

СОВЕРШЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА ИЗМЕРИМЫХ В-ЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ, II¹

© 2006 Ю.Н. Кузьмин²

Настоящая статья является продолжением работы "Совершенные пространства измеримых В-значных функций, I" (Вестник СамГУ, 2000, 2(16)). Продолжено рассмотрение свойств совершенных пространств измеримых функций со значениями в банаховом пространстве в слабой топологии. Доказываются критерии секвенциальной полноты и квазиполноты. Свойство Радона–Никодима банахова пространства значений является необходимым и содержится среди достаточных условий в данных критериях.

3. Секвенциальная полнота совершенного пространства в слабой топологии

Секвенциальная полнота совершенного пространства измеримых вещественнозначных функций в слабой топологии получена в разных вариантах Ж. Дьедоне [1] и Ю. Грибановым [2]. Критерий секвенциальной полноты банахова совершенного пространства измеримых В-значных функций, определенных на пространстве с сепарабельной мерой, в слабой топологии установлен В. Наводновым [3], а для банахова пространства Лебега–Бохнера с конечным и отличным от единицы показателем получен Ф. Гордоном [4].

Теорема 1. Совершенное пространство $L_X(S, \Sigma, \mu)$ является секвенциально полным в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$ тогда и только тогда, когда банахово пространство X является секвенциально полным в топологии $\sigma(X, Y)$ и обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) .

Доказательство. Необходимость. Покажем, что пространство X является секвенциально полным в топологии $\sigma(X, Y)$. Пусть последовательность (x_n) в пространстве X фундаментальна в топологии $\sigma(X, Y)$, то есть для любого элемента $y \in Y$

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} |\langle x_n - x_m, y \rangle| = 0.$$

Пусть измеримое множество $A \in \Sigma(L_R, L_R^*)$. Для любого числа $n \geq 1$ функция $x_n \chi_A \in L_X$ и, значит, для любой функции $g \in L_Y^*$

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \left| \int_S \langle x_n \chi_A(s) - x_m \chi_A(s), g(s) \rangle d\mu(s) \right| =$$

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

²Кузьмин Юрий Николаевич, кафедра теории функций и функционального анализа Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

$$= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} | \langle x_n - x_m, \int_A g(s) d\mu(s) \rangle | = 0.$$

Отсюда заключаем, что последовательность $(x_n \chi_A)$ фундаментальна в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$ секвенциально полного в этой топологии пространства L_X . Следовательно, в силу предположения, существует функция $f \in L_X$, к которой последовательность $(x_n \chi_A)$ сходится в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$, то есть для любой функции $g \in L_Y^*$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} | \int_S \langle x_n \chi_A(s) - f(s), g(s) \rangle d\mu(s) | = 0.$$

Поэтому, поскольку для любого элемента $y \in Y$ функция $y \chi_A \in L_Y^*$,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} | \langle x_n \mu(A) - \int_S f(s) d\mu(s), y \rangle | = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} | \langle \int_S (x_n \chi_A(s) - f(s)) d\mu(s), y \rangle | = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} | \int_S \langle x_n \chi_A(s) - f(s), y \chi_A(s) \rangle d\mu(s) | = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность (x_n) сходится к элементу $\frac{1}{\mu(A)} \int_S f(s) d\mu(s) \in X$

в топологии $\sigma(X, Y)$, то есть пространство X является секвенциально полным в этой топологии $\sigma(X, Y)$.

Покажем, что банахово пространство X обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) , то есть для любой абсолютно непрерывной относительно μ векторной меры $\nu : \Sigma \rightarrow X$ конечной вариации $\|\nu\| : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ существует интегрируемая по Бохнеру измеримая X -значная функция $f \in L_X^1$ такая, что для любого измеримого множества $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = \int_A f(s) d\mu(s).$$

Пусть векторная мера $\nu : \Sigma \rightarrow X$ конечной вариации $\|\nu\|$ является абсолютно непрерывной относительно μ . Вариация $\|\nu\|$ является абсолютно непрерывной относительно μ мерой. В силу теоремы Радона–Никодима существует измеримая функция $\varphi \in L_R^1$ такая, что для любого измеримого множества $A \in \Sigma$

$$\|\nu\|(A) = \int_A \varphi(s) d\mu(s).$$

Доказательство проведем в три этапа. Первый этап. Предположим, что множество $S \in \Sigma(L_R, L_R^*)$ и функция $\varphi \in L_R^\infty$. Первое предположение означает, что для совершенных пространств L_R и L_R^* , L_X и L_Y^* справедливы включения

$$\begin{aligned} L_R^\infty &\subseteq L_R, & L_R^* &\subseteq L_R^1, \\ L_X^\infty &\subseteq L_X \subseteq L_X^1, & L_Y^\infty &\subseteq L_Y^* \subseteq L_Y^1. \end{aligned}$$

