

УДК 621.373.121.14

## ИНТЕГРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНО-РАСПРЕДЕЛЕННОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ<sup>1</sup>

© 2006 В.В. Зайцев, О.В. Зайцев, В.В. Никулин<sup>2</sup>

Представлен метод моделирования автоколебаний в дискретно-распределенных системах, основанный на сведении уравнений движения к форме нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и их численных решениях. Приведен пример моделирования автогенератора с резонатором на отрезке линии передачи и кубически-нелинейным активным элементом.

### Введение

Значительное число автогенераторов, применяемых на практике, относится к автоколебательным системам дискретно-распределенного типа [1]. В них сосредоточенный активный элемент локально взаимодействует с волновым полем резонатора либо система имеет распределенную цепь обратной связи.

Математические модели такого рода генераторов сводятся, как правило, к дифференциальным уравнениям в частных производных, описывающим распределенные резонаторы и обратные связи, с нелинейными граничными условиями, которые учитывают дискретные элементы автоколебательных систем. Дальнейший анализ моделей проводится на основе разложений по модам линейных резонаторов либо с использованием приближения бегущих волн медленно меняющейся амплитуды [2].

В настоящей работе предложен метод моделирования автоколебаний в дискретно-распределенных системах, основанный на представлении уравнений движения в форме нелинейных интегральных уравнений Вольтерра и их численных решениях.

---

<sup>1</sup>Представлена доктором физико-математических наук профессором В.В. Ивахником.

<sup>2</sup>Зайцев Валерий Васильевич (zaitsev@ssu.samara.ru), Зайцев Олег Валерьевич, Никулин Владимир Владимирович, кафедра радиофизики и компьютерного моделирования радиосистем Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

## 1. Автоколебательная система с распределенным резонатором и дискретным активным элементом

Рассмотрим дискретно-распределенную автоколебательную систему, состоящую из резонатора на отрезке линии передачи и активного нелинейного двухполюсника. Для определенности будем считать, что на концах отрезка линии реализован режим холостого хода по напряжению. Схематически система изображена на рис. 1.

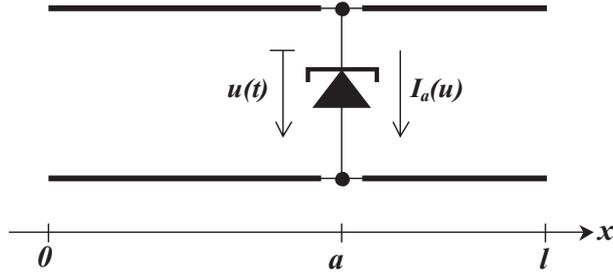


Рис. 1. Схема дискретно-распределенного автогенератора

Линию передачи в приближении поперечных электромагнитных волн будем описывать уравнением относительно волны напряжения  $U(x, t)$ :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 2\delta \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{Z_0}{c} \frac{\partial j(x, t)}{\partial t}, \quad (1)$$

где  $Z_0$  — волновое сопротивление,  $c$  и  $2\delta$  — фазовая скорость и затухание волны в линии. Правая часть уравнения (1) содержит распределенный источник тока с погонной плотностью  $j(x, t)$ . Включение в линию в точке  $x = a$  сосредоточенного двухполюсника моделируется пространственным распределением плотности тока вида

$$j(x, t) = I_a(t) \delta(x - a). \quad (2)$$

При этом ток двухполюсника задается нелинейной вольт-амперной характеристикой

$$I_a(t) = I_a(u(t)) = -g(u(t)) u(t), \quad (3)$$

где  $u(t) = U(a, t)$  — напряжение в линии в точке включения двухполюсника.

Дифференциальную модель автоколебательной системы (1)–(3) представим в интегральной форме. Для этого введем в рассмотрение функцию Грина  $G(x, t)$  линейного дифференциального оператора правой части уравнения (1):

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - 2\delta \frac{\partial G}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(t) \delta(x - a). \quad (4)$$

Уравнение (4) решается с граничными условиями  $G'_x(0, t) = G'_x(l, t) = 0$  и нулевыми начальными условиями. Результат решения можно представить

в форме

$$G(x, t) = -\frac{2c}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} \exp\left(-\frac{\omega_n}{2Q_n} t\right) \sin(\Omega_n t) \cos(k_n x) \cos(k_n a). \quad (5)$$

Здесь  $\tau = l/c$  — время распространения волны вдоль резонатора;  $\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - 1/4Q_n^2}$  и  $Q_n$  — частота и добротность колебаний  $n$ -ой моды резонатора;  $k_n = \omega_n/c = \pi n/(c\tau)$  — волновое число.

