояли нули.

Предлагаемый метод преобразования матрицы исходного отношения  $[r_{ij}]$  к рефлексивной, симметрической, идемпотентной матрице состоит в подходящем обнулении тех ее ненулевых элементов, из-за присутствия которых происходит нарушение свойства идемпотентности.

### 3.1. Построение сужений до отношения эквивалентности

Введем матрицу  $[\rho_{ij}]$ , положив на начальном этапе:  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}]$ .

Если  $[\rho_{ij}] = [\rho \bullet \rho_{ij}]$ , то искомое решение найдено и единственно. В противном случае переходим к следующему шагу.

Так как  $\rho \bullet \rho_{ij} = \bigvee_{k=1}^n \rho_{ik} \wedge \rho_{kj}$ , то для выполнения равенства  $[\rho_{ij}] = [\rho \bullet \rho_{ij}]$  необходимо обнулить все ненулевые конъюнкции  $\rho_{ik} \wedge \rho_{kj} = 1$  в ненулевых дизъюнциях  $\rho \bullet \rho_{ij} = 1$  с теми индексами, для которых  $\rho_{ij} = 0$ .

Иными словами, следует положить  $(\rho_{ik} := \rho_{ki} := 0) \vee (\rho_{kj} := \rho_{jk} := 0)$  для всех элементов матрицы  $[\rho_{ij}]$ , для которых выполняется условие  $\neg \rho_{ij} = \rho_{ik} = \rho_{kj} = 1$ , или, что то же самое, в заданной интерпретации  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}]$  выполняется формула  $\neg \rho_{ij} \wedge \rho_{ik} \wedge \rho_{kj}$ .

Последнее эквивалентно симметричному удалению из исходного отношения **R** пар элементов  $(u_i, u_s)$ ,  $(u_s, u_i)$  или  $(u_s, u_j)$ ,  $(u_j, u_s)$ , нарушающих свойство транзитивности.

Условие

$$\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}$$

будем называть условием обнуления элементов  $\rho_{ik}$ ,  $\rho_{ki}$  и  $\rho_{kj}$ ,  $\rho_{jk}$  относительно элемента  $\rho_{ij} = r_{ij}$ , а правила обнуления  $\rho_{ik}$ ,  $\rho_{ki}$  или  $\rho_{kj}$ ,  $\rho_{jk}$

$$\rho_{ik} := \rho_{ki} := 0 \text{ или } \rho_{kj} := \rho_{jk} := 0$$

будем называть атомарными сужениями относительно условия обнуления.

Матрицу, получаемую из матрицы  $[\rho_{ij}] = [r_{ij}]$  в результате описанных выше преобразований, обозначим  $[\bar{\rho}_{ij}]$ .

Приведенная схема преобразований матрицы отношения  $[r_{ij}]$  допускает неоднозначность в выборе атомарных сужений. Тем самым она порождает класс правил сужения, который мы будем обозначать  $\bar{e}_{[r_{ij}]} := \{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$ , а также соответствующий ему класс матриц  $\bar{\rho}_{[r_{ij}]} := \{[\bar{\rho}_{ij}^s]\}_{s=1}^m$ .

Класс правил сужения допускает очевидное представление формулой булевой алгебры, содержащей представления для атомарных сужений:

$$f_{[r_{ij}]}(\rho_{ij}) := \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{s=1}^n ((\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}) \wedge (\neg(\rho_{is} \vee \rho_{si}) \vee \neg(\rho_{sj} \vee \rho_{js})) \vee \neg(\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj})).$$

В дальнейшем будем опускать индекс  $[r_{ij}]$  в обозначениях классов  $\bar{e}$ ,  $\bar{\rho}$  и  $f(\rho_{ij})$ .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \{\bar{e}_s \mid \bar{e}_s : [r_{ij}] \rightarrow [\bar{\rho}_{ij}] \wedge f(\rho_{ij})\}; \\ \bar{\rho} &= \{[\bar{\rho}_{ij}^s] \mid [r_{ij}] \xrightarrow{\bar{e}_s} [\bar{\rho}_{ij}^s] \wedge \bar{e}_s \in \bar{e}\}. \end{aligned}$$

В силу свойств матрицы  $[r_{ij}]$  ( $r_{ii} = 1$ ) и определения правил сужения, матрица  $[\bar{\rho}_{ij}]$  будет оставаться рефлексивной и симметрической, то есть будет соответствовать рефлексивному, симметричному отношению. При этом  $[\bar{\rho}_{ij}] \subseteq [r_{ij}]$ .

Матрицы, построенные по какому-либо правилу сужения, могут и не обладать свойством идемпотентности  $[\bar{\rho}_{ij}] = [\bar{\rho} \bullet \bar{\rho}_{ij}]$ , так как на местах обнуленных элементов  $\bar{\rho}_{ij} = 0$  в матрице  $[\bar{\rho} \bullet \bar{\rho}_{ij}]$  могут вновь оказаться ненулевые элементы. Однако в

семействе правил  $\bar{e}$  обязательно найдутся и такие, которым будут соответствовать идемпотентные матрицы, и более того, матрицы, удовлетворяющие условию р3.

Подкласс рефлексивных, симметрических, идемпотентных матриц из семейства  $[\bar{\rho}] := \{[\bar{\rho}_{ij}^s]\}_{s=1}^m$ , то есть матриц, которым соответствуют какие-либо отношения эквивалентности, включенные в  $\mathbf{R}$ , будем обозначать  $[\bar{\rho}] := \{[\bar{\rho}_{ij}^{s_1}]\}_{s_1=1}^{m_1} \subseteq [\bar{\rho}]$ , а класс соответствующих правил сужения обозначим  $\tilde{e} := \{\tilde{e}_{s_1}\}_{s_1=1}^{m_1} \subseteq \bar{e}$ .

Заметим, что если  $\tilde{\mathbf{R}}$  — отношение эквивалентности, а  $[u]$  — класс эквивалентности, содержащий  $u \in U$ , то условие  $(u_i, u_j) \in \tilde{\mathbf{R}}$  равносильно  $u_j \in [u_i]$ .

**Теорема 3.1.** Для всякого рефлексивного, симметричного, но не транзитивного, отношения  $\mathbf{R}$  в классе правил сужения  $\bar{e}$  существует правило  $\tilde{e}_0$ , после выполнения которого матрица  $[\tilde{\rho}_{ij}^0]$ , будет удовлетворять условиям р1–р3.

**Доказательство.** Пусть  $\tilde{\mathbf{R}}_m$  — сужение заданного рефлексивного, симметричного отношения  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности максимальной мощности, а  $[\tilde{\rho}_{ij}^0]$ ,  $[r_{ij}]$  — соответствующие им матрицы.

Обозначим  $U/\tilde{\mathbf{R}}_m$  — фактор-множество  $U$  по  $\tilde{\mathbf{R}}_m$ , а  $[u]$  — класс эквивалентности, содержащий  $u \in U$ .

В силу того, что отношение эквивалентности  $\tilde{\mathbf{R}}_m$  имеет максимальную мощность, добавление к нему любых пар  $(u_{i_0}, u_{j_0}), (u_{j_0}, u_{i_0}) \in \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathbf{R}}_m$  будет нарушать свойство транзитивности, поэтому элементы  $u_{i_0}$  и  $u_{j_0}$  будут принадлежать различным классам эквивалентности, то есть  $[u_{i_0}] \cap [u_{j_0}] = \emptyset$ .

В силу свойств отношения эквивалентности:

$$\begin{aligned} \forall k_1, k_2 \quad u_{k_1} \in [u_{i_0}] \wedge u_{k_2} \in [u_{i_0}] &\longrightarrow (u_{k_1}, u_{k_2}) \in \tilde{\mathbf{R}}_m \subseteq \mathbf{R}; \\ \forall l_1, l_2 \quad u_{l_1} \in [u_{j_0}] \wedge u_{l_2} \in [u_{j_0}] &\longrightarrow (u_{l_1}, u_{l_2}) \in \tilde{\mathbf{R}}_m \subseteq \mathbf{R}. \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \forall k_1, k_2 \quad u_{k_1} \in [u_{i_0}] \wedge u_{k_2} \in [u_{i_0}] &\longrightarrow r_{k_1 k_2} = 1; \\ \forall l_1, l_2 \quad u_{l_1} \in [u_{j_0}] \wedge u_{l_2} \in [u_{j_0}] &\longrightarrow r_{l_1 l_2} = 1. \end{aligned}$$

Покажем, что каждый из ненулевых элементов  $r_{i_0 j_0}$  матрицы отношения  $[r_{ij}]$ , соответствующий паре  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathbf{R}}_m$ , удовлетворяет условию обнуления относительно некоторого нулевого элемента  $r_{i^* j^*}$ .

Если отношение  $\mathbf{R}$  таково, что

$$(\exists k_0 \quad u_{k_0} \in [u_{i_0}] \wedge (u_{k_0}, u_{j_0}) \notin \mathbf{R}) \vee (\exists l_0 \quad u_{l_0} \in [u_{j_0}] \wedge (u_{i_0}, u_{l_0}) \notin \mathbf{R}),$$

то есть

$$(\exists k_0 \quad u_{k_0} \in [u_{i_0}] \wedge r_{k_0 j_0} = r_{j_0 k_0} = 0) \vee (\exists l_0 \quad u_{l_0} \in [u_{j_0}] \wedge r_{i_0 l_0} = r_{l_0 i_0} = 0),$$

то в качестве  $r_{i^* j^*}$  достаточно взять элемент  $r_{j_0 k_0}$ , так как в этом случае выполняется  $\neg r_{j_0 k_0} \wedge r_{k_0 i_0} \wedge r_{i_0 j_0}$ , или элемент  $r_{i_0 l_0}$ , для которого выполняется  $\neg r_{i_0 l_0} \wedge r_{l_0 j_0} \wedge r_{j_0 i_0}$ .

Предположим, что для некоторого элемента  $r_{i_0 j_0}$  такого, что  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathbf{R}}_m$ , условия обнуления не существует.

