

УДК 519.2; 539.1

МЕТОД ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФОККЕРА—ПЛАНКА ПРИ ОПИСАНИИ КОГЕРЕНТНОЙ РЕЛАКСАЦИИ КВАНТОВЫХ АНСАМБЛЕЙ¹

© 2006 А.В. Горохов,² В.А. Михайлов³

Изучена кооперативная релаксация в системе из N двухуровневых атомов. Построено асимптотическое разложение пропагатора уравнения Фоккера—Планка для P - символа матрицы плотности квантовой системы. Найдены явные формулы для двухвременных корреляционных функций и контура линии спонтанного излучения в зависимости от параметров модели и от малого параметра разложения $1/N$.

Введение

Исследование взаимодействия малой (динамической) системы с большим диссипативным окружением является одной из важных задач в квантовой электронике и физике лазеров [1], поскольку особенности такого взаимодействия непосредственно влияют на характеристики электромагнитного излучения. Теоретическую основу изучения процессов релаксации составляет метод кинетического уравнения для матрицы плотности малой подсистемы (см., например, [2,3]). Методу кинетического уравнения и его решениям посвящено большое количество публикаций. В последнее время новый интерес к этой задаче стимулирован анализом явлений декогеренции в связи с технологиями квантовой информации [4]. В [5] был развит метод сведения операторного кинетического уравнения к уравнению типа уравнения Фоккера—Планка (УФП) для P — символа матрицы плотности

$$\hat{\rho}(t) = \int_{\mathcal{X}} d\mu(\zeta) P(\zeta, t) |\zeta\rangle\langle\zeta|,$$

пригодный для описания релаксации квантовых систем с гамильтонианом, обладающим линейной группой динамической симметрии. Среди подоб-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.В. Ивахником.

²Горохов Александр Викторович (gorokhov@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

³Михайлов Виктор Александрович (va_mikhailov@mail.ru), кафедра физики Самарского государственного аэрокосмического университета, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 32.

ных систем — важные в квантовой оптике — гармонический осциллятор и n -уровневые атомы. Метод использует технику теоретико-групповых когерентных состояний $|\xi\rangle$ (КС) и аппарат обобщенных сферических функций на однородных пространствах X группы динамической симметрии — фазовых пространствах классических аналогов квантовой системы (см. терминологию в [5]). В [6] были получены точные формулы, непосредственно связывающие наблюдаемые величины (населенности уровней, корреляционные функции и ширины контура линии излучения) с пропагатором УФП, который в ряде физически интересных случаев находится в явном виде. В работе [7] в рамках данного метода исследована релаксация квантовой системы во внешних стохастических полях.

К сожалению, построение точных решений УФП для двух- и трехуровневых систем методом разложения по сферическим функциям эффективно только для небольшого числа частиц. В квантовой оптике и радиофизике большой интерес представляет задача описания релаксации ансамбля, состоящего из большого числа одинаковых частиц (атомов, молекул) — модель Дикке [1]. Это соответствует случаю, когда размеры, занимаемые системой, значительно меньше длины волны фотонов, излучаемых на рассматриваемых переходах, и все атомы находятся в одинаковых условиях. При этом гамильтониан системы коммутирует с оператором любой перестановки частиц. Основным достоинством УФП, выведенных в [5], является то, что они справедливы для всех полносимметричных представлений группы $SU(n)$ -группы динамической симметрии системы тождественных n -уровневых атомов. В случае согласованного распада начального состояния релаксация происходит внутри неприводимых представлений группы $SU(2)$, получающихся при декомпозиции прямого произведения N неприводимых двумерных представлений, соответствующих изолированной двухуровневой частице.