Будем считать производную  $\partial I_a/\partial t$  входным сигналом резонатора в точке  $x = a$ , а напряжение  $U(a, t)$  — выходным сигналом. Для такой комбинации вход-выход из функции Грина (5) нетрудно получить импульсную характеристику  $h(t) = (Z_0/c) G(a, t)$ :

$$h(t) = -\frac{2Z_0}{\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega_n} \exp\left(-\frac{\omega_n}{2Q_n} t\right) \sin(\Omega_n t) \cos^2(k_n a). \quad (6)$$

С учетом того, что выходной сигнал линейной системы является сверткой входного сигнала с ее импульсной характеристикой, запишем следующее нелинейное интегральное уравнение

$$u(t) = - \int_0^t I'_a(u(t_0)) \dot{u}(t_0) h(t - t_0) dt_0 + U(t). \quad (7)$$

Здесь штрих обозначает производную по аргументу  $u$ , а точка — по времени  $t_0$ ;  $U(t)$  — свободные колебания, соответствующие состоянию резонатора в начальный момент времени  $t = 0$ .

Уравнение Вольтерра второго рода (7) следует рассматривать как интегральную форму уравнения движения дискретно-распределенного автогенератора. При анализе автоколебаний речь может идти, естественно, лишь о его численном решении. Для этого с использованием подходящей квадратурной формулы можно свести уравнение (7) к системе нелинейных алгебраических уравнений, которую затем решать итерационным методом Зейделя.

## 2. Пример моделирования автоколебаний

В качестве примера проведем расчет процесса установления автоколебаний в генераторе на основе активного двухполосника с кубической вольтамперной характеристикой:

$$I_a(u) = -g_0 \left(1 - \frac{\beta}{3} u^2\right) u, \quad (8)$$

где  $g_0$  — модуль малосигнальной отрицательной проводимости,  $\beta$  — параметр нелинейности. В дальнейшем напряжение в линии и на зажимах двухполосника будем отсчитывать в единицах величины  $U_* = 1/\sqrt{\beta}$ .

На рис. 2 приведен график зависимости  $u(t)$ , рассчитанный путем численного решения интегрального уравнения движения (7) на основе квадратурной формулы трапеций с шагом  $\Delta t = 0,01\tau$ . Значения импульсной характеристики вычислены по формуле (6) с учетом  $N = 1000$  мод резонатора. При этом предполагалось, что все моды имеют одинаковые добротности:  $Q_1 = Q_2 = \dots = Q_{1000} = 100$ , однако легко учесть и любую другую зависимость затухания от частоты. Активный двухполюсник включен в резонатор в точке  $a = 0,05l$ . Автоколебания возбуждаются от начального распределения напряжения, соответствующего первой моде резонатора, со значением  $U(0) = 0,01U_*$ . Для рассчитанного процесса установления автоколебаний параметр глубины обратной связи равен  $\gamma = g_0Z_0 = 1$ .

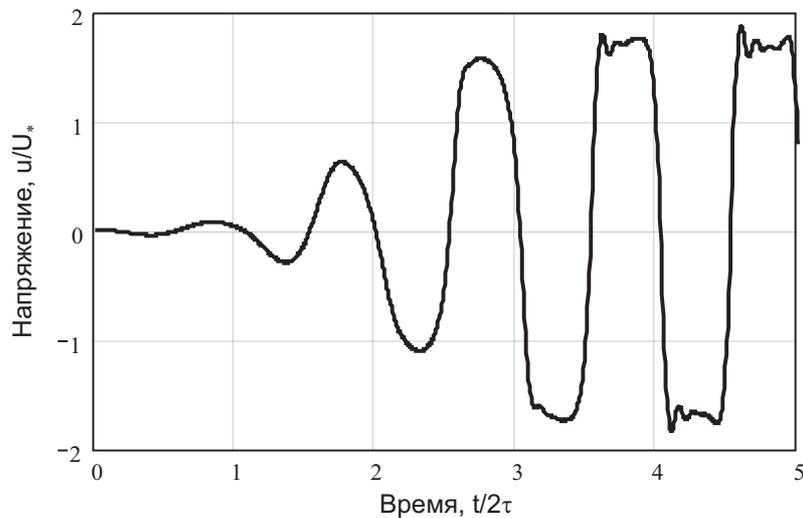


Рис. 2. Процесс установления автоколебаний ( $a/l = 0,05$ )

Характер приведенной на рис. 2 зависимости  $u(t)$  качественно соответствует физическим представлениям о процессе возбуждения автоколебаний. Действительно, в рассматриваемом случае точка включения двухполюсника находится вдали от узлов напряжения значительного числа мод резонатора. Активный элемент, эффективно взаимодействуя со множеством мод, возбуждает автоколебания с широким спектром частот, чему соответствует форма сигнала, приближающаяся к прямоугольной.