Из ранее сказанного следует, что в таком случае

$$\forall k_0 \quad u_{k_0} \in [u_{i_0}] \longrightarrow (u_{k_0}, u_{j_0}) \in \mathbf{R} \wedge \forall l_0 \quad u_{l_0} \in [u_{j_0}] \longrightarrow (u_{i_0}, u_{l_0}) \in \mathbf{R}.$$

Это означает, что в отношение  $\mathbf{R}$  включены еще два отношения эквивалентности:  $\tilde{\mathbf{R}}_1$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_2$ , первое из которых получается из отношения  $\tilde{\mathbf{R}}_m$  в результате удаления из класса эквивалентности  $[u_{i_0}]$  элемента  $u_{i_0}$  и добавления его в класс  $[u_{j_0}]$ , а второе — в результате удаления из класса эквивалентности  $[u_{j_0}]$  элемента

$u_{j_0}$  и добавления его в класс  $[u_{i_0}]$ . При этом остальные классы эквивалентности остаются неизменными.

Обозначим  $U/\tilde{R}_1$ ,  $U/\tilde{R}_2$  — фактор-множества  $U$  по  $\tilde{R}_1$ ,  $\tilde{R}_2$ , а  $[u]_1$ ,  $[u]_2$  — соответствующие классы эквивалентности, содержащие  $u \in U$ .

В силу того, что

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_m| &= \sum_{[u] \in U/R_m} |[u]|^2, \\ |\tilde{R}_1| &= \sum_{[u]_1 \in U/R_1} |[u]_1|^2, \\ |\tilde{R}_2| &= \sum_{[u]_2 \in U/R_2} |[u]_2|^2, \end{aligned}$$

то мощности отношений  $|\tilde{R}_m|$ ,  $|\tilde{R}_1|$ ,  $|\tilde{R}_2|$  отличаются только двумя слагаемыми, которые соответствуют мощностям классов эквивалентности, подвергшихся изменениям.

Обозначим  $[u]_{1-i_0} := [u_{i_0}] \setminus \{u_{i_0}\}$  — класс эквивалентности из  $U/R_1$ , полученный в результате удаления из класса  $[u_{i_0}]$  элемента  $u_{i_0}$ , а  $[u]_{2-j_0} := [u_{j_0}] \setminus \{u_{j_0}\}$  — класс эквивалентности из  $U/R_2$ , полученный в результате удаления из класса  $[u_{j_0}]$  элемента  $u_{j_0}$ .

Обозначим  $n_1 := |[u_{i_0}]|$ ,  $n_2 := |[u_{j_0}]|$  — мощности классов эквивалентности  $[u_{i_0}]$  и  $[u_{j_0}]$ , тогда

$$\begin{aligned} |[u]_{1-i_0}| &= n_1 - 1; \\ |[u_{j_0}]_1| &= n_2 + 1; \\ |[u]_{2-j_0}| &= n_2 - 1; \\ |[u_{i_0}]_2| &= n_1 + 1. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} |\tilde{R}_1| - |\tilde{R}_m| &= (n_1 - 1)^2 + (n_2 + 1)^2 - n_1^2 - n_2^2 = 2(n_2 - n_1 + 1); \\ |\tilde{R}_2| - |\tilde{R}_m| &= (n_1 + 1)^2 + (n_2 - 1)^2 - n_1^2 - n_2^2 = 2(n_1 - n_2 + 1). \end{aligned}$$

Так как

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad n_2 - n_1 + 1 > 0 \vee n_1 - n_2 + 1 > 0,$$

то отношение  $\tilde{R}_m$  не может иметь максимальную мощность.

Полученное противоречие доказывает, что каждый из ненулевых элементов  $r_{i_0 j_0}$  матрицы отношения  $[r_{ij}]$ , соответствующий паре  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \mathbf{R} \setminus \tilde{R}_m$ , удовлетворяет условию обнуления относительно некоторого нулевого элемента  $r_{i^* j^*}$ .

Остается доказать следующую лемму.

**Лемма 3.1.** Если  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \tilde{R}_1$ , где  $\tilde{R}_1$  является сужением  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности, и существует условие обнуления элементов  $\rho_{i_0 j_0}$ ,  $\rho_{j_0 i_0}$ , то существует и атомарное сужение, соответствующее этому условию, которое не изменяет элемент  $\rho_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0}$  и ни один из элементов  $\rho_{i_0 k} = \rho_{k i_0} = r_{k j_0}$  таких, что  $u_k \in [u_{i_0}]_1 = [u_{j_0}]_1$ .

**Доказательство.** С учетом симметричности матрицы  $[r_{ij}]$  условие обнуления элемента  $\rho_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0}$  относительно некоторого элемента  $r_{i_0 k}$  или  $r_{k j_0}$  может выполняться в следующих случаях:

$$\begin{aligned} r_{i_0 s} &= 0 \wedge r_{i_0 j_0} = 1 \wedge r_{j_0 s} = 1; \\ r_{s j_0} &= 0 \wedge r_{i_0 j_0} = 1 \wedge r_{i_0 s} = 1. \end{aligned}$$

Каждому из условий соответствует дизъюнкция атомарных сужений при  $s \neq i_0 \wedge \wedge s \neq j_0$ :

$$\begin{aligned} r_{i_0 s} &= 0 \wedge r_{i_0 j_0} = 1 \wedge r_{j_0 s} = 1, & \rho_{i_0 j_0} &:= 0 \wedge \rho_{j_0 i_0} := 0 \vee \rho_{j_0 s} := 0 \wedge \rho_{s j_0} := 0; \\ r_{s j_0} &= 0 \wedge r_{i_0 j_0} = 1 \wedge r_{i_0 s} = 1, & \rho_{j_0 i_0} &:= 0 \wedge \rho_{j_0 i_0} := 0 \vee \rho_{i_0 s} := 0 \wedge \rho_{s i_0} := 0. \end{aligned}$$

Покажем, что если  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \tilde{\mathbf{R}}_1$ , то в каждой дизъюнкции атомарных сужений, соответствующей какому-либо из условий обнуления, имеется атомарное сужение, не изменяющее элементы  $\rho_{i_0 j_0} = \rho_{j_0 i_0} = r_{i_0 j_0}$  и ни один из элементов  $\rho_{i_0 k} = \rho_{k i_0} = r_{k j_0}$ , для которых  $u_k \in [u_{i_0}]_1 = [u_{j_0}]_1$ .

Так как  $\tilde{\mathbf{R}}_1 \subseteq \mathbf{R}$  и по предположению  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \tilde{\mathbf{R}}_1$ , то  $u_{j_0} \in [u_{i_0}]_1$ .

Рассмотрим первое условие при некотором  $s := s^*$ :

$$r_{i_0 s^*} = 0 \wedge r_{i_0 j_0} = 1 \wedge r_{j_0 s^*} = 1$$

и покажем, что  $u_{s^*} \notin [u_{i_0}]_1$ .

Действительно, если  $u_{s^*} \in [u_{i_0}]_1$ , то это влечет

$$r_{i_0 s^*} = 1 \wedge r_{i_0 j_0} = 1 \wedge r_{j_0 s^*} = 1,$$

что противоречит рассматриваемому условию.

Следовательно,  $u_{s^*} \in \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathbf{R}}_1$ , и атомарное сужение  $\rho_{j_0 s^*} := 0 \wedge \rho_{s^* j_0} := 0$  обладает всеми требуемыми свойствами.

Оставшийся случай выполнения условий обнуления рассматривается аналогично.

Так как каждая пара  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathbf{R}}_m$  удовлетворяет некоторому условию обнуления, входящему в формулу  $f(\rho_{ij})$ , то по структуре формулы будет существовать правило  $\bar{e}_s$  одновременного обнуления тех и только тех элементов  $\rho_{i_0 j_0} = r_{i_0 j_0}$ , для которых  $(u_{i_0}, u_{j_0}) \in \mathbf{R} \setminus \tilde{\mathbf{R}}_m$ . Так как  $[r_{ij}] \xrightarrow{\bar{e}_s} [\bar{\rho}_{ij}^0]$ , то это и есть искомое правило сужения  $\tilde{e}_0$ .

**Замечание.** Из теоремы 3.1 следует, что после применения произвольного правила сужения  $\bar{e}_s : [r_{ij}] \rightarrow [\bar{\rho}_{ij}]$  к матрице исходного отношения результирующая матрица  $[\rho_{ij}]$  будет соответствовать отношению  $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}$ , для которого всегда найдется отношение эквивалентности такое, что  $\tilde{\mathbf{R}} \subseteq \mathbf{R}_1$ .

Из теоремы 3.1 также вытекает существование такой последовательности атомарных сужений, соответствующих различным условиям обнуления, после применения которых результирующее отношение будет отношением эквивалентности, то есть таким, для которого найдется  $\tilde{\mathbf{R}} \supseteq \mathbf{R}_1$ . Однако не всякое отношение, полученное в результате применения правила сужения, построенного по произвольной последовательности атомарных сужений, которые соответствуют различным условиям обнуления, будет обладать свойством идемпотентности, то есть являться отношением эквивалентности.

Воспользуемся формулой  $f(\rho_{ij})$  для нахождения решения поставленной задачи. Понятно, что для явного построения правил сужения по формуле  $f(\rho_{ij})$ , которые приводили бы исходную матрицу  $[r_{ij}]$  к матрице  $[\rho_{ij}]$ , удовлетворяющей условиям р1–р3, необходимо перейти от конъюнктивной формы представления  $f(\rho_{ij})$  к более удобной равносильной, например, дизъюнктивной форме. В дальнейшем будем представлять правила сужения элементов матрицы  $[\rho_{ij}]$  полиномиальными аналогами ДНФ булевой алгебры или полиномов Жегалкина.

### 3.2. Полиномиальное представление правил сужения

Рассмотрим свободную алгебру термов, образованных из индексированных переменных

$$\{c_{ijk}, d_{ijk}, x_{ij} \mid i, j, k \in 1..n\},$$

парных скобок  $(, )$ , символов констант  $\{0, 1\}$  и сигнатуры  $\{., \oplus\}$  типа  $(2, 2)$ .

Будем обозначать термы индексированными символами  $t_k$ ,  $t'_k$ ,  $\bar{t}_k$ ,  $\tilde{t}_k$  и примем следующие обозначения при  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^m t_k := t_1 \oplus \dots \oplus t_m, \quad \prod_{k=1}^m t_k := t_1 \cdot \dots \cdot t_m.$$

Длину терма  $t_k$  будем обозначать  $|t_k|$ .

