

УДК 517.982.27

КРИТЕРИЙ СЕПАРАБЕЛЬНОСТИ ЭКСТРАПОЛЯЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА¹

© 2006 К.В. Лыков²

В работе [1] предложен новый подход к определению экстраполяционного пространства. Там же рассмотрена задача описания таких пространств, а также приложения. В настоящей работе исследуются вопросы о сепарабельности и максимальной экстраполяционного пространства. Приведены необходимые и достаточные условия в терминах параметра, определяющего пространство.

1. Введение, предварительные замечания и вспомогательные леммы

Рассмотрим идеальные пространства функций на отрезке $[0, 1]$, норма в которых определяется L_p -нормами в следующем смысле.

Определение 1.1. Пространство E измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ будем называть экстраполяционным с параметром F и писать

$$E = \mathcal{L}_F,$$

если

$$c\|\cdot\|_E \leq \|\|\cdot\|_p\|_F \leq C\|\cdot\|_E, \quad C \geq c > 0.$$

Здесь $\|\cdot\|_p$ — обычная L_p -норма, а $\|\cdot\|_F$ — норма функции $\xi(p) = \xi(\cdot, p) = \|\cdot\|_p$ в банаховом идеальном пространстве F функций на $[1, \infty)$.

В работах [1–3] показано, что $\mathcal{L}_F$ — банахово пространство, исследован вопрос о совпадении экстраполяционных пространств с известными идеальными пространствами (пространствами Орлича, Лоренца, Марцинкевича), рассмотрены приложения к теории сходимости ортогональных рядов.

Если $L_\infty \not\subset F$, то $\mathcal{L}_F$ состоит лишь из нуля. Поэтому всюду в дальнейшем мы предполагаем, что $L_\infty \subset F$. В этом случае все пространства $\mathcal{L}_F$ будут симметричными (перестановочно-инвариантными) пространствами. Это означает, что равноизмеримые функции одновременно принадлежат или не принадлежат пространству,

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

²Лыков Константин Владимирович (alkv@list.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

и, в первом случае, имеют равные нормы. Под равноизмеримостью двух функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$ подразумевается совпадение их функций распределения:

$$\mu\{t : |x(t)| > \tau\} = \mu\{t : |y(t)| > \tau\},$$

для всех $\tau > 0$. Здесь μ — обычная мера Лебега. С теорией и основными фактами симметричных пространств можно ознакомиться по монографиям [4–5]. Примерами симметричных пространств могут служить пространства L_p , пространства Лоренца $L_{p,q}$, пространства Орлича. Основные факты о идеальных пространствах (решетках) изложены в [6].

В случае, когда параметр экстраполяции F есть пространство L_∞ с весом, экстраполяционные пространства рассматривались также Е.И. Островским в работах [7–8]. В работе [8] такие пространства названы моментными (moment spaces). Там же рассмотрены приложения к рядам и преобразованию Фурье, сингулярным интегральным операторам и теории мартингалов. В связи с этими приложениями в [8] приведена характеристика сепарабельной части моментного пространства. В настоящей работе мы рассмотрим вопрос о характеристике всех сепарабельных экстраполяционных пространств в терминах свойств параметра F , а также аналогичный вопрос о характеристике всех максимальных экстраполяционных пространств. Под максимальной симметричностью пространства E мы подразумеваем совпадение (изоморфизм) E с вторым ассоциированным пространством E'' . Напомним, что ассоциированное пространство E' состоит из всех измеримых функций $y = y(t)$, для которых

$$\|y\|_{E'} = \sup \left\{ \int_0^1 x(t)y(t)dt : x \in E, \|x\|_E \leq 1 \right\} < \infty.$$

Вообще, под вложением одного банахова пространства в другое всюду далее подразумевается непрерывное вложение, а под совпадением двух пространств мы будем иметь ввиду изоморфизм. Для произвольного симметричного пространства E на отрезке $[0, 1]$ имеют место вложения

$$L_\infty \subset E \subset L_1.$$

Для экстраполяционных пространств, кроме этого,

$$L_\infty \subset \mathcal{L}_F \subset L_p, \text{ для всех } p < \infty.$$

Далее нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1.1. Если $E = \mathcal{L}_F \neq L_\infty$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\chi_{[N, \infty)}\|_F = 0$$

Здесь и далее через χ_A обозначается характеристическая функция (индикатор) множества A .