Второе предположение означает, что число $M = \|\varphi\|_{L_R^\infty} < \infty$ и, следовательно, для любого измеримого множества $A \in \Sigma$

$$\|v(A)\| \leq \|v\|(A) = \int_A \varphi(s) d\mu(s) \leq M\mu(A).$$

Рассмотрим направленность (f_π) Σ -простых функций

$$f_\pi(s) = \sum_{k=1}^n \frac{v(A_k)}{\mu(A_k)} \chi_{A_k}(s),$$

где $\pi = \{A_1, \dots, A_n\}$ — измеримое разбиение множества S . Любое измеримое множество $A \in \Sigma$ принадлежит некоторому разбиению π_0 и, значит, для любого разбиения $\pi \geq \pi_0$

$$\begin{aligned} v(A) &= \sum_{A_k \in \pi, A_k \subseteq A} v(A_k) = \\ &= \sum_{A_k \in \pi, A_k \subseteq A} \int_{A_k} f_\pi(s) d\mu(s) = \int_A f_\pi(s) d\mu(s). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого измеримого множества $A \in \Sigma$

$$v(A) = X - \lim_{\pi} \int_A f_\pi(s) d\mu(s). \quad (3.1)$$

Более того, для любого разбиения π и любой точки $s \in A_k \in \pi$

$$\|f_\pi(s)\| = \left\| \frac{v(A_k)}{\mu(A_k)} \right\| = \frac{\|v(A_k)\|}{\mu(A_k)} \leq M,$$

то есть $\|f_\pi\|_{L_X^\infty} \leq M$, поэтому направленность (f_π) является порядково ограниченной функцией $M\chi_S \in L_R^\infty \subseteq L_R, L_R^*$ множеством.

Для любой возрастающей последовательности разбиений π_n **рассмотрим последовательность** (f_{π_n}) функций направленности (f_π) . Пусть Σ' — лебеговское расширение σ -алгебры измеримых множеств, порожденной системой элементов разбиений π_n при $n \geq 1$ [5. Гл. III, §5, п. 18].

Покажем, что последовательность (f_{π_n}) в совершенном пространстве $L_X(\Sigma')$ является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X(\Sigma'), L_Y^*(\Sigma'))$. Для этого проверим выполнение условий критерия слабой фундаментальности [6, п. 2, теорема 3].

В силу порядковой ограниченности последовательность (f_{π_n}) является ограниченным множеством совершенного пространства $L_X(\Sigma')$ [6, п. 1, теорема 2]. Более того, для любой неотрицательной функции $\psi \in L_R^*(\Sigma') \subseteq L_R^1(\Sigma')$

$$\int_S \|f_{\pi_n}(s)\| \psi(s) d\mu(s) \leq M \int_S \psi(s) d\mu(s),$$

а для любой последовательности Σ' -измеримых множеств $A_m \downarrow \emptyset$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{A_m} \psi(s) d\mu(s) = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \int_{A_m} \|f_{\pi_n}(s)\| \psi(s) d\mu(s) = 0,$$

то есть для последовательности (f_{π_n}) выполняется условие (1) критерия фундаментальности в слабой топологии $\sigma(L_X(\Sigma'), L_Y^*(\Sigma'))$ [6, п. 2, теорема 3]. Проверим выполнение условия (2). Фиксируем Σ' -измеримое множество A . Пусть элемент $y \in Y$ и число $\varepsilon > 0$. Существует Σ' -измеримое множество B , которое является объединением элементов некоторого разбиения π_{n_0} последовательности (π_n) такое, что

$$2M\mu(A \Delta B)\|y\| < \varepsilon$$

[5, Гл. III, §7, п. 1]. Тогда, для любых чисел $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned} & \left| \int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s) - \int_A f_{\pi_m}(s) d\mu(s), y \right| \leq \\ & \leq \int_{A \Delta B} (\|f_{\pi_n}(s)\| + \|f_{\pi_m}(s)\|) d\mu(s) \|y\| + \\ & \quad + \left| \int_B f_{\pi_n}(s) d\mu(s) - \int_B f_{\pi_m}(s) d\mu(s), y \right| \leq \\ & \leq 2M\mu(A \Delta B)\|y\| + |\nu(B) - \nu(B), y| < \varepsilon + 0 = \varepsilon, \end{aligned}$$

то есть

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \left| \int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s) - \int_A f_{\pi_m}(s) d\mu(s), y \right| = 0.$$

В силу произвольности элемента $y \in Y$ это означает, что последовательность $\left(\int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s) \right)$ в пространстве X является фундаментальной в топологии $\sigma(X, Y)$.