Для сравнения на рис. 3 показан график зависимости  $u(t)$  при включении двухполюсника в точку  $a = 0,5l$  при неизменных прочих параметрах системы. В этом случае активный элемент находится в узлах напряжения нечетных мод резонатора, которые теперь не возбуждаются. Низшая мода автоколебаний — это вторая мода резонатора, имеющая вдвое большую частоту, чем первая. Удвоение частоты автоколебаний отчетливо прослеживается при сопоставлении рис. 2 и рис. 3. Форма автоколебаний, показан-

ных на рис. 3, далека от прямоугольной, т.к. их спектр содержит меньшее число гармоник, чем спектр автоколебаний на рис. 2. Кроме того, в данном случае автоколебания медленнее устанавливаются и имеют меньшую амплитуду, чем в предыдущем, вследствие снижения эффективности взаимодействия активного элемента с полем резонатора.

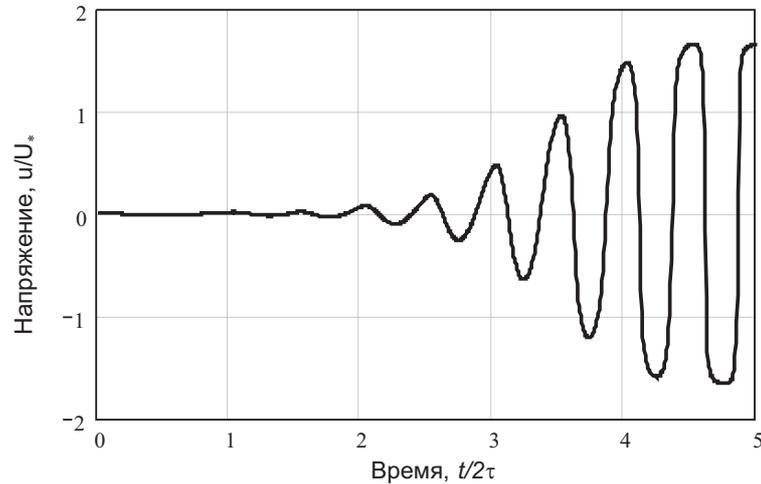


Рис. 3. Процесс установления автоколебаний ( $a/l = 0.5$ )

## Заключение

Представленный метод моделирования автоколебаний в распределенных системах с дискретными активными элементами основан на двухэтапном анализе автоколебательной системы. Расчет импульсной характеристики резонатора на первом этапе проводится точными методами теории линейных систем и, как правило, не вызывает затруднений. Форма интегрального уравнения движения (7), решаемого на втором этапе, сохраняется вне зависимости от вида импульсной характеристики. Выделение анализа линейной части системы в самостоятельную задачу обеспечивает методу значительную степень универсальности.

## Литература

- [1] Уткин, Г.М. Автоколебательные системы и волновые усилители / Г.М. Уткин. — М.: Советское радио, 1978. — 272 с.
- [2] Ланда, П.С. Автоколебания в распределенных системах / П.С. Ланда. — М.: Наука, 1983. — 320 с.
- [3] Крылов, В.И. Вычислительные методы. Т. 2 / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырский. — М.: Наука, 1977. — 400 с.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2003;  
в окончательном варианте — 19/*XII*/2003.

## INTEGRAL MODEL OF DISCRETE-DISTRIBUTED AUTOOSCILLATORY SYSTEM<sup>3</sup>

© 2006 V.V. Zaitsev, O.V. Zaitsev, V.V. Nikulin<sup>4</sup>

The modeling method of autooscillations in systems with distributed oscillators and discrete active elements based on representation of equations in form of the Wolterra's nonlinear integral equations and their numerical solutions is given. A modeling example of autooscillator with parallel-wire resonator and cubic-nonlinear active element is shown in the paper.

Paper received 18/*XI*/2003.  
Paper accepted 19/*XII*/2003.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.V. Ivakhnik.

<sup>4</sup>Zaitsev Valeriy Vasilievich ([zaitsev@ssu.samara.ru](mailto:zaitsev@ssu.samara.ru)), Zaitsev Oleg Valerievich, Nikulin Vladimir Vladimirovich, Dept. of Radiophysics and Computer Modelling of Radiotechnical Systems, Samara State University, Samara, 443011, Russia.