В настоящей работе предлагается метод нахождения решений УФП для большого числа кооперативно (когерентно) релаксирующих двухуровневых атомов в виде асимптотического разложения по обратным степеням числа частиц. Развиваемый далее подход использует физически понятную аналогию между спектром энергий квантового осциллятора и уровнями энергии системы большого числа N двухуровневых атомов при $N \rightarrow \infty$. Хорошо известно [8], что КС группы $SU(2)$ при $j \rightarrow \infty$, где $j = N/2$, переходят в осцилляторные КС, связанные с группой Гейзенберга—Вейля. Для достаточно большого числа частиц и не слишком высоких температур ограниченность сверху спектра энергий не должна сказываться, и тогда "осцилляторное" приближение представляется вполне оправданным.

1. Теория возмущений для уравнения Фоккера—Планка

В общем случае УФП, к которому сводится в указанных случаях описание релаксации, можно записать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{L}f, \quad (1.1)$$

где $\hat{L}$ — дифференциальный оператор не выше второго порядка, соответствующего уравнения Фоккера—Планка [5]. Метод КС позволяет оператор $\hat{L}$ представить в виде суммы по степеням малости $1/N$ в виде

$$\hat{L} = \hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \quad (1.2)$$

и применить эффективный аппарат теории возмущений для нахождения приближенного значения пропагатора уравнения (1.1). Формальное решение уравнения (1.1) записывается в виде

$$f(t) = e^{t\hat{L}}f(0) \equiv \hat{V}(t)f(0), \quad (1.3)$$

где $\hat{V}(t) = e^{t\hat{L}}$, дифференцируя которое по времени, получаем

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} = \hat{L}e^{t\hat{L}} = \hat{L}\hat{V}(t) = \left(\hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2\right)\hat{V}(t). \quad (1.4)$$

Пусть известно решение нулевого порядка теории возмущений

$$\hat{V}_0(t) \equiv e^{t\hat{L}_0},$$

соответствующее уравнению

$$\frac{\partial \hat{V}_0}{\partial t} = \hat{L}_0\hat{V}_0(t). \quad (1.5)$$

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$\hat{V}(t) = \hat{V}_0(t)\hat{V}_I(t).$$

Тогда

$$\frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} = \frac{\partial \hat{V}_0(t)}{\partial t}\hat{V}_I(t) + \hat{V}_0(t)\frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} = \left(\hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2\right)\hat{V}_0(t)\hat{V}_I(t) \quad (1.6)$$

и, с учетом (1.5), получим

$$\frac{\partial \hat{V}_I(t)}{\partial t} = \hat{V}_0^{-1}(t)\left(\frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2\right)\hat{V}_0(t)\hat{V}_I(t). \quad (1.7)$$

Решение (1.7) записывается как разложение временной экспоненты

$$\hat{V}_I(t) = \hat{I} + \frac{1}{N} \int_0^t \hat{V}_0^{-1}(t')\hat{L}_1\hat{V}_0(t')dt' +$$

$$+ \frac{1}{N^2} \left[\int_0^t \hat{V}_0^{-1}(t') \hat{L}_2 \hat{V}_0(t') dt' + \int_0^t \int_0^{t'} \hat{V}_0^{-1}(t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t') V_0^{-1}(t'') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t'') dt' dt'' \right] + \dots,$$

что позволяет записать решение уравнения (1.4), используя (1.6) в виде

$$\begin{aligned} \hat{V}(t) = & \hat{V}_0(t) + \frac{1}{N} \int_0^t \hat{V}_0(t-t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t') dt' + \\ & + \frac{1}{N^2} \left[\int_0^t \hat{V}_0(t-t') \hat{L}_2 \hat{V}_0(t') dt' + \int_0^t \int_0^{t'} \hat{V}_0(t-t') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t'-t'') \hat{L}_1 \hat{V}_0(t'') dt' dt'' \right] + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Ограничимся в дальнейшем только членами порядка $1/N$, не учитывая первый порядок теории возмущений для оператора $\hat{L}_2$, члены которого имеют порядок $1/N^2$ (первое слагаемое в круглых скобках) и применим (1.8) для описания релаксации ансамбля из большого числа двухуровневых систем.