В силу произвольности Σ' -измеримого множества A это означает, что для последовательности (f_{π_n}) выполняются условия (2) критерия слабой фундаментальности [6, п. 2, теорема 3]. Следовательно, она является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X(\Sigma'), L_Y^*(\Sigma'))$, и, значит, для любой функции $g \in L_Y^*(\Sigma')$

$$\lim_{n, m \rightarrow +\infty} \left| \int_S \langle f_{\pi_n} - f_{\pi_m}(s), g(s) \rangle d\mu(s) \right| = 0. \quad (3.2)$$

Покажем, что последовательность (f_{π_n}) в совершенном пространстве L_X является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$. Для этого вновь проверим выполнение условий критерия слабой фундаментальности [6, п. 1, теорема 3]. В силу порядковой ограниченности последовательность (f_{π_n}) является ограниченным множеством совершенного пространства L_X [6, п. 1, теорема 2] и для любых неотрицательной функции $\psi \in L_R^* \subseteq L_R^1$ и последовательности измеримых множеств $A_m \downarrow \emptyset$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \int_{A_m} \|f_{\pi_n}(s)\| \psi(s) d\mu(s) = 0,$$

то есть для последовательности (f_{π_n}) выполняется условие (1) критерия слабой фундаментальности [6, п. 2, теорема 3]. Проверим выполнение условия (2). Фиксируем измеримое множество $A \in \Sigma$. Линейный функционал

$$\int_A \varphi(s) d\mu(s),$$

определенный на банаховом пространстве $L_R^1(\Sigma')$, является непрерывным по норме. Следовательно, существует функция $\psi \in L_R^\infty(\Sigma')$ такая, что для любой функции $\varphi \in L_R^1(\Sigma')$

$$\int_A \varphi(s) d\mu(s) = \int_S \varphi(s) \psi(s) d\mu(s).$$

Пусть элемент $y \in Y$. Функция $y\psi \in L_Y^*(\Sigma')$. Тогда, на основании соотношения (3.2),

$$\begin{aligned} \lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left| \int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s) - \int_A f_{\pi_m}(s) d\mu(s), y \right| &= \\ &= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left| \int_A \langle f_{\pi_n}(s) - f_{\pi_m}(s), y \rangle d\mu(s) \right| = \\ &= \lim_{n,m \rightarrow +\infty} \left| \int_S \langle f_{\pi_n}(s) - f_{\pi_m}(s), y\psi(s) \rangle d\mu(s) \right| = 0, \end{aligned}$$

и, значит, в силу произвольности элемента $y \in Y$, последовательность $\int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s)$

в пространстве X является фундаментальной в топологии $\sigma(X, Y)$, то есть для последовательности (f_{π_n}) выполняется условие (2) критерия слабой фундаментальности [6, п. 2, теорема 3]. Таким образом, она является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$ совершенного пространства L_X , которое само, в силу предположения, является секвенциально полным в этой топологии. Следовательно, существует функция $f \in L_X \subseteq L_X^1$, к которой (f_{π_n}) сходится в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$, то есть для любой функции $g \in L_Y^*$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_S \langle f_{\pi_n}(s) - f(s), g(s) \rangle d\mu(s) \right| = 0. \quad (3.3)$$

Покажем, что функция f является Σ' -измеримой. Для этого достаточно установить, что функция f аппроксимируется с произвольной точностью $\varepsilon > 0$ по норме пространства X Σ' -почти всюду на множестве S Σ' -измеримой функцией f_ε [5. Гл. III. §6. п. 4].