### 3.2.1. Представление аналогом ДНФ

1. Рассмотрим терм

$$t_0(c_{ijk}, d_{ijk}, x_{ij}) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n (c_{ijk} \cdot (x_{ik} \oplus x_{jk}) \oplus d_{ijk}).$$

2. Определим биекцию  $\phi : D \rightarrow \{0, 1\}$  при помощи правила:  $\phi(0) = 0$ ,  $\phi(1) = 1$ . Определим терм  $t_1(x_{ij})$  при помощи двух последовательных подстановок:

$$t_1(x_{ij}) := t_0(c_{ijk}, d_{ijk}, x_{ij}) \{ \phi(\neg(\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj})) / d_{ijk} \} \{ \phi(\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}) / c_{ijk} \}.$$

3. Определим правила преобразования термов относительно символов констант (правило сокращения констант):

$c_1$  левое умножение на ноль:  $0 \cdot t_1 \mapsto 0$ .

$c_2$  левое и правое умножение на единицу:  $1 \cdot t_1 \mapsto t_1$ ;  $t_1 \cdot 1 \mapsto t_1$ .

$c_3$  левое и правое сложение с нулем:  $0 \oplus t_1 \mapsto t_1$ ;  $t_1 \oplus 0 \mapsto t_1$ .

После применения преобразований  $c_1$ – $c_3$  к терму  $t_1(x_{ij}) \xrightarrow{c} t_2(x_{ij})$ , результирующий терм  $t_2(x_{ij})$  примет вид при  $m_0 < n^3$ :

$$t_2(x_{ij}) = \prod_{s=1}^{m_0} (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}).$$

В силу свойств матрицы  $[r_{ij}]$ , он не будет содержать аддитивных вхождений  $(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})$  с равными значениями индексов и индексных пар, то есть  $i_s \neq k_s$ ,  $j_s \neq k_s$ ,  $i_s \neq j_s$ .

Как и ранее, в той же интерпретации терм  $t_2(x_{ij})$  останется равносильным формуле  $f(\rho_{ij})$ .

4. Определим правило симметризации индексов переменных, входящих в терм:

$S$  симметризация:

$$x_{ij} \mapsto \begin{cases} x_{ji}, & i > j \\ x_{ij}, & i \leq j \end{cases}.$$

Симметризованные индексные пары будем обозначать  $(\underline{i_s}, \underline{k_s})$ , а соответствующие переменные —  $x_{\underline{i_s k_s}}$ .

После применения преобразования симметризации к терму  $t_2(x_{ij}) \xrightarrow{S} t_3(x_{ij})$  результирующий терм  $t_3(x_{ij})$  не будет содержать вхождений переменных с симметричными значениями индексов, так как элементы всех индексных пар  $(\underline{i_s}, \underline{k_s})$  и  $(\underline{j_s}, \underline{k_s})$  будут находиться в отношении порядка: первый строго меньше второго.

Если интерпретировать терм  $t_3(x_{ij})$  как формулу булевой алгебры при помощи ранее введенной биекции  $\phi^{-1} : \{0, 1\} \rightarrow D$ , дополнительно полагая при любых



$\rho_{i_s k_s}, \rho_{j_s k_s}, \rho_{k_s i_s}, \rho_{k_s j_s} \in D \wedge i_s, j_s, k_s \in 1..n$ :

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(x_{i_s k_s}) &:= \neg(\rho_{i_s k_s} \vee \rho_{k_s i_s}), \\ \phi^{-1}(x_{j_s k_s}) &:= \neg(\rho_{k_s j_s} \vee \rho_{j_s k_s}), \\ \phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) &:= \phi^{-1}(x_{i_s k_s}) \vee \phi^{-1}(x_{j_s k_s}), \\ \phi^{-1}(\emptyset \cdot (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})) &:= 0 \wedge \phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) = 0, \\ \phi^{-1}(I \cdot (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})) &:= 1 \wedge \phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) = \phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}), \\ \phi^{-1}(\emptyset \cdot (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) \oplus I) &:= \phi^{-1}(\emptyset \cdot (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})) \vee 1 = 1, \\ \phi^{-1}(I \cdot (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) \oplus \emptyset) &:= \phi^{-1}(I \cdot (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})) \vee 0 = \phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}), \\ \phi^{-1}\left(\prod_{s=1}^{m_0} (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})\right) &:= \bigwedge_{s=1}^{m_0} \phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}),\end{aligned}$$

то с учетом условия симметрии на значения, принимаемые переменными  $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ , он будет равносильен формуле  $f(\rho_{ij})$ .

5. Определим правила преобразования термов, содержащих символы сигнатуры  $\{\cdot, \oplus\}$ , в соответствии с частью правил алгебры  $\langle D, \{\wedge, \vee\} \rangle$ :

- $d_1$  ассоциативность:  $t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) \leftrightarrow (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 \leftrightarrow t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ .
- $d_2$  коммутативность:  $t_2 \cdot t_1 \leftrightarrow t_1 \cdot t_2$ ;  $t_2 \oplus t_1 \leftrightarrow t_1 \oplus t_2$ .
- $d_3$  дистрибутивность:  $t_1 \cdot (t_2 \oplus t_3) \mapsto (t_1 \cdot t_2) \oplus (t_1 \cdot t_3)$ .
- $d_4$  идемпотентность:  $t_1 \cdot t_1 \mapsto t_1$ ;  $t_1 \oplus t_1 \mapsto t_1$ .

После применения преобразований  $d_1$ – $d_4$  к терму  $t_3(x_{ij}) \xrightarrow{d} t_4(x_{ij})$  результирующий терм  $t_4(x_{ij})$  примет вид при  $m \leq 2^{m_0}$ ,  $m_s \leq n^2$ :

$$t_4(x_{ij}) = \sum_{s=1}^m \prod_{k_s=1}^{m_s} x_{i_{k_s} j_{k_s}}.$$

При прежних условиях он будет равносильен формуле  $f(\rho_{ij})$ .

По смыслу построения каждое мультипликативное слагаемое  $\bar{t}_s := \prod_{k_s=1}^{m_s} x_{i_{k_s} j_{k_s}}$  определяет один из возможных вариантов обнуления элементов матрицы  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}]$  по правилам сужения  $\bar{e}_s$ :

$\bar{e}_s$  сужение:

$$(\rho_{ij}, \rho_{ji}) \mapsto \begin{cases} (0, 0), & x_{ij} \text{ входит в } \bar{t}_s = \prod_{k_s=1}^{m_s} x_{i_{k_s} j_{k_s}} \\ (\rho_{ij}, \rho_{ji}), & \text{— в противном случае} \end{cases}.$$

Мультипликативные термы  $\prod_{k_s=1}^{m_s} x_{i_{k_s} j_{k_s}}$ , которым соответствуют правила сужения исходного отношения до отношения эквивалентности, будем обозначать  $\tilde{t}$ .

**Пример 2.** Для отношения из примера 1

$$\mathbf{R} \sim [r_{ij}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Терм:  $t_0 := \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^3 \prod_{k=1}^3 (c_{ijk} \cdot (x_{ik} \oplus x_{jk}) \oplus d_{ijk})$ .

2. Подстановка:  $t_1 := t_0(c_{ijk}, d_{ijk}, x_{ij})\{\phi(\neg(\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}))/d_{ijk}\} \{\phi(\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj})/c_{ijk}\}$ .

$$\begin{aligned} t_1 = & (\emptyset \cdot (x_{11} \oplus x_{11}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{12} \oplus x_{12}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{13} \oplus x_{13}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{11} \oplus x_{21}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{12} \oplus x_{22}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{13} \oplus x_{23}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{11} \oplus x_{31}) \oplus I) \cdot (I \cdot (x_{12} \oplus x_{32}) \oplus \emptyset) \cdot (\emptyset \cdot (x_{13} \oplus x_{33}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{21} \oplus x_{11}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{22} \oplus x_{12}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{23} \oplus x_{13}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{21} \oplus x_{21}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{22} \oplus x_{22}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{23} \oplus x_{23}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{21} \oplus x_{31}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{22} \oplus x_{32}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{23} \oplus x_{33}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{31} \oplus x_{11}) \oplus I) \cdot (I \cdot (x_{32} \oplus x_{12}) \oplus \emptyset) \cdot (\emptyset \cdot (x_{33} \oplus x_{13}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{31} \oplus x_{21}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{32} \oplus x_{22}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{33} \oplus x_{23}) \oplus I) \cdot \\ & (\emptyset \cdot (x_{31} \oplus x_{31}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{32} \oplus x_{32}) \oplus I) \cdot (\emptyset \cdot (x_{33} \oplus x_{33}) \oplus I). \end{aligned}$$

3. Сокращение констант:  $t_2 = \prod_{s=1}^2 (x_{isk_s} \oplus x_{jsk_s})$ .

$$t_2 = (x_{12} \oplus x_{32}) \cdot (x_{32} \oplus x_{12}).$$

4. Симметризация:  $t_3 = (x_{12} \oplus x_{23}) \cdot (x_{23} \oplus x_{12})$ .

5. Преобразования по правилам  $d_2$ ,  $d_4$ :  $t_4 = x_{12} \oplus x_{23}$ .

Сужение по правилам  $\tilde{e}_s^0$ :  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}] \xrightarrow{\tilde{e}_s^0} [\tilde{\rho}_{ij}^s]$ .

$\tilde{e}_0^1$ :  $(\rho_{12}, \rho_{21}) := (0, 0)$  и  $\tilde{e}_0^2$ :  $(\rho_{23}, \rho_{32}) := (0, 0)$ :

$$[\tilde{\rho}_{ij}^{01}] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [\tilde{\rho}_{ij}^{02}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 3.2.2. Представление аналогом полинома Жегалкина

Хотя представление правил сужения аналогом ДНФ и дает возможность найти сужения исходного отношения до отношения эквивалентности максимальной мощности, оно не исчерпывает всех сужений (не обязательно максимальной мощности), которые можно получить, применяя предложенный метод.

По смыслу построения более полный набор правил получается из семейства  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$  в результате дизъюнкции определяющих их условий.

