

# ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА—ЛАНДАУ НА $\mathbb{R}^{(3+1)}$ <sup>1</sup>

© 2006 И.В. Алимиков<sup>2</sup>

Найдены точные аналитические решения нелинейного уравнения Шредингера и комплексного уравнения Гинзбурга—Ландау на  $\mathbb{R}^{3+1}$ .

## 1. Нелинейное уравнение Шредингера

Нелинейное уравнение Шредингера находит широкое применение в различных областях физики, например, в нелинейной оптике, физике плазмы, теории сверхпроводимости, физике низких температур. Для одного пространственного измерения теория нелинейного уравнения Шредингера детально разработана [1–3]. В этой заметке рассматривается случай трехмерного пространства, т.е. изучается уравнение,

$$i\partial\psi/\partial t + \nabla^2\psi + 2\eta\psi|\psi|^2 = 0, \quad (1)$$

где  $\psi(\mathbf{r}, t)$  — комплексная функция,  $\eta$  — вещественный параметр нелинейности.

Найдем "стационарные" решения вида

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r})e^{i\epsilon t}, \quad (2)$$

где  $\epsilon$  — свободный параметр. Подставляя (2) в (1), получим

$$\nabla^2\varphi - \epsilon\varphi + 2\eta\varphi|\varphi|^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) допускает решения в классе вещественных функций, где оно принимает вид

$$\nabla^2\varphi = \epsilon\varphi - 2\eta\varphi^3. \quad (4)$$

Будем искать решение уравнения (4) в виде сложной функции  $\varphi = \varphi(u(\mathbf{r}))$ , где  $u(\mathbf{r}) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k$ . Здесь  $\mathbf{k}$  — произвольная векторная постоянная ( $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ),  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Подстановка  $\varphi = \varphi(u(\mathbf{r}))$  в (4) дает

$$\varphi''(u) = \epsilon\varphi(u) - 2\eta\varphi^3(u). \quad (5)$$

<sup>1</sup>Представлена доктором физико-математических наук профессором А.Ф. Крутовым.

<sup>2</sup>Алименков Иван Васильевич (i-alimenkov@mail.ru), Самарский государственный аэрокосмический университет им. акад. С.П. Королева, 443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, 34.

Перепишем (5) в виде

$$\varphi''(u) = \partial V(\varphi)/\partial \varphi,$$

где  $V(\varphi) = (\varepsilon - \eta\varphi^2)\varphi^2/2$ . "Потенциал"  $V(\varphi)$  неотрицателен при  $|\varphi| < \sqrt{\varepsilon/\eta}$  и имеет нули  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \sqrt{\varepsilon/\eta}$ ,  $\varphi_3 = -\sqrt{\varepsilon/\eta}$ , поэтому [4] граничными условиями для (4) примем  $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $\partial\varphi/\partial x_i = 0$  при  $|\mathbf{r}| = \infty$ . Так как  $\partial\varphi/\partial x_i = \varphi'(u)\partial u/\partial x_i = \varphi'(u)k_i/k = 0$  при  $|\mathbf{r}| = \infty$ , то это означает, что  $\varphi'(u) = 0$  при  $|u| = \infty$ .

Умножим последнее уравнение на  $\varphi'(u)$  и проинтегрируем. Получим  $\varphi'^2/2 = V(\varphi) + C$ . Из граничных условий следует, что  $C = 0$ . Интегрируя еще раз, находим  $\int d\varphi/\sqrt{2V(\varphi)} = u$ , или

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi \sqrt{\varepsilon - \eta\varphi^2}} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, имеем

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{\varepsilon/\eta}}{\text{ch}(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k)}.$$

Очевидно, что  $|\varphi| \leq \sqrt{\varepsilon/\eta}$ . В силу симметрии (4) и (5) относительно преобразования  $\varphi \leftrightarrow -\varphi$ , решением будет также  $\varphi_a = -\varphi$ . Итак, окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm \sqrt{\varepsilon/\eta} e^{i\mathbf{e}t}}{\text{ch}(\sqrt{\varepsilon}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k)},$$

или, введя обозначение  $a = \sqrt{\varepsilon/\eta}$ , откуда  $\varepsilon = a^2\eta$ ,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a \exp\{ia^2\eta t\}}{\text{ch}(a\sqrt{\eta}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k)}.$$

Если  $\eta < 0$ , т.е.  $\eta = -|\eta|$ , то (5) принимает вид

$$\varphi''(u) = \varepsilon\varphi(u) + 2|\eta|\varphi^3(u),$$

или  $\varphi''(u) = \partial V(\varphi)/\partial \varphi$ , где  $V(\varphi) = (\varphi^2 + \varepsilon/2|\eta|)^2|\eta|/2$ . Несингулярное решение последнего уравнения существует только при  $\varepsilon < 0$  т.е.  $\varepsilon = -|\varepsilon|$ ,

$$\varphi''(u) = 2|\eta|\varphi^3(u) - |\varepsilon|\varphi(u). \quad (6)$$

Интегрируя (6) тем же способом, что и (5), получим

$$\pm \frac{1}{\sqrt{|\eta|}} \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 - |\varepsilon|/2|\eta|} = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k.$$