2. Когерентная релаксация ансамбля двухуровневых атомов

Операторное кинетическое уравнение, описывающее кооперативную релаксацию двухуровневых атомов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & \frac{\gamma}{2} \left[(< \nu > + 1) (2 \hat{J}_- \hat{\rho} \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_- \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \right. \\ & \left. + < \nu > (2 \hat{J}_+ \hat{\rho} \hat{J}_- - \hat{J}_- \hat{J}_+ \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{J}_- \hat{J}_+) \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь γ — константа затухания, $< \nu > = (\exp(\hbar\omega_0/kT) - 1)^{-1}$ — среднее число фотонов в термостате при температуре T на частоте перехода ω_0 между уровнями атома, а операторы $\hat{J}_{\pm}$ описывают переходы между коллективными уровнями ансамбля двухуровневых атомов внутри полносимметричного неприводимого представления для $j = N/2$.

Соответствующее ему уравнение Фоккера—Планка в параметризации КС группы $SU(2)$ атомной подсистемы имеет вид [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[(< \nu > + 1) \left(2jz + \frac{\partial}{\partial z} z^2 + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} z^2 \bar{z}^2 \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + < \nu > \left(-2jz + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + z^2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \right] + k.c. \right) f = \hat{L} f. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Для того, чтобы оператор $\hat{L}$ уравнения Фоккера—Планка (2.10) представить в виде (1.2), удобном для применения теории возмущения, надо воспользоваться тем фактом, что в пределе больших j КС группы $SU(2)$

переходят в осцилляторные КС. При этом выполняются следующие правила перехода:

$$\hat{J}_+ \rightarrow \sqrt{2j}\hat{a}^+; \quad \hat{J}_- \rightarrow \sqrt{2j}\hat{a}; \quad z \rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{2j}}; \quad \bar{z} \rightarrow \frac{\bar{\alpha}}{\sqrt{2j}}, \quad (2.11)$$

что приводит к соотношениям

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \sqrt{2j} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \rightarrow \sqrt{2j} \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}}. \quad (2.12)$$

Уравнение Фоккера–Планка (2.10) с учетом (2.11) и (2.12) для больших чисел $N = 2j$ двухуровневых атомов рассматриваемого ансамбля запишется в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \hat{L}f = \left(\hat{L}_0 + \frac{1}{N}\hat{L}_1 + \frac{1}{N^2}\hat{L}_2 \right) f, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{L}_0 &= \frac{\gamma^*}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha} + 2 \langle \nu \rangle \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \right), \\ \hat{L}_1 &= \frac{\gamma^*}{4} (\langle \nu \rangle + 1) \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \alpha^2 + \frac{\partial^2}{\partial \bar{\alpha}^2} \bar{\alpha}^2 \right) + \langle \nu \rangle \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha^2 \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \bar{\alpha}^2 \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \right), \\ \hat{L}_2 &= \frac{\gamma^*}{2} (\langle \nu \rangle + 1) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \bar{\alpha}} \alpha^2 \bar{\alpha}^2. \end{aligned}$$

Здесь $\gamma^* = 2j\gamma = N\gamma$.

Окончательное выражение для функции Грина, или пропагатора, уравнения (2.13) в представлении КС имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \hat{V}(t) | \alpha_0 \rangle &\equiv \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) = \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) + \\ &+ \frac{1}{N} \int_0^t \int \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1, t') \langle \alpha_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_2, \bar{\alpha}_2, t' | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) dt' d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) + \\ &+ \frac{1}{N^2} \left(\int_0^t \int \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1, t') \langle \alpha_1 | \hat{L}_2 | \alpha_2 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_2, \bar{\alpha}_2, t' | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) dt' d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^{t'} \int \dots \int \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}, t | \alpha_1, \bar{\alpha}_1, t') \langle \alpha_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_2, \bar{\alpha}_2, t' | \alpha_3, \bar{\alpha}_3, t'') \times \right. \\ &\quad \left. \times \langle \alpha_3 | \hat{L}_1 | \alpha_4 \rangle \mathcal{K}_0(\alpha_4, \bar{\alpha}_4, t'' | \alpha_0, \bar{\alpha}_0, 0) dt' dt'' d\mu(\alpha_1) d\mu(\alpha_2) d\mu(\alpha_3) d\mu(\alpha_4) \right) + \dots \quad (2.14) \end{aligned}$$