На основании сказанного определим операцию дизъюнкции правил  $\bar{e}_{s_1} \vee \bar{e}_{s_2}$  из семейства  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$ :

$\bar{e}_{s_1} \vee \bar{e}_{s_2}$  сужение:

$$(\rho_{ij}, \rho_{ji}) \mapsto \begin{cases} (0, 0), & x_{ij} \text{ входит в } \prod_{k_{s_1}=1}^{m_{s_1}} x_{ik_{s_1} j_{k_{s_1}}} \text{ или } \prod_{k_{s_2}=1}^{m_{s_2}} x_{ik_{s_2} j_{k_{s_2}}} \\ (\rho_{ij}, \rho_{ji}), & \text{— в противном случае} \end{cases}.$$

**Пример 3.** Для сужений из примера 2

$\tilde{e}_3 := \tilde{e}_0^1 \vee \tilde{e}_0^2$ :  $(\rho_{12}, \rho_{21}) := (0, 0) \wedge (\rho_{23}, \rho_{32}) := 0$ :

$$[\tilde{\rho}_{ij}^1] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пополненный набор правил может быть получен из семейства  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$  его замыканием относительно дизъюнкции.

По смыслу операции сложения по модулю два пополненный набор правил сужения также можно получить при помощи полинома Жегалкина  $F(\rho_{ij})$ , равносильного формуле  $f(\rho_{ij})$ .

$$F(\rho_{ij}) := \bigwedge_{i=1}^n \bigwedge_{j=1}^n \bigwedge_{k=1}^n (c_{ijk} \wedge ((1 \boxplus \rho_{ik} \boxplus \rho_{ki} \boxplus \rho_{ik} \wedge \rho_{ki}) \boxplus (1 \boxplus \rho_{kj} \boxplus \rho_{jk} \boxplus \rho_{kj} \wedge \rho_{jk}) \boxplus (1 \boxplus \rho_{ik} \boxplus \rho_{ki} \wedge \rho_{ik} \wedge \rho_{ki}) \wedge (1 \boxplus \rho_{kj} \boxplus \rho_{jk} \boxplus \rho_{kj} \wedge \rho_{jk})) \boxplus 1 \boxplus c_{ijk}) \{ \neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj} // c_{ijk} \} = f(\rho_{ij}).$$

1. Рассмотрим терм

$$t_0(c_{ijk}, x_{ij}) := \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \prod_{k=1}^n (c_{ijk} \cdot (x_{ik} \oplus x_{jk} \oplus x_{ik} \cdot x_{jk}) \oplus 1 \oplus c_{ijk}).$$

2. Определим биекцию  $\Phi : D \rightarrow \{0, 1\}$  при помощи правила:  $\Phi(0) = 0$ ,  $\Phi(1) = 1$ . Определим терм  $t_1(x_{ij})$  при помощи подстановки:

$$t_1(x_{ij}) := t_0(c_{ijk}, x_{ij}) \{ \Phi(\neg r_{ij} \wedge r_{ik} \wedge r_{kj}) // c_{ijk} \}.$$

3. Определим правила преобразования термов относительно символов констант (правило сокращения констант):

$C_1$  левое умножение на ноль:  $0 \cdot t_1 \mapsto 0$ .

$C_2$  левое и правое умножение на единицу:  $1 \cdot t_1 \mapsto t_1$ ;  $t_1 \cdot 1 \mapsto t_1$ .

$C_3$  левое и правое сложение с нулем:  $0 \oplus t_1 \mapsto t_1$ ;  $t_1 \oplus 0 \mapsto t_1$ .

$C_4$  сложение единицы:  $1 \oplus 1 \mapsto 0$ .

После применения преобразований  $C_1$ –  $C_4$  к терму  $t_1(x_{ij}) \xrightarrow{C} t_2(x_{ij})$  результирующий терм  $t_2(x_{ij})$  примет вид:

$$t_2(x_{ij}) = \prod_{k=1}^{M_0} (x_{i_k s_k} \oplus x_{j_k s_k} \oplus x_{i_k s_k} \cdot x_{j_k s_k}).$$

4. Проводя преобразование, аналогичное преобразованию симметризации пункта 4 предыдущего подраздела, получаем терм

$$t_3(x_{ij}) = \prod_{s=1}^{M_0} (\underline{x_{i_s k_s}} \oplus \underline{x_{j_s k_s}} \oplus \underline{x_{i_s k_s}} \cdot \underline{x_{j_s k_s}}).$$

Если интерпретировать его как полином Жегалкина при помощи ранее введенной биекции  $\Phi^{-1} : \{0, 1\} \rightarrow D$ , дополнительно полагая при любых  $\rho_{i_s k_s}, \rho_{j_s k_s}, \rho_{k_s i_s}, \rho_{k_s j_s} \in D \wedge i_s, j_s, k_s \in 1..n$ :

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(x_{i_s k_s}) &:= 1 \boxplus \rho_{i_s k_s} \boxplus \rho_{k_s i_s} \boxplus \rho_{i_s k_s} \wedge \rho_{k_s i_s}, \\ \Phi^{-1}(x_{j_s k_s}) &:= 1 \boxplus \rho_{j_s k_s} \boxplus \rho_{k_s j_s} \boxplus \rho_{j_s k_s} \wedge \rho_{k_s j_s}, \\ \Phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) &:= \Phi^{-1}(x_{i_s k_s}) \boxplus \Phi^{-1}(x_{j_s k_s}), \\ \Phi^{-1}(x_{i_s k_s} \cdot x_{j_s k_s}) &:= \Phi^{-1}(x_{i_s k_s}) \wedge \Phi^{-1}(x_{j_s k_s}), \\ \Phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s} \oplus x_{i_s k_s} \cdot x_{j_s k_s}) &:= \Phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}) \vee \Phi^{-1}(x_{i_s k_s} \cdot x_{j_s k_s}), \\ \Phi^{-1}(\prod_{s=1}^{M_0} (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s} \oplus x_{i_s k_s} \cdot x_{j_s k_s})) &:= \bigwedge_{s=1}^{M_0} \Phi^{-1}(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s} \oplus x_{i_s k_s} \cdot x_{j_s k_s}), \end{aligned}$$

то он будет равносильен  $F(\rho_{ij})$ .

5. Определим правила преобразования термов, содержащих символы сигнатуры  $\{ \cdot, \oplus \}$ , в соответствии с частью правил алгебры  $\langle D, \{ \wedge, \boxplus \} \rangle$ :

$D_1$  ассоциативность:  $t_1 \cdot (t_2 \cdot t_3) \leftrightarrow (t_1 \cdot t_2) \cdot t_3 \leftrightarrow t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ .

$D_2$  коммутативность:  $t_2 \cdot t_1 \leftrightarrow t_1 \cdot t_2$ ;  $t_2 \oplus t_1 \leftrightarrow t_1 \oplus t_2$ .

$D_3$  дистрибутивность:  $t_1 \cdot (t_2 \oplus t_3) \mapsto (t_1 \cdot t_2) \oplus (t_1 \cdot t_3)$ .

$D_4$  идемпотентность:  $t_1 \cdot t_1 \mapsto t_1$ .

$D_5$  взаимнообратность:  $x \oplus x \mapsto 0$ .

После применения преобразований  $D_1$ – $D_5$  к терму  $t_3(x_{ij}) \xrightarrow{D} t_4(x_{ij})$  результирующий терм  $t_4(x_{ij})$  примет вид:

$$t_4(x_{ij}) = \sum_{s=1}^M \prod_{k_s=1}^{M_s} \underline{x_{i_{k_s} j_{k_s}}}.$$

По аналогии с предыдущим подразделом определяем правила сужения  $\bar{E}_s$ :

$\bar{E}_s$  сужение:

$$(\rho_{ij}, \rho_{ji}) \mapsto \begin{cases} (0, 0), & x_{ij} \text{ входит в } \bar{t}_s := \prod_{k_s=1}^{M_s} \underline{x_{i_{k_s} j_{k_s}}} \\ (\rho_{ij}, \rho_{ji}), & \text{в противном случае} \end{cases}.$$

Как и ранее, примем обозначения  $\bar{E} := \{\bar{E}_s\}_{s=1}^M$ ,  $\tilde{E} := \{\tilde{E}_s\}_{s=1}^{M_1} \subseteq \bar{E}$  — подкласс правил сужения отношения  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности.

Очевидно, выполняется включение  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m \subseteq \{\bar{E}_s\}_{s=1}^M$ .

### 3.3. Нахождение правил сужения максимальной мощности

По смыслу построений матрица  $[\bar{\rho}_{ij}^s]$ , удовлетворяющая свойствам  $\rho_1$ – $\rho_3$ , будет задаваться правилом сужения  $\tilde{e}_s$  или  $\tilde{E}_s$ , которое соответствует какому-либо мультипликативному терму  $\tilde{t}_s$  минимальной длины  $|\tilde{t}_s|$ , определяющему сужение исходного отношения до отношения эквивалентности.

Все такие правила содержатся в семействе  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$ .

Построение семейства  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$  опирается на выполнение преобразований, определенных в подразделе 4.1.1, наиболее ресурсоемкими из которых являются преобразования по правилу  $d_3$ . Для построения всего семейства  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$  их потребуется выполнить  $2^{m_0}$  раз, где  $m_0 < n^3$  — число аддитивных сомножителей в мультипликативном терме

$$t_3(x_{ij}) = \prod_{s=1}^{m_0} (\underline{x_{i_s k_s}} \oplus \underline{x_{j_s k_s}}).$$

Термы минимальной длины могут быть найдены без предварительного построения семейства  $\{\bar{e}_s\}_{s=1}^m$ , если для каждой из переменных  $\underline{x_{i_s k_s}}$ ,  $\underline{x_{j_s k_s}}$  известно число их совместных вхождений  $N_{j_l k_l}^{i_s k_s}$  в аддитивные сомножители, образующие терм  $t'_3(x_{ij})$ , который получается из терма  $t_3(x_{ij})$  в результате нормализующего преобразования  $d_2 \circ d_4$ .