Пусть элемент $y \in Y$. Поскольку $L_R^\infty \subseteq L_R, L_R^* \subseteq L_R^1$, то на основании соотношения (3.3), заключаем, что последовательность $\langle f_{\pi_n}, y \rangle$ сходится к функции $\langle f, y \rangle$ в слабой топологии $\sigma(L_R^1, L_R^\infty)$. Следовательно, она является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_R^1(\Sigma'), L_R^\infty(\Sigma'))$ секвенциально полного в этой топологии пространства $L_R^1(\Sigma')$ [5. Гл. IV. §8. п. 6]. Таким образом, для любого элемента $y \in Y$ функция $\langle f, y \rangle$ является Σ' -измеримой.

На основании Σ -измеримости, функция f является Σ -почти сепарабельнозначной [5. Гл. III. §6. п. 11]. Поскольку σ -алгебра Σ' является лебеговским расширением относительно меры μ , функция f является и Σ' -почти сепарабельнознач-

ной. Следовательно, существует не более чем счетное множество $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$ и Σ' -измеримое множество S_0 такие, что $\mu(S_0) = 0$, и для любой точки $s \in S \setminus S_0$

$$f(s) \in \overline{L(\{x_n\}_{n \geq 1})}.$$

Тогда существует не более чем счетное множество $\{y_m\}_{m \geq 1} \subseteq Y$ такое, что $\|y_m\| \leq 1$ при $m \geq 1$, и для любого $n \geq 1$

$$\|x_n\| = \sup_{m \geq 1} \{ | \langle x_n, y_m \rangle | \}$$

[6, п. 1, опред-е 7]. Пусть число $n \geq 1$. Тогда для любой точки $s \in S \setminus S_0$

$$\|f(s) - x_n\| = \sup_{m \geq 1} \{ | \langle f(s) - x_n, y_m \rangle | \},$$

то есть, в силу Σ' -измеримости функции $\langle f(s) - x_n, y_m \rangle$ при $m \geq 1$, является Σ' -измеримой функция $\|f - x_n\|$ [5. Гл. III. §6. п. 10] при любом $n \geq 1$.

Пусть число $\varepsilon > 0$. Тогда при $n \geq 1$ является Σ' -измеримым множество

$$A_n = \{s \in S : \|f(s) - x_n\| \leq \varepsilon\}.$$

Пусть последовательность $(B_n)_{n \geq 1}$ попарно непересекающихся Σ' -измеримых множеств таких, что $B_1 = A_1$ и $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} B_k$ при $n > 1$. Следовательно, для Σ' -измеримой функции

$$f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \chi_{B_n}$$

и любой точки $s \in S \setminus S_0$

$$\|f(s) - f_\varepsilon(s)\| \leq \varepsilon.$$

Таким образом, в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, функция f является Σ' -измеримой.

Покажем, что для любого измеримого множества $A \in \Sigma'$

$$\nu(A) = \int_A f(s) d\mu(s). \quad (3.4)$$

Пусть элемент $y \in Y$. Для измеримого множества $A \in \pi_{n_0}$ при $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{A_k \in \pi_n, A_k \subseteq A} \nu(A_k) = \sum_{A_k \in \pi_n, A_k \subseteq A} \int_{A_k} f_{\pi_n}(s) d\mu(s) = \\ &= \int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s) \end{aligned}$$

и, поэтому, на основании соотношения (3.3),

$$\begin{aligned} \langle \nu(A), y \rangle &= \langle \int_A f_{\pi_n}(s) d\mu(s), y \rangle = \\ &= \int_A \langle f_{\pi_n}(s), y \rangle d\mu(s) = \int_S \langle f_{\pi_n}(s), y \chi_A(s) \rangle d\mu(s) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_S \langle f_{\pi_n}(s), y \chi_A(s) \rangle d\mu(s) = \int_S \langle f(s), y \chi_A(s) \rangle d\mu(s) = \\
&= \int_A \langle f(s), y \rangle d\mu(s) = \langle \int_A f(s) d\mu(s), y \rangle.
\end{aligned}$$

Тогда для любого измеримого множества $A \in \Sigma'$

$$\langle v(A), y \rangle = \langle \int_A f(s) d\mu(s), y \rangle$$

[5. Гл. III. §5. п. 8]. Следовательно, в силу произвольности элемента $y \in Y$, для любого измеримого множества $A \in \Sigma'$

$$v(A) = \int_A f(s) d\mu(s)$$

[6, п. 1, определ-е 7].