Уравнение (1.5), в котором оператор $\hat{L}_0$ определен выше, описывает релаксацию гармонического осциллятора. Его пропагатор известен (см., например, [5]):

$$\mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha', \bar{\alpha}'; 0) =$$

$$= \frac{1}{\langle v \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})} \exp \left[- \frac{\left(\alpha - \alpha_0 e^{-\frac{\gamma^* t}{2}} \right) \left(\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0 e^{-\frac{\gamma^* t}{2}} \right)}{\langle v \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})} \right]. \quad (2.15)$$

Для вычисления матричного элемента $\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2, \bar{\alpha}_2 \rangle$, входящего во второе слагаемое правой части (2.14), удобно ввести базис $|w, \bar{w}\rangle$, обладающий следующими свойствами

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} |w, \bar{w}\rangle &= \bar{w} |w, \bar{w}\rangle, & \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} |w, \bar{w}\rangle &= -w |w, \bar{w}\rangle, \\ \langle \alpha, \bar{\alpha} | w, \bar{w} \rangle &= e^{\alpha \bar{w} - \bar{\alpha} w}, & d\mu(w, \bar{w}) &= \frac{d(\operatorname{Re}(w)) d(\operatorname{Im}(w))}{\pi}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

тогда

$$\langle \alpha_1, \bar{\alpha}_1 | \hat{L}_1 | \alpha_2, \bar{\alpha}_2 \rangle = \int d\mu(w, \bar{w}) \langle \alpha_1, \bar{\alpha}_1 | \hat{L}_1 | w, \bar{w} \rangle \langle w, \bar{w} | \alpha_2, \bar{\alpha}_2 \rangle. \quad (2.17)$$

Опуская все промежуточные вычисления, приведем выражение для пропагатора (2.14) с точностью до $1/j$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) &= \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\gamma^*}{4j} (2 \langle v \rangle + 1) \left\{ \frac{1}{\langle v \rangle^2 (1 - e^{-\gamma^* t})^4} \left[2\alpha^2 \bar{\alpha}^2 A_1 + (\bar{\alpha}^2 \alpha_0^2 + \alpha^2 \bar{\alpha}_0^2) A_2 - \right. \right. \\ &- 2(\alpha \bar{\alpha}^2 \alpha_0 + \alpha^2 \bar{\alpha} \bar{\alpha}_0 + \alpha \alpha_0 \bar{\alpha}_0^2 + \bar{\alpha} \alpha_0^2 \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{3}{2} \gamma^* t} A_3 + 8\alpha \bar{\alpha} \alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_4 + 2\alpha_0^2 \bar{\alpha}_0^2 e^{-2\gamma^* t} A_5 \Big] + \\ &+ \frac{1}{\langle v \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})^3} \left[-8\alpha \bar{\alpha} A_1 - 8\alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_4 + 4(\bar{\alpha} \alpha_0 + \alpha \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{3}{2} \gamma^* t} A_3 \right] + \\ &+ \frac{1}{\langle v \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})^2} \left[8\alpha \bar{\alpha} A_6 - 4(\bar{\alpha} \alpha_0 + \alpha \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{1}{2} \gamma^* t} A_3 + 8\alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_7 \right] + \\ &+ \frac{4}{(1 - e^{-\gamma^* t})^2} A_1 - \frac{8}{1 - e^{-\gamma^* t}} A_6 \Big\} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) - \\ &- \frac{\gamma^*}{4j} (3 \langle v \rangle + 2) \left\{ \frac{1}{\langle v \rangle (1 - e^{-\gamma^* t})^2} \left[-2\alpha \bar{\alpha} A_6 + (\bar{\alpha} \alpha_0 + \alpha \bar{\alpha}_0) e^{-\frac{\gamma^* t}{2}} A_3 - \right. \right. \\ &- 2\alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{-\gamma^* t} A_7 \Big] + \frac{2}{1 - e^{-\gamma^* t}} A_6 \Big\} \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0) - \\ &- \frac{\gamma^*}{4j} 2 \langle v \rangle t \mathcal{K}_0(\alpha, \bar{\alpha}; t | \alpha_0, \bar{\alpha}_0; 0). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} A_1 &= t e^{-2\gamma^* t} + \frac{3}{2\gamma^*} e^{-2\gamma^* t} - \frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} + \frac{1}{2\gamma^*}, \\ A_2 &= t e^{-\gamma^* t} + t e^{-3\gamma^* t} + \frac{1}{\gamma^*} e^{-3\gamma^* t} - \frac{1}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t}, \quad A_3 = t + t e^{-\gamma^* t} - \frac{2}{\gamma^*} + \frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t}, \\ A_4 &= t e^{-\gamma^* t} + \frac{1}{2\gamma^*} e^{-2\gamma^* t} - \frac{1}{2\gamma^*}, \quad A_5 = t - \frac{3}{2\gamma^*} + \frac{2}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} - \frac{1}{2\gamma^*} e^{-2\gamma^* t}, \\ A_6 &= t e^{-\gamma^* t} + \frac{1}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} - \frac{1}{\gamma^*}, \quad A_7 = t + \frac{1}{\gamma^*} e^{-\gamma^* t} - \frac{1}{\gamma^*}. \end{aligned}$$