#### 3.3.1. Построение термов минимальной длины

1. Произведем над симметризованным термом  $t_3(x_{ij})$  преобразования по правилам  $d_2$  для операции  $\oplus$  и  $d_4$  для операции  $\cdot$ :

$$d_2 \circ d_4 \text{ композиция: } t_3(x_{ij}) \xrightarrow{d_2 \circ d_4} t'_3(x_{ij}) = \prod_{s=1}^{m'_0} (\underline{x_{i_s k_s}} \oplus \underline{x_{j_s k_s}}).$$

После их выполнения результирующий терм  $t'_3(x_{ij})$  не будет содержать одинаковых аддитивных вхождений  $(\underline{x_{i_s k_s}} \oplus \underline{x_{j_s k_s}})$  и  $|t'_3(x_{ij})| \leq |t_3(x_{ij})|$ .

Определим число совместных вхождений правилом:

$$N_{j_l k_l}^{i_s k_s} := N_{i_s k_s}^{j_l k_l} := \begin{cases} 1, & \underline{x_{i_s k_s}} \oplus \underline{x_{j_l k_l}} \text{ входит в } t'_3(x_{ij}), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу свойств матрицы  $[r_{ij}]$  получаем:  $N_{i_s k_s}^{i_s k_s} = 0$ .

Понятно, что общее число вхождений переменной  $x_{i_l k_l}$  в терм  $t'_3(x_{ij})$  может быть найдено простым суммированием чисел  $N_{j_l k_l}^{i_s k_s}$  при фиксированных значениях ин-

дексов  $i_l, k_l$ :  $N_{j_l k_l} := \sum_{s=1}^{m'_0} N_{j_l k_l}^{i_s k_s}$ .

2. Определим прямым перебором числа  $N_{j_l p_l}^{i_s k_s}$ ,  $m'_0$  и вычислим  $N_{j_l k_l}$ .

На вычисление вхождений:

$$\begin{aligned} t'_3(x_{ij}) &\rightarrow m'_0, \\ t'_3(x_{ij}) &\rightarrow \{N_{j_l p_l}^{i_s k_s}\}, \\ N_{j_l k_l} &:= \sum_{s=1}^{m'_0} N_{j_l k_l}^{i_s k_s}. \end{aligned}$$

3. Упорядочим числа  $N_{i_l s_l}$  по убыванию:

Ст сортировка:

$$\{N_{i_l k_l}\} \mapsto N_{i_{s_1} k_{s_1}}^1 \geq N_{i_{s_2} k_{s_2}}^2 \geq \dots \{N_{i_{s_q} k_{s_q}}^q\}_{q=1}^{m''_0}, \quad m''_0 \leq 2m'_0.$$

Так как длина мультипликативного терма  $\prod_{s=1}^{m_s} x_{i_{k_s} j_{k_s}}$ , содержащего  $N$  вхождений одной и той же переменной, уменьшается на  $N - 1$  в результате каждого преобразования, проводимого по правилу  $d_4$  для операции  $\cdot$ , то искомые термы минимальной длины  $t_s$  будут составлены из переменных  $x_{i_{k_s} j_{k_s}}$ , имеющих максимальную сумму чисел вхождений  $N_{i_l k_l}$  за вычетом общего числа их совместных вхождений.

4. Выберем из убывающей последовательности чисел  $N_{i_{s_q} k_{s_q}}^q$  первые  $M_0$  из них, которые удовлетворяют условию:

$$\sum_{q=1}^{M_0-1} N_{i_{s_q} k_{s_q}}^q - \frac{1}{2} \sum_{q,h=1}^{M_0-1} N_{j_{i_h} p_{i_h}}^{i_{s_q} k_{s_q}} < m'_0 \wedge \sum_{q=1}^{M_0} N_{i_{s_q} k_{s_q}}^q - \frac{1}{2} \sum_{q,h=1}^{M_0} N_{j_{i_h} p_{i_h}}^{i_{s_q} k_{s_q}} \geq m'_0.$$

$M_0$  максимизация:  $N_{i_{k_s} k_s}^1, N_{i_{k_s} k_s}^2, \dots \rightarrow \{N_{i_{k_s} k_s}^q\}_{q=1}^{M_0}$ .

5. Терм, образованный из соответствующих им переменных будет иметь минимальную длину  $M_0$ .

$T_0$  построение минимального терма:  $\{N_{i_{k_s} k_s}^q\}_{q=1}^{M_0} \xrightarrow{T_0} \bar{t}_0 := \prod_{s=1}^{M_0} x_{i_{k_s} j_{k_s}}$ .

Определяем правило сужения максимальной мощности  $\bar{e}_0$ :

$\bar{e}_0$  сужение:

$$(\rho_{ij}, \rho_{ji}) \mapsto \begin{cases} (0, 0), & x_{ij} \text{ входит в } \bar{t}_0 := \prod_{k_s=1}^{M_0} x_{i_{k_s} j_{k_s}}, \\ (\rho_{ij}, \rho_{ji}), & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

**Пример 4.** Для отношения из примера 2

$$\mathbf{R} \sim [r_{ij}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Симметризованный терм:  $t_3(x_{12}, x_{23}) = (x_{12} \oplus x_{23}) \cdot (x_{23} \oplus x_{12})$ .

1.  $d_{24}$  композиция:  $t'_3(x_{12}, x_{23}) = x_{12} \oplus x_{23}$ .
2. Вычисление вхождений:  $N_{12}^{12} := N_{23}^{23} := 0$ ,  $N_{23}^{12} := N_{12}^{23} := 1$ ,  $m'_0 = 1$ .

$$\begin{aligned} N_{12} &:= N_{12}^{12} + N_{23}^{23} = 1; \\ N_{23} &:= N_{23}^{12} + N_{12}^{23} = 1. \end{aligned}$$

3. Сортировка:  $N_{12}^1 = 1 \geq N_{23}^2 = 1$ .
4. Максимизация:  $\{N_{12}^j\}_{j=1}^1$ .
5. Минимальный терм:  $\tilde{t}_0 := x_{12}$ .

$\tilde{e}_0$  сужение по правилу:  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}] \xrightarrow{e_0} [\bar{\rho}_{ij}^0]$ .

$\tilde{e}_0$ :  $(\rho_{12}, \rho_{21}) := (0, 0)$ :

$$[\bar{\rho}_{ij}^0] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

В приведенном примере сужение по правилу  $\tilde{e}_0$  дает решение поставленной задачи. В других случаях правила сужения, построенные по термам минимальной длины, могут приводить к нетранзитивным отношениям.

**Пример 5.**

$$\mathbf{R} \sim [r_{ij}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Отношение  $\mathbf{R}$  допускает следующую графическую интерпретацию Рис. 1:

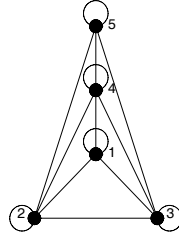


Рис. 1. Граф отношения  $\mathbf{R}$

1. Мультипликативный терм, полученный из терма  $t_0(c_{ijk}, d_{ijk}, x_{ij}) := \prod_{i=1}^3 \prod_{j=1}^5 \prod_{k=1}^5 (c_{ijk} \cdot (x_{ik} \oplus x_{jk}) \oplus d_{ijk})$  в результате применения преобразований подстановки, сокращения констант, симметризации:

$$t_3(x_{ij}) = (x_{12} \oplus x_{25}) \cdot (x_{13} \oplus x_{35}) \cdot (x_{14} \oplus x_{45}).$$

2. Аддитивный терм  $t_4(x_{ij})$ , полученный из терма  $t_3(x_{ij})$  в результате применения преобразования по правилам  $d_2$ – $d_4$  для операции  $\cdot$  и  $\oplus$ :

$$\begin{aligned} t_4(x_{ij}) = & x_{12} \cdot x_{13} \cdot x_{14} \oplus x_{12} \cdot x_{13} \cdot x_{45} \oplus x_{12} \cdot x_{14} \cdot x_{35} \oplus x_{12} \cdot x_{35} \cdot x_{45} \oplus \\ & x_{13} \cdot x_{14} \cdot x_{25} \oplus x_{13} \cdot x_{25} \cdot x_{45} \oplus x_{14} \cdot x_{25} \cdot x_{35} \oplus x_{25} \cdot x_{35} \cdot x_{45}. \end{aligned}$$

Каждый из мультипликативных термов имеет минимальную (максимальную) длину, равную трем. Однако только два из них определяют правила сужения до отношений эквивалентности.

3. Минимальные термы  $\tilde{t}_0^1 := x_{12} \cdot x_{13} \cdot x_{14}$  и  $\tilde{t}_0^2 := x_{25} \cdot x_{35} \cdot x_{45}$  определяют сужения  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}] \xrightarrow{\tilde{e}_0^1} [\tilde{\rho}_{ij}^{01}]$  и  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}] \xrightarrow{\tilde{e}_0^2} [\tilde{\rho}_{ij}^{02}]$  до отношений эквивалентности по правилам:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_0^1: (\rho_{12}, \rho_{21}, \rho_{13}, \rho_{31}, \rho_{14}, \rho_{41}) &:= (0, 0, 0, 0, 0, 0), \\ \tilde{e}_0^2: (\rho_{25}, \rho_{52}, \rho_{35}, \rho_{53}, \rho_{45}, \rho_{54}) &:= (0, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^1 \sim [\tilde{\rho}_{ij}^{01}] := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^2 \sim [\tilde{\rho}_{ij}^{02}] := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сужения  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^1$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^2$  допускают следующую графическую интерпретацию:

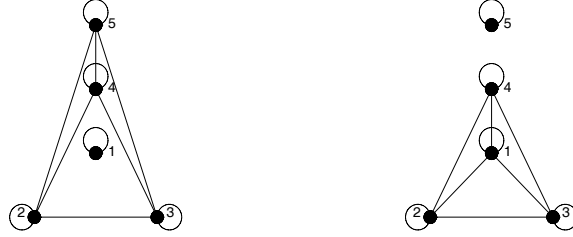


Рис. 2. Графы отношений  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^1$  и  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^2$

5. Все остальные термы определяют сужения до нетранзитивных отношений.

В силу сказанного, после нахождения термов минимальной длины  $\tilde{t}_k^0$  и соответствующего им семейства правил сужения  $\{\tilde{e}_0^k\}_{k=1}^{K_0}$  необходимо произвести выбор тех из них, которые будут задавать сужения  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности. То, что такие сужения найдутся в семействе  $\{\tilde{e}_0^k\}_{k=1}^{K_0}$ , вытекает из следующего рекурсивного построения.