Покажем, что **последовательность** f_{π_n} является фундаментальной по норме банахова пространства L_X^1 . Пусть число $\varepsilon > 0$. Функция $f \in L_X^1(\Sigma')$. Тогда существует Σ' -простая функция $f_\varepsilon \in L_X^1(\Sigma')$, которая принимает постоянное значение на элементах некоторого разбиения π_{n_0} , для которой

$$\int_S \|f(s) - f_\varepsilon(s)\| d\mu(s) = \|f - f_\varepsilon\|_{L_X^1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

[7. Часть II, §8, п. 2, пред. 13]. Для любых чисел $n, m \geq n_0$ функция f_ε принимает постоянные значения на элементах разбиений $\pi_n = \{A_{n1}, \dots, A_{nk_n}\}$ и $\pi_m = \{A_{m1}, \dots, A_{mk_m}\}$, то есть

$$f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{k_n} x_{nk} \chi_{A_{nk}}$$

и

$$f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{k_m} x_{mk} \chi_{A_{mk}}.$$

Следовательно, на основании соотношения (3.4), для любых чисел $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned}
&\int_S \|f_{\pi_n}(s) - f_{\pi_m}(s)\| d\mu(s) \leq \\
&\leq \int_S \|f_{\pi_n}(s) - f_\varepsilon(s)\| d\mu(s) + \int_S \|f_\varepsilon(s) - f_{\pi_m}(s)\| d\mu(s) = \\
&= \sum_{k=1}^{k_n} \int_{A_{nk}} \left\| \frac{v(A_{nk})}{\mu(A_{nk})} - x_{nk} \right\| \chi_{A_{nk}}(s) d\mu(s) + \\
&+ \sum_{k=1}^{k_m} \int_{A_{mk}} \left\| \frac{v(A_{mk})}{\mu(A_{mk})} - x_{mk} \right\| \chi_{A_{mk}}(s) d\mu(s) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{k_n} \|v(A_{nk}) - x_{nk} \mu(A_{nk})\| + \sum_{k=1}^{k_m} \|v(A_{mk}) - x_{mk} \mu(A_{mk})\| = \\
&= \sum_{k=1}^{k_n} \left\| \int_{A_{nk}} (f(s) - f_\varepsilon(s)) d\mu(s) \right\| + \sum_{k=1}^{k_m} \left\| \int_{A_{mk}} (f(s) - f_\varepsilon(s)) d\mu(s) \right\| \leq \\
&\leq \sum_{k=1}^{k_n} \int_{A_{nk}} \|f(s) - f_\varepsilon(s)\| d\mu(s) + \sum_{k=1}^{k_m} \int_{A_{mk}} \|f(s) - f_\varepsilon(s)\| d\mu(s) = \\
&= 2 \int_S \|f(s) - f_\varepsilon(s)\| d\mu(s) = 2\|f - f_\varepsilon\|_{L_X^1} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ заключаем, что последовательность $(f_{\pi_n})_{n \geq 1}$ является фундаментальной по норме банахова пространства L_X^1 .

Покажем теперь, что сама **направленность** (f_π) является фундаментальной по норме банахова пространства L_X^1 . В самом деле, в противном случае существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого разбиения π существуют разбиения $\pi', \pi'' \geq \pi$ такие, что

$$\|f_{\pi'} - f_{\pi''}\|_{L_X^1} \geq 2\varepsilon.$$

Тогда либо $\|f_{\pi'} - f_\pi\|_{L_X^1} \geq \varepsilon$, либо $\|f_{\pi''} - f_\pi\|_{L_X^1} \geq \varepsilon$. Следовательно, для разбиения π_1 существует разбиение $\pi_2 \geq \pi_1$ такое, что $\|f_{\pi_2} - f_{\pi_1}\|_{L_X^1} \geq \varepsilon$, для разбиения π_2 существует разбиение $\pi_3 \geq \pi_2$ такое, что $\|f_{\pi_3} - f_{\pi_2}\|_{L_X^1} \geq \varepsilon$ и так далее. Таким образом, существует возрастающая последовательность разбиений $(\pi_n)_{n \geq 1}$ такая, что при $n \geq 1$

$$\|f_{\pi_{n+1}} - f_{\pi_n}\|_{L_X^1} \geq \varepsilon,$$

то есть последовательность $(f_{\pi_n})_{n \geq 1}$ не является фундаментальной по норме банахова пространства L_X^1 . Получено противоречие.