3. Контур линии излучения ансамбля двухуровневых атомов

Несмотря на громоздкий вид пропагатора (2.18), выражение для двухвременной корреляционной функции имеет простой вид

$$\langle \hat{a}^+(t) \hat{a}(0) \rangle = \alpha_0 \bar{\alpha}_0 e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma^* t}{2}} - \alpha \bar{\alpha}_0 \frac{\gamma^*}{4j} (7 \langle \nu \rangle + 3) t e^{i\omega_0 t - \frac{\gamma^* t}{2}}, \quad (3.19)$$

что дает следующее выражение для формы контура линии излучения

$$g(\omega) = \text{Re} \int_0^\infty dt e^{-i\omega t} \langle \hat{a}^+(t) \hat{a}(0) \rangle = \\ = \alpha_0 \bar{\alpha}_0 \left[\frac{N \frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(N \frac{\gamma}{2}\right)^2} + (7 \langle \nu \rangle + 3) \frac{\gamma}{2} \frac{(\omega - \omega_0)^2 - \left(N \frac{\gamma}{2}\right)^2}{\left((\omega - \omega_0)^2 + \left(N \frac{\gamma}{2}\right)^2\right)^2} \right], \quad (3.20)$$

здесь $N = 2j$ — число двухуровневых атомов в ансамбле.

Метод расчета контура линии излучения, которому мы здесь следуем, изложен в работах [6,7].

P — символ равновесной матрицы плотности $P_{eq}(\alpha, \bar{\alpha})$ при температуре T_0 получается из выражения (2.18) при условии $t \rightarrow \infty$ и замене $\langle \nu \rangle \rightarrow \langle \nu_0 \rangle$.

При вычислении формы контура линии излучения при релаксации ансамбля двухуровневых атомов из некоторого равновесного состояния, характеризуемого температурой T_0 в другое равновесное состояние, характеризуемое температурой $T < T_0$, находим

$$g(\omega) = \langle \nu_0 \rangle \left[\frac{N \frac{\gamma}{2}}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(N \frac{\gamma}{2}\right)^2} + (7 \langle \nu \rangle + 3) \frac{\gamma}{2} \frac{(\omega - \omega_0)^2 - \left(N \frac{\gamma}{2}\right)^2}{\left((\omega - \omega_0)^2 + \left(N \frac{\gamma}{2}\right)^2\right)^2} \right]. \quad (3.21)$$

Суть данного подхода как осцилляторного приближения и поправок к нему для ансамбля из N двухуровневых атомов, не взаимодействующих между собой, но находящихся в скоррелированном начальном состоянии, хорошо отражает первое слагаемое в правой части (3.20), которое соответствует лоренцевой форме линии излучения осциллятора, уширенной в N раз. Это слагаемое соответствует ширине кооперативного распада N двухуровневых атомов, вычисленной в предположении о неограниченности спектра энергий. Второе слагаемое соответствует поправке, возникающей из-за конечности (ограниченности сверху) набора уровней атомов, приводящей к деформации лоренцева контура и эффективному уширению линии излучения.