Рассмотрим ранее полученный симметризованный терм

$$t'_3(x_{ij}) = \prod_{s=1}^{m'_0} (x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s}).$$

В дальнейшем с целью упрощения записи будем опускать подчеркивания в симметризованных индексах.

Введем вспомогательный терм  $t'$ , положив  $t' := t'_3(x_{ij})$ .

Введем вспомогательный терм  $\tilde{t}_0$ , положив  $\tilde{t}_0 := 1$ .

Введем счетчик числа вхождений  $N$ , положив  $N := 0$ .

Введем вспомогательное множество  $J$ , положив  $J := \emptyset$ .

Введем счетчик итераций  $\tau$ , положив  $\tau := 1$ .

### Рекурсивная процедура $Pr(t'_3(x_{ij}), t', \tilde{t}_0, N, J, \tau)$

#### begin proc

1. Из множества переменных, входящих в терм  $t'$ , выберем те, которые имеют максимальное общее число вхождений  $n_1$ .

Если все переменные имеют общее число вхождений, равное 1, то это означает, что каждая переменная  $x_{i,k_s}$  входит в термы  $x_{i,k_s} \oplus x_{j,k_s}$  только с одной другой переменной  $x_{j,k_s}$ , и все такие вхождения могут встречаться не более одного раза. В этом случае все мультипликативные термы  $\{\bar{t}_s^*\}_{s=1}^{s_0}$ , определяющие правила сужения, имеют равную длину, совпадающую с минимальной длиной.

Положим

$$\tilde{t}_0 := \tilde{t}_0 \cdot \sum_{s=1}^{s_0} \bar{t}_s^*$$

и завершим преобразования.

Если не все переменные имеют общее число вхождений, равное 1, то выберем из переменных  $x_{i_\tau, j_\tau}$ , имеющих максимальное общее число вхождений  $n_\tau^1 := N_{i_\tau, j_\tau}^1$ , ту, которая имеет минимальное число совместных вхождений с переменными  $x_{i_s, j_s}$  при  $(i_s, j_s) \in J$  в терм  $t'_3(x_{ij})$ .

При первом вызове процедуры  $J = \emptyset$  и число подобных совместных вхождений для любой переменной равно нулю.

Для удобства будем считать, что в терме  $t'$  все аддитивные термы  $x_{i_1, j_1} \oplus x_{j_\tau, j_{\tau,1}}^*$ , содержащие эту переменную, стоят на первом месте:

$$t' := \underbrace{(x_{i_\tau, j_\tau} \oplus x_{j_\tau, j_{\tau,1}}^*) \cdot \dots \cdot (x_{i_\tau, j_\tau} \oplus x_{j_\tau, j_{\tau, n_\tau^1}}^*)}_{n_\tau^1} \cdot \dots \cdot (x_{i_{m'_0}, j_{m'_0}} \oplus x_{j_{m'_0}, j_{m'_0, n_{m'_0}}}^*)_{m'_0}.$$

Очевидно, что такого расположения всегда можно добиться при помощи преобразований по правилу  $d_2$ .

Рассмотрим терм

$$t_{i_\tau, j_\tau}^1 := (x_{i_\tau, j_\tau} \oplus x_{j_\tau, j_{\tau,1}}^*) \cdot \dots \cdot (x_{i_\tau, j_\tau} \oplus x_{j_\tau, j_{\tau, n_\tau^1}}^*) = \prod_{s=1}^{n_\tau^1} (x_{i_\tau, j_\tau} \oplus x_{j_\tau, j_{\tau, s}}^*)$$

После применения к нему преобразований по правилу  $d_2$  и  $d_3$  результирующий терм примет вид:

$$t_{i_\tau, j_\tau}^1 \xrightarrow{d} t_{i_\tau, j_\tau}^2 = x_{i_\tau, j_\tau} \cdot \dots \cdot x_{i_\tau, j_\tau} \oplus \dots \oplus x_{j_\tau, j_{\tau,1}}^* \cdot \dots \cdot x_{j_\tau, j_{\tau, n_\tau^1}}^*.$$

Легко понять, что после применения к терму  $t_{i_\tau, j_\tau}^2$  преобразований по правилу  $d_4$  результирующий терм  $t_{i_\tau, j_\tau}^3$

$$t_{i_\tau, j_\tau}^2 \xrightarrow{d_4} t_{i_\tau, j_\tau}^3 = x_{i_\tau, j_\tau} \oplus \dots \oplus x_{j_\tau, j_{\tau,1}}^* \cdot \dots \cdot x_{j_\tau, j_{\tau, n_\tau^1}}^*$$

будет содержать единственный терм минимальной длины 1, а именно:

$$\underbrace{x_{i_\tau, j_\tau} \cdot \dots \cdot x_{i_\tau, j_\tau}}_{n_\tau^1} \xrightarrow{d_4} x_{i_\tau, j_\tau}.$$

Положим  $n_\tau^2$  — число совместных вхождений переменной  $x_{i_\tau, j_\tau}$  с переменными  $x_{i_s, j_s}$  при  $(i_s, j_s) \in J$  в терм  $t'_3(x_{ij})$ .



При  $J := \emptyset$  число подобных совместных вхождений для переменной  $x_{i_\tau j_\tau}$  равно нулю.

Положим

$$\begin{aligned}\tilde{t}_0 &:= \tilde{t}_0 \cdot x_{i_\tau j_\tau}; \\ N &:= N + n_\tau^1 - n_\tau^2; \\ J &:= J \cup \{(i_\tau, j_\tau)\}.\end{aligned}$$

2. Удалим из терма  $t'$  терм  $t_{i_\tau j_\tau}^1$ .

$t'|t_{i_\tau j_\tau}^1$  сокращение:

$$t' \xrightarrow{|t_{i_\tau j_\tau}^1} t'' = \underbrace{(x_{i_{\tau+1} j_{\tau+1}} \oplus x_{j_{\tau+1} i_{\tau+1}}) \cdot \dots \cdot (x_{i_{m'_0} j_{m'_0}} \oplus x_{j_{m'_0} i_{m'_0}})}_{m'_0 - n_1}.$$

3. Разобьем терм  $t''$ , на два  $T''_{\tau_1}$  и  $T''_{\tau_2}$ , в первый из которых входят все аддитивные термы  $(x_{i_s k_s} \oplus x_{j_s k_s})$  с переменными, которые присутствуют в терме  $t_{i_\tau j_\tau}^1$ , а во второй — все оставшиеся.

Понятно, что с точностью до преобразований по правилам  $d_2$  термы  $t''$  и  $t_{i_\tau j_\tau}^1 \cdot T''_{\tau_1} \cdot T''_{\tau_2}$  совпадают

$$t' \xrightarrow{d_2} \prod_{s=1}^{n_1} (x_{i_\tau j_\tau} \oplus x_{j_\tau i_\tau}) \cdot \prod_{s=1}^{m'_{01}} (x_{i_s k_s}^1 \oplus x_{j_s k_s}^1) \cdot \prod_{s=1}^{m'_{02}} (x_{i_s k_s}^2 \oplus x_{j_s k_s}^2), \quad n_1 + m'_{01} + m'_{02} = m'_0.$$

По построению в терм  $T''_{\tau_2}$  могут входить только те переменные, которые не имеют совместных вхождений в терм  $t'$  ни с одной из переменных, входящих в терм  $t_{i_\tau j_\tau}^1$ .

Кроме того все переменные, имеющие общее число вхождений, равное 1, должны входить в терм  $T''_{\tau_2}$ .

Заметим также, что переменная  $x_{i_\tau j_\tau}$  не может входить ни в один из термов  $T''_{\tau_1}$  и  $T''_{\tau_2}$ , а число вхождений каждой из переменных  $x_{j_\tau i_{\tau+1}}, \dots, x_{j_\tau i_{\tau+1}^1}$  в терм  $T''_{\tau_1}$  должно быть на единицу меньше, чем соответствующее число вхождений в терм  $t'$ . В то же время числа совместных вхождений переменных  $x_{j_\tau i_{\tau+1}}, \dots, x_{j_\tau i_{\tau+1}^1}$  в термы  $T''_{\tau_1}$  и  $t'$  должны быть равны.

Если для обоих термов  $|T''_{\tau_1}| = |T''_{\tau_2}| = 0$ , то завершаем преобразование.

4. Если  $|T''_{\tau_1}| \neq 0$ , то положим  $\tau := \tau + 1$ ,  $t' := T''_{\tau_1}$  и применим к нему описанные выше преобразования пунктов 1, 2 с уже измененными значениями  $\tilde{t}_0$ ,  $N$ ,  $J$ ,  $\tau$ .

5. Если  $|T''_{\tau_2}| \neq 0$ , то положим  $\tau := \tau + 1$ ,  $t' := T''_{\tau_2}$  и применим к нему описанные выше преобразования пунктов 1, 2 с уже измененными значениями  $\tilde{t}_0$ ,  $N$ ,  $J$ ,  $\tau$ .

6. Выполняем преобразования рекурсивно для всех термов  $T''_{\tau_1}$ ,  $T''_{\tau_2}$ , получаемых на каждом шаге.

**end proc;**

В силу того, что каждое преобразование выводит из терма  $t'$  одну переменную, они завершатся за конечное число шагов.

По смыслу правила разбиения терма  $t''$  на термы  $T''_{\tau_1}$ ,  $T''_{\tau_2}$  преобразования, производимые над одним из них, не влияют на преобразования, производимые над другим.