Доказательство. Пусть $x \in E \setminus L_\infty$. Тогда

$$\|x\|_p \rightarrow \infty \text{ при } p \rightarrow \infty.$$

Поэтому для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется p_n , для которого

$$\|x\|_{p_n} > n.$$

Тогда справедливы оценки:

$$\|\chi_{[p_n, \infty)}\|_F \leq \frac{1}{n} \left\| \|x\|_{p_n} \chi_{[p_n, \infty)} \right\|_F \leq \frac{1}{n} \|x\|_E \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Лемма 1.2. Если $\mathcal{L}_F = L_\infty$, то

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|\chi_{[N, \infty)}\|_F > 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций из L_∞ :

$$x_k = x_k(t) = \chi_{[0, 2^{-k}]}(t).$$

Тогда

$$\|x_k\|_\infty = 1 \text{ и } \|x_k\|_p = 2^{-k/p}.$$

Поэтому находим, что

$$1 = \|x_k\|_\infty \leq C \|\|x_k\|_p\|_F \leq C \left(\|2^{-k/p} \chi_{[1, N)}\|_F + \|\chi_{[N, \infty)}\|_F \right),$$

откуда, устремляя k к бесконечности, получим

$$\|\chi_{[N, \infty)}\|_F \geq 1/C, \text{ для всех } N \geq 1.$$

2. О сепарабельной части экстраполяционного пространства

Под сепарабельной частью пространства E будем подразумевать наибольшее сепарабельное подпространство E^0 пространства E . Для симметричного пространства $E \neq L_\infty$ сепарабельная часть совпадает с замыканием в E пространства L_∞ всех ограниченных функций. Если же $E = L_\infty$, то $E^0 = \{0\}$, этот случай тривиален.

Теорема 2.1. Если $E = \mathcal{L}_F$, то сепарабельная часть

$$E^0 = \mathcal{L}_{F_0},$$

где F_0 — подпространство F :

$$F_0 = \left\{ f \in F : \lim_{N \rightarrow \infty} \|f \cdot \chi_{[N, \infty)}\|_F = 0 \right\}.$$

Замечание 2.1. Пространство F_0 — полное. Это легко следует из полноты F и определения F_0 .

Доказательство теоремы. Как это следует из леммы 1.2, при $E = L_\infty$

$$\mathcal{L}_{F_0} = \{0\},$$

в этом случае заключение теоремы тривиально. Пусть $E \neq L_\infty$. Тогда, в силу леммы 1.1,

$$L_\infty \subset \mathcal{L}_{F_0}.$$

Откуда, замыкая L_∞ в E , получаем вложения:

$$E^0 \subset \mathcal{L}_{F_0} \subset \mathcal{L}_F = E,$$

и для доказательства теоремы достаточно установить сепарабельность $\mathcal{L}_{F_0}$. Существует удобный критерий сепарабельности идеального пространства X на отрезке $[0, 1]$ — условие порядковой непрерывности нормы [6, гл. IV, § 3, теорема 3]:

$$x_1 \in X \text{ и } x_n \downarrow 0 \Rightarrow \|x_n\|_X \rightarrow 0. \quad (A)$$

Итак, пусть

$$x_1 \in \mathcal{L}_{F_0} \text{ и } x_n \downarrow 0.$$

Выберем $\varepsilon > 0$. Согласно определению F_0 , найдется $N_0 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\|\|x_1\|_p \cdot \chi_{[N_0, \infty)}\|_{F_0} = \|\|x_1\|_p \cdot \chi_{[N_0, \infty)}\|_F < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.1)$$

Далее, так как в L_{N_0} условие (A) выполнено, и

$$\|x_n\|_p \leq \|x_n\|_{N_0} \text{ при } p \leq N_0,$$

то найдется $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|x_n\|_p < \frac{\varepsilon}{2\|\chi_{[1, N_0]}\|_F} \text{ при } p \leq N_0 \text{ и } n \geq n_0. \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) получаем при $n \geq n_0 = n_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned} \|x_n\|_{\mathcal{L}_{F_0}} &\leq \|\|x_n\|_p \cdot \chi_{[1, N_0]}\|_{F_0} + \|\|x_n\|_p \cdot \chi_{[N_0, \infty)}\|_{F_0} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\|\chi_{[1, N_0]}\|_F} \|\chi_{[1, N_0]}\|_F + \|\|x_1\|_p \cdot \chi_{[N_0, \infty)}\|_{F_0} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

В силу произвольности ε , заключаем, что в $\mathcal{L}_{F_0}$ выполнено условие (A). Следовательно, $\mathcal{L}_{F_0}$ сепарабельно, и теорема доказана.

Следствие 2.1. Если симметричное пространство E экстраполяционно, то его сепарабельная часть E^0 также будет экстраполяционным пространством.