На рис. 1–4 представлены результаты расчета формы контура линии излучения ансамбля N двухуровневых не взаимодействующих между собой

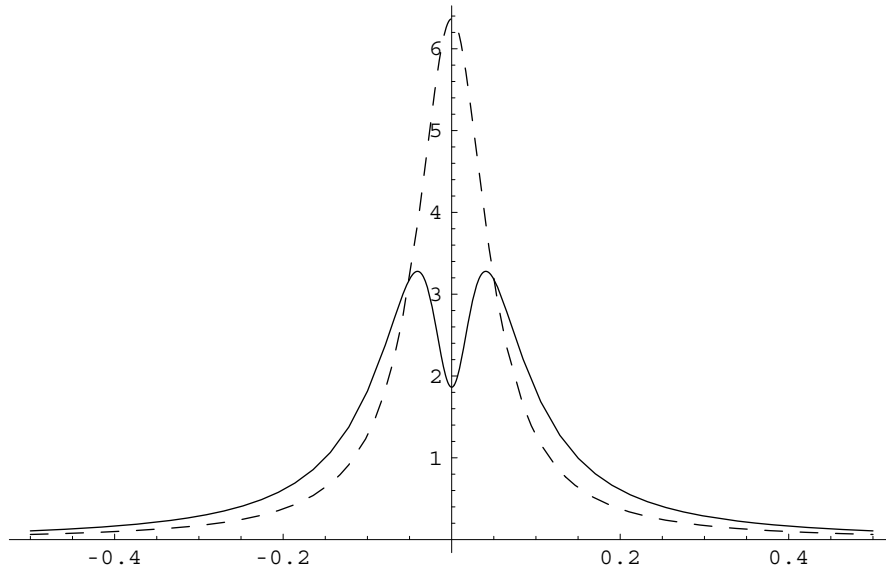


Рис. 1. Контур линии излучения $g(\omega)$ ансамбля N невзаимодействующих двух-уровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 1$, $N = 10$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (3.20)

атомов, когда $N = 10$, $N = 100$. Для сравнения пунктирной линией приведен вклад в контур линии излучения от первого слагаемого формулы (3.20). На всех рисунках по оси ординат отложена безразмерная переменная $x = (\omega - \omega_0)/\omega_0$. При числе атомов $N > 100$ величина вклада от второго слагаемого мала, что определяет эффективную область применения данного приближения для числа атомов до нескольких десятков. Численные расчеты контура линии излучения проводились при варьировании безразмерной обратной температуры $\xi = \hbar\omega_0/kT$ в пределах от 1 до 100. Из численных расчетов следует, что формы контуров линии (с учетом и без учета второго слагаемого) практически совпадают при $10 < \xi < 100$. Для $\xi \sim 1$ в центре контура линии возникает провал, и линия сильнее уширена относительно вклада первого слагаемого по сравнению с более низкими температурами.

Краткие выводы. В работе построена временная асимптотическая теория возмущений для УФП, описывающего когерентную релаксацию ансамбля N двухуровневых атомов. Найден общий вид пропагатора уравнения Фоккера—Планка в виде разложения по параметру, обратному числу атомов в ансамбле. Вычислена в явном виде поправка первого порядка, учет которой для контура линии излучения приводит к его уширению. Предложенный метод непосредственно обобщается на случай релаксации в системе из большого числа n -уровневых атомов. При этом задача сводится к описанию затухания $(n - 1)$ -модового гармонического осциллятора и расчету поправок к осцилляторному приближению.