После выполнения преобразований за  $\tau_0$  шагов будут получены следующие значения:

$$\begin{aligned}\tilde{t}_0 &:= 1 \cdot x_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{h_1} j_{h_1}} \cdot \sum_{s=1}^{s_1} \bar{t}_{1s}^* \cdot x_{i_{h_1+1} j_{h_1+1}} \cdot \dots \cdot x_{i_{h_1+h_2} j_{h_1+h_2}} \cdot \sum_{s=1}^{s_2} \bar{t}_{2s}^* \cdot \dots; \\ N &:= n_1^1 - n_1^2 + \dots + n_{h_1}^1 - n_{h_1}^2 + n_{h_1+1}^1 - n_{h_1+1}^2 + \dots + n_{h_1+h_2}^1 - n_{h_1+h_2}^2 + \dots; \\ J &:= \{(i_1, j_1), \dots, (i_{h_1}, j_{h_1}), (i_{h_1+1}, j_{h_1+1}), \dots, (i_{h_1+h_2}, j_{h_1+h_2}), \dots\}.\end{aligned}$$

Терм  $\tilde{t}_0$  с помощью преобразований  $c_2, d_2$  приводится к виду:

$$\tilde{t}_0 \xrightarrow{c_2 \circ d_2} x_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{h_1} j_{h_1}} \cdot x_{i_{h_1+1} j_{h_1+1}} \cdot \dots \cdot x_{i_{h_1+h_2} j_{h_1+h_2}} \cdot \dots \cdot \sum_{s=1}^{s_1} \bar{t}_{1s}^* \cdot \sum_{s=1}^{s_2} \bar{t}_{2s}^* \cdot \dots$$

Положим

$$\begin{aligned}\tilde{t}_1 &:= x_{i_1 j_1} \cdot \dots \cdot x_{i_{h_1} j_{h_1}} \cdot x_{i_{h_1+1} j_{h_1+1}} \cdot \dots \cdot x_{i_{h_1+h_2} j_{h_1+h_2}} \cdot \dots; \\ \tilde{t}_2 &:= \sum_{s=1}^{s_1} \bar{t}_{1s}^* \cdot \sum_{s=1}^{s_2} \bar{t}_{2s}^* \cdot \dots\end{aligned}$$

Остается показать, что среди термов минимальной длины, которые могут быть получены из терма  $\tilde{t}_0$ , найдутся такие, которые будут задавать сужения исходного отношения до отношения эквивалентности.

1. Атомарное правило сужения  $\bar{e}^{i_1 j_1}$ , построенное по симметризованной переменной  $x_{i_1 j_1}$ , имеет вид  $\rho_{i_1 j_1} := 0 \wedge \rho_{j_1 i_1} := 0$  и соответствует одному из условий обнуления при  $s \neq i_1 \wedge s \neq j_1 \wedge i_1 \neq j_1$ :

$$\begin{aligned}r_{i_1 s} &= 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{j_1 s} = 1; \\ r_{s j_1} &= 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{i_1 s} = 1\end{aligned}$$

или одному из аддитивных термов:

$$\begin{aligned}x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 s}; \\ x_{i_1 j_1} \oplus x_{i_1 s}.\end{aligned}$$

Как уже отмечалось, идемпотентность матрицы, полученной в результате сужения  $[r_{ij}] \xrightarrow{\bar{e}^{i_1 j_1}} [\rho_{ij}]$  может нарушаться в том случае, когда

$$\exists k_1 \rho_{i_1 k_1} = 1 \wedge \rho_{k_1 j_1} = 1,$$

то есть в одном из двух случаев при  $s \neq i_1 \wedge s \neq j_1 \wedge k_1 \neq i_1 \wedge k_1 \neq j_1 \wedge i_1 \neq j_1$ :

$$\begin{aligned}\exists k_1 \rho_{i_1 j_1} = 0 \wedge \rho_{i_1 k_1} = 1 \wedge \rho_{k_1 j_1} = 1 \wedge r_{i_1 s} = 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{j_1 s} = 1; \\ \exists k_2 \rho_{i_1 j_1} = 0 \wedge \rho_{i_1 k_2} = 1 \wedge \rho_{k_2 j_1} = 1 \wedge r_{s j_1} = 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{i_1 s} = 1\end{aligned}$$

или, что то же самое:

$$\begin{aligned}\exists k_1 \rho_{i_1 j_1} = 0 \wedge \rho_{i_1 k_1} = 1 \wedge \rho_{k_1 j_1} = 1 \wedge \rho_{i_1 s} = 0 \wedge \rho_{j_1 s} = 1; \\ \exists k_2 \rho_{i_1 j_1} = 0 \wedge \rho_{i_1 k_2} = 1 \wedge \rho_{k_2 j_1} = 1 \wedge \rho_{s j_1} = 0 \wedge \rho_{i_1 s} = 1.\end{aligned}$$

2. Покажем, что существуют условие обнуления и соответствующее ему атомарное сужение  $\bar{e}^{i_1 j_1}$  такое, что в результате двух последовательных сужений  $[r_{ij}] \xrightarrow{\bar{e}^{i_1 j_1} \circ \bar{e}^{i_1 j_1}} [\rho_{ij}^1]$  условие идемпотентности матрицы не нарушается за счет обнуления элемента  $\rho_{i_1 j_1} = 0$ :

$$\begin{aligned}\forall k_1 r_{i_1 s} := 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{j_1 s} = 1 \wedge \rho_{i_1 j_1} = 0 \longrightarrow \rho_{i_1 k_1}^1 = 0 \vee \rho_{k_1 j_1}^1 = 0; \\ \forall k_2 r_{s j_1} := 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{i_1 s} = 1 \wedge \rho_{i_1 j_1} = 0 \longrightarrow \rho_{i_1 k_2}^1 = 0 \vee \rho_{k_2 j_1}^1 = 0.\end{aligned}$$

Рассмотрим, например, первый случай. Второй случай рассматривается аналогично.

Пусть для некоторых  $s$  и  $k$  выполняется:

$$\rho_{i_1 j_1} = 0 \wedge \rho_{i_1 k_1} = 1 \wedge \rho_{k_1 j_1} = 1 \wedge r_{i_1 s} = 0 \wedge r_{i_1 j_1} = 1 \wedge r_{j_1 s} = 1.$$

2.1. Если элемент матрицы  $r_{k_1 s} = 1$ , то в таком случае

$$r_{i_1 s} = 0 \wedge r_{k_1 s} = 1 \wedge \rho_{i_1 k_1} = 1.$$

Так как  $\rho_{i_1 k_1} = 1 \longrightarrow r_{i_1 k_1} = 1$ , то для элемента матрицы  $\rho_{i_1 k_1}$  должно выполняться условие обнуления относительно элемента  $r_{i_1 s} = 0$ :

$$r_{i_1 s} = 0 \wedge r_{k_1 s} = 1 \wedge r_{i_1 k_1} = 1,$$

относительно которого также выполняется и условие обнуления элемента  $\rho_{i_1 j_1}$ .

Этому условию соответствует аддитивный терм  $x_{k_1 s} \oplus x_{i_1 k_1}$ .

Искомое атомарное сужение  $\bar{e}^{i_1 j_1}$  имеет вид  $\rho_{i_1 k_1} := 0 \wedge \rho_{k_1 i_1} := 0$ .

Понятно, что сужение  $\bar{e}^{i_1 j_1} \circ \bar{e}^{i_1 j_1}$  соответствует терму  $x_{i_1 j_1} \cdot x_{i_1 k_1}$ , причем переменная  $x_{i_1 k_1}$  не входит в терм  $x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 s}$ .

В результате сужения  $[r_{ij}] \xrightarrow{\bar{e}^{i_1 j_1} \circ \bar{e}^{i_1 j_1}} [\rho_{ij}^1]$  для матрицы  $[\rho_{ij}^1]$  при  $i_1 \neq j_1 \wedge s \neq i_1 \wedge s \neq j_1 \wedge k_1 \neq i_1 \wedge k_1 \neq j_1$  будет выполняться:

$$\rho_{i_1 k_1}^1 = 0 \wedge \rho_{i_1 j_1}^1 = 0 \wedge \rho_{i_1 s}^1 = 0 \wedge \rho_{k_1 j_1}^1 = 1 \wedge \rho_{j_1 s}^1 = 1.$$

**Замечание.** Из последнего следует что, если при  $i_1 \neq j_1 \wedge s \neq i_1 \wedge s \neq j_1 \wedge k_1 \neq i_1 \wedge k_1 \neq j_1 \wedge m_1 \neq i_1 \wedge m_1 \neq k_1$ , выполняется:

$$\exists m_1 \rho_{i_1 k_1}^1 = 0 \wedge \rho_{i_1 m_1}^1 = 1 \wedge \rho_{m_1 k_1}^1 = 1,$$

то  $(m_1 \neq j_1 \vee k_1 \neq s)$ .

2.2. Если элемент матрицы  $r_{k_1 s} = 0$ , то в таком случае

$$r_{k_1 s} = 0 \wedge \rho_{k_1 j_1} = 1 \wedge r_{j_1 s} = 1,$$

и по тем же причинам, что и в предыдущем случае, для элемента матрицы  $\rho_{k_1 j_1}$  должно выполняться условие обнуления относительно элемента  $r_{k_1 s} = 0$ :

$$r_{k_1 s} = 0 \wedge r_{k_1 j_1} = 1 \wedge r_{j_1 s} = 1,$$

которому соответствует аддитивный терм  $x_{k_1 j_1} \oplus x_{j_1 s}$ .

Искомое атомарное сужение  $\bar{e}^{i_1 j_1}$  имеет вид  $\rho_{k_1 j_1} := 0 \wedge \rho_{j_1 k_1} := 0$ .

Понятно, что сужение  $\bar{e}^{i_1 j_1} \circ \bar{e}^{i_1 j_1}$  соответствует терму  $x_{i_1 j_1} \cdot x_{k_1 j_1}$ . Причем переменная  $x_{k_1 j_1}$  не входит в терм  $x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 s}$ .

В результате сужения  $[r_{ij}] \xrightarrow{\bar{e}^{i_1 j_1} \circ \bar{e}^{i_1 j_1}} [\rho_{ij}^1]$  для матрицы  $[\rho_{ij}^1]$  при  $i_1 \neq j_1 \wedge s \neq i_1 \wedge s \neq j_1 \wedge k_1 \neq i_1 \wedge k_1 \neq j_1$  будет выполняться:

$$\rho_{k_1 j_1}^1 = 0 \wedge \rho_{i_1 j_1}^1 = 0 \wedge \rho_{i_1 s}^1 = 0 \wedge \rho_{i_1 k_1}^1 = 1 \wedge \rho_{j_1 s}^1 = 1;$$

**Замечание.** Из последнего следует что, если при  $i_1 \neq j_1 \wedge s \neq i_1 \wedge s \neq j_1 \wedge k_1 \neq i_1 \wedge k_1 \neq j_1 \wedge m_1 \neq i_1 \wedge m_1 \neq k_1$  выполняется:

$$\exists m_1 \rho_{k_1 j_1}^1 = 0 \wedge \rho_{k_1 m_1}^1 = 1 \wedge \rho_{m_1 j_1}^1 = 1,$$

то  $(m_1 \neq j_1 \vee k_1 \neq s)$ .