Следствие 2.2. Экстраполяционное пространство E сепарабельно тогда и только тогда, когда

$$E = \mathcal{L}_F,$$

где F удовлетворяет условию

$$f \in F \Rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} \|f \cdot \chi_{[N, \infty)}\|_F = 0. \quad (A_\infty)$$

Доказательство. Сепарабельность пространства E равносильна условию

$$E = E^0,$$

или, в силу теоремы 2.1, условию

$$E = \mathcal{L}_{F_0},$$

где F_0 — пространство из формулировки теоремы, которое, очевидно, условию (A_∞) удовлетворяет.

Замечание 2.2. Для сепарабельного пространства возможно равенство

$$E = \mathcal{L}_F$$

с параметром F , не удовлетворяющим условию (A_∞) . Следствие 2.2 говорит о том, что параметр экстраполяции можно поменять на другой (не изменяя само экстраполяционное пространство E), который уже будет удовлетворять условию (A_∞) .

3. Критерий максимальности экстраполяционного пространства

В этом параграфе мы исследуем вопрос о максимальности экстраполяционного пространства. Известно, что равенство

$$E = E''$$

(т.е. собственно максимальность) для идеального пространства E имеет место тогда и только тогда, когда в E выполнено условие монотонной полноты нормы [6, гл. VI, § 1, теорема 7]:

$$0 \leq x_n \in E, \ x_n \uparrow x \text{ и } \sup_n \|x_n\|_E < \infty \Rightarrow x \in E. \quad (B)$$

Мы будем рассматривать близкое условие на параметр экстраполяции F :

$$f \cdot \chi_{[1,N]} \in F \text{ и } \sup_N \|f \cdot \chi_{[1,N]}\|_F < \infty \Rightarrow f \in F. \quad (B_\infty)$$

Запись $E \in (B)$ будет означать, что норма в E монотонно полна. Аналогично, будем писать $F \in (B_\infty)$, если F удовлетворяет условию (B_∞) .

Лемма 3.1. Если $F \in (B_\infty)$, то $E = \mathcal{L}_F \in (B)$.

Доказательство. Пусть

$$0 \leq x_n \uparrow \text{ и } \sup_n \|x_n\|_E < C < \infty.$$

Так как

$$E \subset L_p,$$

то для каждого $1 \leq p < \infty$

$$\sup_n \|x_n\|_p < \infty.$$

В силу порядковой непрерывности и монотонной полноты нормы в L_p , найдется функция $x = x(t)$ такая, что

$$x_n \uparrow x \text{ и } \|x - x_n\|_p \rightarrow 0 \text{ для всех } p.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\varphi_n = \varphi_n(p) = \frac{\|x_n\|_p}{\|x\|_p}.$$

Последовательность φ_n сходится к тождественной единице на $[1, \infty)$, причем на каждом отрезке $[1, N]$ равномерно (по признаку Дини). Следовательно, найдется $n_0 = n_0(N)$, для которого

$$\varphi_{n_0}(p) > \frac{1}{2} \text{ для всех } p \in [1, N].$$

Поэтому

$$\|\|x\|_p \cdot \chi_{[1,N]}\|_F < \left\| 2\|x_{n_0}\|_p \cdot \chi_{[1,N]} \right\|_F < 2C,$$

откуда, так как по условию $F \in (B_\infty)$,

$$\xi = \xi(p) = \|x\|_p \in F,$$

или, что равносильно, $x \in \mathcal{L}_F$.

Лемма 3.2. Пусть $E = \mathcal{L}_F \in (B)$ и $E \neq L_\infty$. Если измеримая функция $x = x(t)$ такова, что

$$\xi_N = \xi_N(p) = \|x\|_p \cdot \chi_{[1,N]} \in F$$

для всех $N \in [1, \infty)$, и

$$\sup_N \|\xi_N\|_F < \infty,$$

то $x \in E$.

Доказательство. Рассмотрим срезки функции x :

$$x^M = x^M(t) = |x(t)| \cdot \chi_{\{s: |x(s)| < M\}}(t).$$

Тогда

$$\|\|x^M\|_p\|_F \leq \|\|x\|_p \cdot \chi_{[1,N]}\|_F + M\|\chi_{[N,\infty)}\|_F.$$

Устремляя N к бесконечности и пользуясь леммой 1.1, будем иметь

$$\|x^M\|_{\mathcal{L}_F} \leq \sup_N \|\xi_N\|_F < \infty.$$

Откуда, так как $x^M \uparrow |x|$ и $E \in (B)$, заключаем, что $x \in E$.

Замечание 3.1. Утверждение леммы 3.2 остается справедливым и в случае $E = L_\infty$. Но нам это не понадобится.