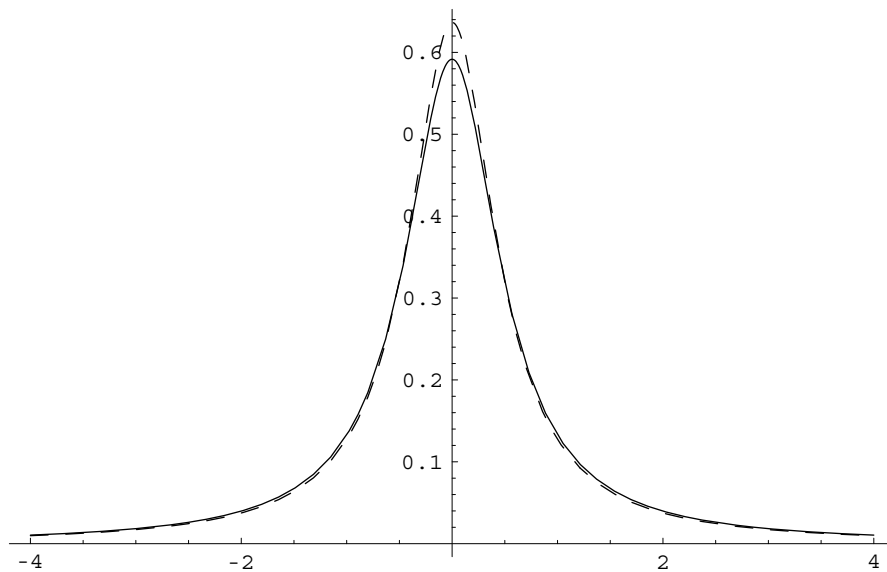


Рис. 2. Контур линии $g(\omega)$ излучения ансамбля N невзаимодействующих двух-уровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 1$, $N = 100$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (3.20)

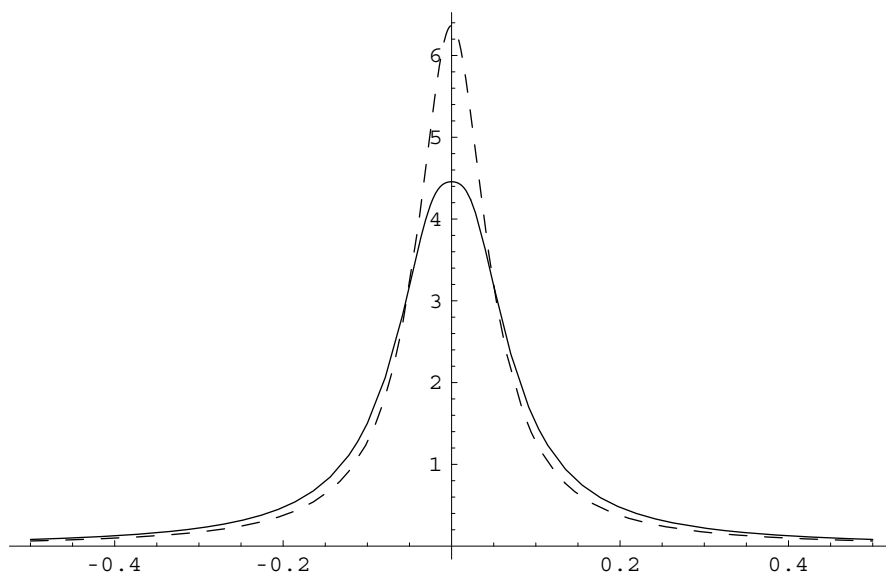


Рис. 3. Контур линии излучения $g(\omega)$ ансамбля N невзаимодействующих двух-уровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01$, $\langle \nu \rangle = 0.1$, $N = 10$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (3.20)