Для фундаментальной по норме банахова пространства L_X^1 направленности (f_π) существует функция $f \in L_X^1$ такая, что

$$\lim_{\pi} \|f_\pi - f\|_{L_X^1} = 0. \quad (3.5)$$

В самом деле, существует возрастающая последовательность разбиений $(\pi_n)_{n \geq 1}$ и функция $f \in L_X^1$ такие, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_{\pi_n} - f\|_{L_X^1} = 0$$

и для любого разбиения $\pi \geq \pi_n$

$$\|f_\pi - f_{\pi_n}\|_{L_X^1} < \frac{1}{n}.$$

Поэтому для любого числа $\varepsilon > 0$ существует n такое, что $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\|f_{\pi_n} - f\|_{L_X^1} < \frac{\varepsilon}{2}$ и, значит, для любого разбиения $\pi \geq \pi_n$

$$\|f_\pi - f\|_{L_X^1} \leq \|f_\pi - f_{\pi_n}\|_{L_X^1} + \|f_{\pi_n} - f\|_{L_X^1} < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, направленность (f_π) сходится к функции f по норме банахова пространства L_X^1 .

На основании соотношений (3.1) и (3.5), для любого измеримого множества $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = X - \lim_{\pi} \int_A f_\pi(s) d\mu(s) = \int_A f(s) d\mu(s). \quad (3.6)$$

Более того, $\|f\| = \varphi$.

Второй этап. Предположим, что множество $S \in \Sigma(L_R, L_R^*)$ и функция $\varphi \in L_R^1$. Тогда измеримые множества

$$S_n = \{s \in S : n-1 \leq \varphi(s) < n\} \in \Sigma(L_R, L_R^*)$$

при $n \geq 1$ попарно не пересекаются и образуют разбиение множества S . Функция $\varphi \chi_{S_n} \in L_R^\infty$. На основании доказанного на первом этапе существует функция $f_n \in L_X^1$ такая, что μ -почти всюду $\|f_n(s)\| = \varphi(s) \chi_{S_n}(s)$ и для любого измеримого множества $A \subseteq S_n$

$$\nu(A) = \int_A f_n(s) d\mu(s).$$

Измеримая функция $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in L_X^1$, μ -почти всюду $\|f(s)\| = \varphi(s)$ и для любого измеримого множества $A \in \Sigma$ на основании соотношения (3.6)

$$\nu(A) = \int_A f(s) d\mu(s). \quad (3.7)$$

Третий этап. На основании замечания к определению 2 [6, п. 1], существует последовательность $(S_n)_{n \geq 1}$ измеримых попарно непересекающихся множеств $S_n \in \Sigma(L_R, L_R^*)$ при $n \geq 1$ такая, что $S = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n$. Пусть число $n \geq 1$. В силу доказанного на втором этапе соотношения (3.7), существует функция $f_n \in L_X^1$ такая, что μ -почти всюду $\|f_n(s)\| = \varphi(s) \chi_{S_n}(s)$ и для любого измеримого множества $A \subseteq S_n$

$$\nu(A) = \int_A f_n(s) d\mu(s).$$

Измеримая функция $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n \in L_X^1$ и для любого множества $A \in \Sigma$

$$\nu(A) = \int_A f(s) d\mu(s).$$

В силу произвольности абсолютно непрерывной относительно μ векторной меры ν конечной вариации заключаем, что банахово пространство X обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) .

Достаточность. Пусть пространство X является секвенциально полным в топологии $\sigma(X, Y)$ и обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) .

Пусть последовательность (f_n) является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X, L_X^*)$ совершенного пространства L_X . Тогда, на основании критерия слабой фундаментальности [6, п. 2, теорема 3], для ограниченной последовательности (f_n) выполняется условие (1) критерия слабой сходимости [6, п. 2, теорема 4]. Кроме того, для любого измеримого множества $A \in \Sigma$ последовательность $(\int_A f_n(s) d\mu(s))$

является фундаментальной в топологии $\sigma(X, Y)$ в секвенциально полном в этой топологии пространстве X . Другими словами, для последовательности (f_n) выполняется условие (2) критерия слабой сходимости [6, п. 2, теорема 4]. Следовательно, существует функция $f \in L_X$, к которой (f_n) сходится в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$, то есть совершенное пространство L_X является секвенциально полным в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$. Доказательство теоремы 1 завершено.

Теорема 2. Совершенное пространство L_X является квазиполным в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$ тогда и только тогда, когда совершенное пространство L_R является квазиполным в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$, пространство X является квазиполным в топологии $\sigma(X, Y)$ и обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) .