3. Из проведенных рассуждений следует, что для каждого терма

$$t_{i_1 j_1}^1 := (x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 j_{1,1}^*}) \cdot \dots \cdot (x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 j_{1,m_1}^*}) = \prod_{s=1}^{m_1} (x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 j_{1,s}^*})$$

будет существовать терм не меньшей длины

$$t_{i_1 j_1}^1 := (x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 j_{1,1}}^*) \cdot \dots \cdot (x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 j_{1,n_1}}^*) = \prod_{s=1}^{n'_1} (x_{i_1 j_1} \oplus x_{j_1 j_{1,s}}^*)$$

такой, что сужение, соответствующее терму  $x_{i_1 j_1} \cdot x_{i_1 j_1}^1$ , не будет нарушать условия идемпотентности матрицы  $[\rho_{ij}]$  за счет обнуления элемента  $\rho_{i_1 j_1}$ .

В силу того, что сказанное относится к каждому из термов  $t_{i_1 j_1}^1$ ,  $t_{i_1 j_1}^1$ , и с учетом ранее сделанных замечаний, сужение, построенное по терму  $\bar{t}_1'$ , не будет нарушать условия идемпотентности матрицы  $[\rho_{ij}]$  за счет всех обнуленных элементов.

Так как в терм  $\bar{t}_1'$  отбирались переменные, имеющие максимальные общие числа вхождений в терм  $t'_3(x_{ij})$ , что соответствует удалению из исходного отношения  $\mathbf{R}$  минимально возможного количества пар, которые нарушают свойство транзитивности, то построенное сужение  $\mathbf{R}_1 \subseteq \mathbf{R}$  будет включать хотя бы одно из сужений  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности максимальной мощности  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^1$ .

Если длина терма  $|\bar{t}_1'| = 0$ , то  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}$ , и отношение  $\mathbf{R}_1$  включает все такие сужения.

По построению все термы, входящие в  $\sum_{s=1}^{s_k} \bar{t}_{ks}^*$ , имеют одинаковую длину.

Согласно теореме 3.1, в каждом терме  $\sum_{s=1}^{s_k} \bar{t}_{ks}^*$  найдется мультипликативный терм  $\bar{t}_{ks_0}^*$ , который определяет сужение  $\mathbf{R}$ , не изменяющее классы эквивалентности отношения  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}^1$ .

Положим

$$\tilde{t}_0 := \tilde{t}_0' \cdot \bar{t}_{1s_0}^* \cdot \bar{t}_{2s_0}^* \dots$$

По построению ему соответствует сужение исходного отношения  $\mathbf{R}$  до отношения эквивалентности.

4. По построению, последовательность чисел  $n_1^1 \geq n_2^1, \geq \dots \geq n_{\tau_0}^1$  или, что то же самое,  $N_{i_1 j_1}^1 \geq N_{i_2 j_2}^1 \geq \dots, \geq N_{i_{\tau_0} j_{\tau_0}}^1$  удовлетворяет условию максимизации.

Действительно, на каждом шаге для добавления в терм  $\tilde{t}_0$  выбиралась переменная из числа тех, которые имели наибольшие значения чисел общих вхождений из всех не выбранных на предыдущих итерациях. Более того, переменные выбирались так, что их совместные вхождения со всеми выбранными переменными были минимальны.

Из сделанных замечаний также следует, что переменные, входящие в термы  $\tilde{t}_0'$ ,  $\bar{t}_{1s_0}^*$ ,  $\bar{t}_{2s_0}^* \dots$ , не имеют совместных вхождений и, следовательно, полусумма сов-

местных вхождений всех переменных, содержащихся в терме  $\tilde{t}_0$ , равна  $\sum_{\tau=1}^{\tau_0} n_{\tau}^2$  и име-

ет минимальное значение. Поэтому равенство  $\sum_{\tau=1}^{\tau_0} n_{\tau}^1 - \sum_{\tau=1}^{\tau_0} n_{\tau}^2 = m'_0$  достигается при минимально возможном значении  $\tau_0$ , то есть терм  $\tilde{t}_0$  имеет минимальную длину.

### 3.3.2. Поиск сужений до отношения эквивалентности

Из всего сказанного следует, что возможно произвести непустой выбор правила сужения  $\vec{e}_0^k$ , построенного по терму минимальной длины, применение которого к отношению  $\mathbf{R}$  приведет к отношению эквивалентности максимальной мощности.

Выберем из сужений  $\vec{e}_0^k$ , построенных по термам минимальной длины, одно из сужений, приводящих матрицу  $[\rho_{ij}] := [r_{ij}] \mapsto [\tilde{\rho}_{ij}^0]$  к идемпотентной матрице  $[\tilde{\rho}_{ij}^0]$ .

По смыслу построения сужений, для проверки идемпотентности матрицы  $[\tilde{\rho}_{ij}^0]$  достаточно проверить, что в матрице  $[\tilde{\rho}^0 \bullet \tilde{\rho}_{ij}^0]$  равны нулю все элементы  $\tilde{\rho}^0 \bullet \tilde{\rho}_{i'j'}^0$ , для которых  $\tilde{\rho}_{i'j'}^0 = 0 \wedge r_{i'j'} = 1$ , то есть только те элементы, индексы которых совпадают с индексами переменных  $x_{i_{k_s}j_{k_s}}$ , входящими в термы минимальной длины

$$\bar{t}_0 := \prod_{s=1}^{M_0} x_{i_{k_s}j_{k_s}}.$$

1. По каждому терму минимальной длины  $\bar{t}_0 := \prod_{s=1}^{M_0} x_{i_{k_s}j_{k_s}}$  построим множество индексных пар для входящих в него переменных:

*I* выделение индексов:

$$\bar{t}_0 \rightarrow I := \{(i_{k_s}, j_{k_s})\}_{s=1}^{M_0}.$$

Обозначим  $\bar{I} := (1..|U|)^2 \setminus I$  — множество индексных пар, не входящих в  $I$ .

2. Производим отбор минимальных термов на основании правила:

*F* фильтрация сужений:

$$F_{\bar{t}_0}^- := \bigwedge_{\substack{(i_{k_s}, j_{k_s}) \in I, \\ (i_{k_s}, l), (l, j_{k_s}) \in \bar{I}}} \neg r_{i_{k_s}l} \vee \neg r_{lj_{k_s}}.$$

## Заключение

Рассмотренная задача является в определенном смысле двойственной к задаче построения транзитивного замыкания рефлексивного, симметричного бинарного отношения на  $U$ . Согласно лемме 1.2, решение такой задачи единственно и имеет простое аналитическое представление в алгебре  $\langle 2^{U^2}, \{ \neg, \circ, \cup \} \rangle$ :

$$[\tilde{\mathbf{R}}] = \bigcup_{k=0}^{|U|-1} (\mathbf{R} \cup \mathbf{R}^{-1})^k = \bigcup_{k=1}^{|U|-1} \mathbf{R}^k$$

или представление:

$$[\hat{r}_{ij}] = \bigvee_{k=0}^{|U|-1} ([r_{ij}] \vee [r_{ij}]^T)^k = \bigvee_{k=1}^{|U|-1} [r_{ij}]^k$$

в изоморфной алгебре  $\langle M^{|U|^2}, \{ \neg, \bullet, \sqcup \} \rangle$ .

Так как  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \subseteq \mathbf{R} \subseteq [\tilde{\mathbf{R}}]$ , то мощность  $||[\tilde{\mathbf{R}}] \setminus \tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}|| = ||[\tilde{\mathbf{R}}]|| - ||\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}||$  есть инвариант рефлексивного, симметричного отношения  $\mathbf{R}$ , который можно трактовать как меру его подобию отношению эквивалентности.

## Приложения

Если интерпретировать отношения  $\mathbf{R}$  как графы  $G_R$ , то рефлексивное симметричное отношение  $\mathbf{R}$  будет задавать неориентированный граф с вершинными петлями (см. например, [3]).

1. Выделение клик графа. Классы эквивалентности  $\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$  определяют клики графа  $G_R$ , а максимальная мощность класса эквивалентности дает нижнюю оценку для хроматического числа графа  $\chi(G_R)$ .

2. Раскраска графа. Пусть  $G_R$  — неориентированный граф без петель, а  $\mathbf{R} \sim [r_{ij}]$  — соответствующее ему рефлексивное симметричное отношение.

Отношение  $|\mathbf{R} \sim \lceil r_{ij} \rceil$  определяет множество вершин графа  $G_R$ , допускающих раскраску одним цветом. Отношение эквивалентности  $|\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}} \sim \lceil \tilde{\rho}_{ij}^0 \rceil$  определяет раскраску графа, причем число различных цветов раскраски равно числу классов эквивалентности отношения  $|\tilde{\mathbf{R}}_{\mathbf{m}}$ , то есть  $\text{rang}(\lceil \tilde{\rho}_{ij}^0 \rceil)$ .

## Литература

- [1] Горбатов, В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика / В.А.Горбатов. М.: Наука, 2000, 544 с.
- [2] Мальцев, А.И. Алгебраические системы / А.И.Мальцев. Москва: Наука, 1970, 392 с.
- [3] Diestel, R. Graph theory / R. Diestel Berlin: Springer, xiv, 2000, 313 p.

Поступила в редакцию 3/II/2005;  
в окончательном варианте — 3/II/2005.

## ON A SPECIAL RESTRICTION OF REFLEXIVE AND SYMMETRIC RELATION TO AN EQUIVALENCE RELATION<sup>3</sup>

© 2006 V.P. Tsvetov<sup>4</sup>

This paper presents a technical algorithm for constructing an equivalence relation as a subset of reflexive and symmetric relation on a finite set. The term "technical" means that an equivalence relation contains as many elements as possible.

Paper received 3/II/2005.

Paper accepted 3/II/2005.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.I. Astafiev.

<sup>4</sup>Tsvetov Victor Petrovich ([tsf@ssu.samara.ru](mailto:tsf@ssu.samara.ru)), Dept. of Information Systems Security, Samara State University, Samara, 443011, Russia.