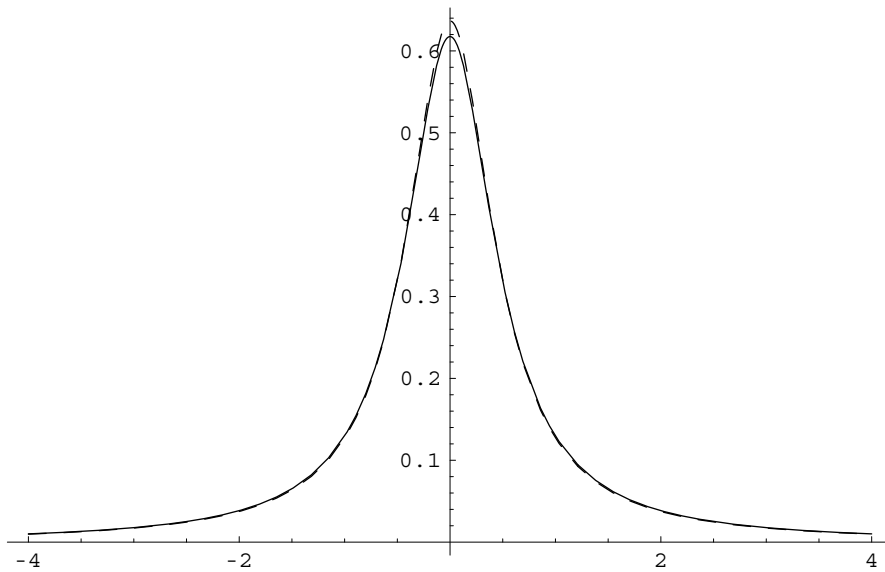


Рис. 4. Контур линии излучения $g(\omega)$ ансамбля N невзаимодействующих двух-уровневых атомов. $\gamma/\omega_0 = 0.01, \langle v \rangle = 0.1, N = 100$. Пунктирная линия соответствует вкладу от первого члена правой части (3.20).

Литература

- [1] Гордиец, Б.Ф. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры / Б.Ф. Гордиец, А.И. Осипов, Л.А. Шелепин. – М.: Наука, 1980.
- [2] Гардинер К.В. Стохастические методы в естественных науках / К.В. Гардинер. – М.: Мир, 1986.
- [3] Хакен, Г. Лазерная светодинамика / Г. Хакен. – М.: Мир, 1988. – 350 с.
- [4] Менский, М.Б. Квантовые измерения и декогеренция / М.Б. Менский. – М.: Физматлит, 2001.
- [5] Горохов, А.В. Методы теории групп в задачах квантовой физики. Ч.3 / А.В. Горохов. – Куйбышев, 1983. – 96 с.
- [6] Gorokhov, A.V. Fokker-Planck equations method in theory of multilevel atoms relaxation / A.V. Gorokhov, V.A. Mikhailov // Proceeding SPIE. – 1997. – V. 3239. – P. 256–260.
- [7] Горохов, А.В. Релаксация двухуровневой системы, взаимодействующей с внешним стохастическим полем / А.В. Горохов, В.А. Михайлов // Теоретическая физика. – 2000. – Т. 1. – С. 54–62.
- [8] Переломов, А.М. Обобщенные когерентные состояния и их применения / А.М. Переломов. – М.: Наука; гл.ред. физ.-мат.лит., 1987. – 272 с.

Поступила в редакцию 12/III/2006;
в окончательном варианте — 20/III/2006.

APPLICATION OF PERTURBATION THEORY METHOD
FOR THE FOKKER–PLANCK EQUATION
TO COHERENT RELAXATION OF QUANTUM
ENSEMBLE DESCRIPTION⁴

© 2006 A.V. Gorokhov⁵ V.A. Mikhailov⁶

The cooperative relaxation in system from N two-level atoms is studied. An asymptotic expansion of the Fokker–Planck equation propagator for P —symbol of a density matrix of quantum system is constructed. Explicit formulas for two-time correlators and spontaneous radiation line contour depending on the model parameters and the small expansion parameter $1/N$ are given.

Paper received 12/III/2006.

Paper accepted 20/III/2006.

⁴Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.V. Ivakhnik.

⁵Gorokhov Alexander Victorovich, (gorokhov@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

⁶Mikhailov Victor Aleksandrovich (mikhailov@mail.ru), Dept. of Physics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russia.