Доказательство. Необходимость. Пусть ограниченная направленность $(\varphi_\alpha) \subset L_R$ является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$, то есть для любой функции $\psi \in L_R^*$

$$\lim_{\alpha_1, \alpha_2} \int_S (\varphi_{\alpha_1}(s) - \varphi_{\alpha_2}(s)) \psi(s) d\mu(s) = 0.$$

Фиксируем ненулевой элемент $x \in X$. Рассмотрим ограниченную направленность $(\varphi_\alpha) \subset L_X$. Для любой функции $g \in L_Y^*$ функция $\langle x, g \rangle \in L_R^*$ и, значит,

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha_1, \alpha_2} \int_S \langle x\varphi_{\alpha_1}(s) - x\varphi_{\alpha_2}(s), g(s) \rangle d\mu(s) = \\ & = \lim_{\alpha_1, \alpha_2} \int_S (\varphi_{\alpha_1}(s) - \varphi_{\alpha_2}(s)) \langle x, g(s) \rangle d\mu(s) = 0, \end{aligned}$$

то есть направленность $(x\varphi_\alpha)$ является фундаментальной с слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$. Следовательно, существует функция $f \in L_X$, к которой направленность $(x\varphi_\alpha)$ сходится в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$, то есть для любой функции $g \in L_Y^*$

$$\lim_\alpha \int_S \langle x\varphi_\alpha(s) - f(s), g(s) \rangle d\mu(s) = 0.$$

Пусть элемент $y \in Y$ такой, что $\langle x, y \rangle = 1$. Тогда функция $\langle f, y \rangle \in L_R$, и, значит, для любой функции $\psi \in L_R^*$, поскольку функция $y\psi \in L_Y^*$,

$$\begin{aligned} & \lim_\alpha \int_S (\varphi_\alpha(s) - \langle f(s), y \rangle) \psi(s) d\mu(s) = \\ & = \lim_\alpha \int_S \langle x\varphi_\alpha(s) - f(s), y\psi(s) \rangle d\mu(s) = 0, \end{aligned}$$

то есть направленность (φ_α) сходится к функции $\langle f, y \rangle$ в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$. Следовательно, совершенное пространство L_R является квазиполным в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$.

Пусть ограниченная направленность $(x_\alpha) \subset X$ является фундаментальной в топологии $\sigma(X, Y)$. Фиксируем измеримое множество $A \in \Sigma(L_R, L_R^*)$. Рассмотрим ограниченную направленность $(x_\alpha \chi_A) \subset L_X$. Тогда для любой функции $g \in L_Y^*$

$$\lim_{\alpha_1, \alpha_2} \int_S \langle x_{\alpha_1} \chi_A(s) - x_{\alpha_2} \chi_A(s), g(s) \rangle d\mu(s) =$$

$$= \lim_{\alpha_1, \alpha_2} \langle x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2}, \int_A g(s) d\mu(s) \rangle = 0,$$

то есть направленность $(x_\alpha \chi_A)$ является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$. Следовательно, существует функция $f \in L_X$, к которой направленность $(x_\alpha \chi_A)$ сходится в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$, то есть для любой функции $g \in L_Y^*$

$$\lim_\alpha \int_S \langle x_\alpha \chi_A(s) - f(s), g(s) \rangle d\mu(s) = 0.$$

Для любого элемента $y \in Y$ функция $y \chi_A \in L_Y^*$ и, значит,

$$\begin{aligned} & \lim_\alpha \langle x_\alpha \mu(A) - \int_A f(s) d\mu(s), y \rangle = \\ & = \lim_\alpha \int_S \langle x_\alpha \chi_A(s) - f(s), y \chi_A(s) \rangle d\mu(s) = 0, \end{aligned}$$

то есть направленность (x_α) сходится к элементу $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f(s) d\mu(s) \in X$ в топологии $\sigma(X, Y)$. Следовательно, пространство X является квазиполным в топологии $\sigma(X, Y)$.

Совершенное пространство L_X является секвенциально полным в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$, поскольку любое квазиполное пространство является секвенциально полным, а пространство L_X является квазиполным в слабой топологии, в силу предположения. Следовательно, на основании теоремы 1, банахово пространство X обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) .