Лемма 3.3. Пусть F — банахово идеальное пространство на $[1, \infty)$. Тогда множество

$$F_1 = \left\{ f = f(p) : \sup_N \|f \cdot \chi_{[1, N]}\|_F < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|f\|_{F_1} = \sup_N \|f \cdot \chi_{[1, N]}\|_F$$

также является банаховым идеальным пространством на $[1, \infty)$. Кроме того, $F_1 \in (B_\infty)$.

Доказательство. Линейность F_1 и свойства нормы очевидны. Докажем полноту. Воспользуемся критерием Абрамовича [6, с. 151]. Пусть $f_n \geq 0$, носители f_n попарно дизъюнкты и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{F_1} < C < \infty.$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n \cdot \chi_{[1, N]}\|_F < C < \infty.$$

В силу полноты F существует f^N , для которой

$$f^N = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cdot \chi_{[1, N]} \text{ и } \|f^N\|_F < C < \infty.$$

Тогда для функции

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

будем иметь

$$\|f \cdot \chi_{[1, N]}\|_F = \|f^N\|_F < C < \infty.$$

Согласно определению F_1 , функция $f \in F_1$. По упомянутому выше критерию этого достаточно для полноты. Выполнение условия (B_∞) очевидно.

Замечание 3.2. Для пространства F_1 из леммы 3.3 будет выполняться также следующий аналог свойства порядковой полунепрерывности нормы:

$$f \in F_1 \Rightarrow \|f \cdot \chi_{[1, N]}\|_{F_1} \rightarrow \|f\|_{F_1} \quad (C_\infty)$$

Теорема 3.1. Экстраполяционное пространство E максимально тогда и только тогда, когда

$$E = \mathcal{L}_F$$

для некоторого $F \in (B_\infty)$.

Доказательство. В одну сторону утверждение немедленно следует из леммы 3.1. Пусть теперь $E \in (B)$. Если $E = L_\infty$, то достаточно положить $F = L_\infty$. Если же $E = \mathcal{L}_F \neq L_\infty$, то рассмотрим пространство F_1 из леммы 3.3. Очевидно $F \subset F_1$. Поэтому

$$E \subset \mathcal{L}_{F_1}.$$

Покажем, что на самом деле

$$E = \mathcal{L}_{F_1}.$$

Если $x \in \mathcal{L}_{F_1}$, то для функции

$$\xi_N = \xi_N(p) = \|x\|_p \cdot \chi_{[1,N]}$$

имеем

$$\sup_N \|\xi_N\|_F \leq \|\|x\|_p\|_{F_1} < \infty.$$

Поэтому для x выполнены условия леммы 3.2, и, следовательно, $x \in E$. Теперь достаточно заменить параметр F на F_1 , чтобы убедиться в справедливости теоремы.

Литература

- [1] Асташкин, С.В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_∞ / С.В. Асташкин, К.В. Лыков // Сиб. матем. ж. (в печати).
- [2] Асташкин, С.В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции / С.В. Асташкин // Сиб. матем. ж. 2005. Т. 46. № 2. С. 264–289.
- [3] Лыков, К.В. Экстраполяция в шкале L_p -пространств и сходимость ортогональных рядов в пространствах Марцинкевича / К.В. Лыков // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2006. №2 (42). С. 28–43.
- [4] Крейн, С.Г. Интерполяция линейных операторов / С.Г. Крейн, Ю.И. Петунин, Е.М. Семенов. М.: Наука, 1978. 400 с.
- [5] Lindenstrauss, J. Classical Banach spaces 2, Function spaces / J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979. 244 p.
- [6] Канторович, Л.В. Функциональный анализ / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. С.-Пб.: Невский диалект, 2004. 816 с.
- [7] Ostrovsky, E. Exponential Orlicz Spaces: new Norms and Applications / E. Ostrovsky // Electronic Publ., arXiv/FA/0406534, v. 1, 25.06.2004
- [8] Ostrovsky, E. Some new moment rearrangement invariant spaces; theory and applications / E. Ostrovsky // Electronic Publ., arXiv/FA/0605732, v. 1, 29.05.2006

Поступила в редакцию 19/V/2006;
в окончательном варианте — 19/V/2006.

A CRITERION OF SEPARABILITY OF THE EXTRAPOLATION SPACE³

© 2006 K.V. Lykov⁴

A new approach to definition of the extrapolation space was presented in [1]. The problem of the description of such spaces was stated there. The problems of separability and maximality of extrapolation spaces are studied in the present work. The necessary and sufficient conditions in terms of the parameter which defines the space are obtained.

Paper received 19/V/2006.

Paper accepted 19/V/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴Lykov Konstantin Vladimirovich (alkv@list.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.