Достаточность. Предположим, что совершенное пространство L_R является квазиполным в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$, пространство X является квазиполным в топологии $\sigma(X, Y)$ и обладает свойством Радона–Никодима относительно пространства с мерой (S, Σ, μ) . Пусть ограниченная направленность (f_α) совершенного пространства L_X является фундаментальной в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$.

Ограниченное множество $(\|f_\alpha\|)$ в совершенном пространстве L_R является ограниченным в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$. В слабо квазиполном пространстве слабо ограниченное множество является слабо относительно компактным ([8. Гл. IV. §5. п. 5]). Следовательно, множество $(\|f_\alpha\|)$ в совершенном пространстве L_R является относительно компактным в слабой топологии $\sigma(L_R, L_R^*)$. Тогда, на основании критерия слабой относительной компактности множества в совершенном пространстве L_R [6, п. 2, теорема 5], для неотрицательной функции $\psi \in L_Y^*$ и последовательности измеримых множеств $A_n \downarrow \emptyset$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_\alpha \int_{A_n} \|f_\alpha(s)\| \cdot \psi(s) d\mu(s) = 0. \quad (3.8)$$

Пусть измеримое множество $A \in \Sigma(L_R^*)$. Для любого элемента $y \in Y$ функция $y \chi_A \in L_Y^*$ и, значит,

$$\lim_{\alpha_1, \alpha_2} \langle \int_A f_{\alpha_1}(s) d\mu(s) - \int_A f_{\alpha_2}(s) d\mu(s), y \rangle =$$

$$= \lim_{\alpha_1, \alpha_2} \int_S \langle f_{\alpha_1}(s) - f_{\alpha_2}(s), \gamma \chi_A(s) \rangle d\mu(s) = 0,$$

то есть ограниченная направленность $(\int_A f_\alpha(s) d\mu(s))$ является фундаментальной в топологии $\sigma(X, Y)$ пространства X , которое само квазиполно в этой топологии. Следовательно, для любого измеримого множества $A \in \Sigma(L_R^*)$ направленность $(\int_A f_\alpha(s) d\mu(s))$ является в пространстве X сходящейся в топологии $\sigma(X, Y)$. Отсюда, в силу соотношения (3.8) и на основании утверждения (3) леммы 3 [6, п. 2] заключаем, что ограниченная направленность $(f_\alpha) \subset L_X$ является сходящейся в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$. Другими словами, совершенное пространство L_X является квазиполным в слабой топологии $\sigma(L_X, L_Y^*)$.

Литература

- [1] Diedone, J. Sur les espaces de Kothe / J. Diedone // J. Analyse Math. 1951. V. 1. P. 81–115.
- [2] Грибанов, Ю.И. Некоторые классы локально выпуклых топологических пространств, 3 / Ю.И. Грибанов // Изв. вузов. Матем. 1968. Т. 68(1). С. 50–63.
- [3] Наводнов, В.Г. Слабая полнота и слабая компактность множеств в банаховом пространстве измеримых вектор-функций / В.Г. Наводнов // Марийск. политехнич. ин-т. Йошкар-Ола. 1979. 16 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 07.05.79. 1645-79 Деп.
- [4] Gordon, B. Sobre el espacio $L^p(\mu, X)$ / B. Gordon // Rev. Real. acad. Sienc. exact., fis. y natur. Madrid. 1980. V. 71(1). P. 131–136.
- [5] Данфорд, Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Шварц М.: Изд-во Иност. лит., 1962. 895 с.
- [6] Кузьмин, Ю.Н. Совершенные пространства измеримых B -значных функций, I / Ю.Н. Кузьмин // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2000. Т. 2(16). С. 34–53.
- [7] Dinculeanu, N. Vector measures / N. Dinculeanu. Berlin : DVW, 1966. 432 p.
- [8] Шефер, Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. М.: Мир, 1971. 359 с.

Поступила в редакцию 1/VI/2006;
в окончательном варианте — 15/VI/2006.

**PERFECT SPACES OF MEASURABLE B-VALUED
FUNCTIONS, II³**© 2006 Y.N.Kuzmin⁴

In this paper we continue considering perfect spaces of measurable B-valued functions in weak topology (Vestnik of Samara State University, 2000, No. 2(16)). A criterion of sequential completeness and quasicompleteness are proved. The Radon–Nicodym property of B-space values is necessary and contained among sufficient conditions.

Paper received 1/VI/2006.

Paper accepted 15/VI/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V.Astashkin.

⁴Kuzmin Yuri Nickolaevich, Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.