Вычисляя интеграл и обращая полученное выражение, находим

$$\varphi(\mathbf{r}) = \pm \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2|\eta|}} \text{th} \left[ a \sqrt{\frac{|\varepsilon|}{2}} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k \right].$$

Вводя обозначение  $\sqrt{|\varepsilon|/(2|\eta|)} = a$ , откуда  $\varepsilon = -2a^2|\eta|$ , окончательно имеем

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \pm a \text{th} \left[ a \sqrt{|\eta|} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)/k \right] \exp\{-i2a^2|\eta|t\}.$$

В классе комплексных функций решение уравнения (3) отыщем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}, \quad (7)$$

где  $f(\mathbf{r})$  — вещественная функция,  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  — свободный векторный параметр. Подставляя (7) в (3) и приравнявая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla f) = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2 f = (q^2 + \varepsilon)f - 2\eta f^3. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) совместны, т.к. (8) является линейным однородным уравнением первого порядка и, как известно из теории таких уравнений [5], решением уравнения (8) является любая дифференцируемая функция  $f = f(s(\mathbf{r}))$ , где  $s(\mathbf{r})$  — полный интеграл уравнения  $(\mathbf{q} \cdot \nabla s) = 0$ , или

$$q_x \frac{\partial s}{\partial x} + q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Если одна из координатных осей, например ось  $x$ , является выделенной среди других, то выбираем переменную  $x$  в качестве параметра уравнений характеристик для (10), записав его в виде

$$\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{q_y}{q_x} \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{q_z}{q_x} \frac{\partial s}{\partial z} = 0.$$

Уравнения характеристик

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{q_y/q_x} = \frac{dz}{q_z/q_x}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{q_y}{q_x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{q_z}{q_x}$$

элементарно интегрируются при начальных условиях  $y(x_0) = y_0$ ,  $z(x_0) = z_0$ :

$$y = \frac{q_y}{q_x}(x - x_0) + y_0, \quad z = \frac{q_z}{q_x}(x - x_0) + z_0.$$

Для нахождения полного интеграла выражаем отсюда начальные данные

$$y_0 = y - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0), \quad z_0 = z - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0). \quad (11)$$

Согласно методу Коши [5] полный интеграл уравнения (10) имеет вид

$$s(\mathbf{r}) = k_y y_0 + k_z z_0 + k_0,$$

где  $k_y, k_z$  — произвольные постоянные,  $k_0$  — аддитивная произвольная постоянная, а  $y_0$  и  $z_0$  выражаются формулой (11), т.е.

$$s(\mathbf{r}) = k_y \left[ y - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0) \right] + k_z \left[ z - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0) \right] + k_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную  $k_0$  выберем в виде

$$k_0 = -k_y y_0 - k_z z_0,$$

тогда

$$s(\mathbf{r}) = k_y \left[ y - y_0 - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0) \right] + k_z \left[ z - z_0 - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0) \right].$$

В силу линейности уравнения (10) его полный интеграл можно умножить на любой числовой множитель  $1/C$ , что и сделано для удобства.

Итак

$$s(\mathbf{r}) = \left[ k_y(y - y_0) - (x - x_0)q_y/q_x + k_z(z - z_0) - (x - x_0)q_z/q_x \right] / C. \quad (12)$$

Подставляя  $f = f(s(\mathbf{r}))$  в (9), получим

$$f''(s) \left[ \frac{(k_y q_y + k_z q_z)^2}{q_x^2} + k_y^2 + k_z^2 \right] / C^2 = (q^2 + \varepsilon) f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (13)$$

Положим

$$C = \frac{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}}{q_x}.$$

Тогда (12) и (13) примут вид:

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y [q_x(y - y_0) - q_y(x - x_0)] + k_z [q_x(z - z_0) - q_z(x - x_0)]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}}, \quad (14)$$

$$f''(s) = (q^2 + \varepsilon) f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (15)$$

При  $\eta > 0$  несингулярное решение уравнения (15) существует только, если  $q^2 + \varepsilon = a^2$ . Тогда (15) примет вид

$$f''(s) = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s). \quad (16),$$

совпадающий по форме с уравнением (5). Повторяя ход решения уравнения (5), получим

$$f(\mathbf{r}) = \frac{\pm a / \sqrt{\eta}}{\operatorname{ch} a s(\mathbf{r})},$$

где  $s(\mathbf{r})$  выражается громоздкой формулой (14). Так как  $\varepsilon = a^2 - q^2$ , то окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a / \sqrt{\eta}}{\operatorname{ch} a s(\mathbf{r})} \exp\{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} + (a^2 - q^2)t]\}.$$

Если  $\eta < 0$ , т.е.  $\eta = -|\eta|$ , то несингулярное решение уравнения (15) существует только при  $q^2 + \varepsilon = -a^2$  и (15) принимает вид

$$f''(s) = 2|\eta| f^3(s) - a^2 f(s), \quad (17)$$

совпадающий по форме с уравнением (6). Интегрируя (17) тем же способом, что и (6), находим

$$f(\mathbf{r}) = \pm \frac{a}{\sqrt{2|\eta|}} \operatorname{th} \frac{a s(\mathbf{r})}{\sqrt{2}}.$$

Учитывая, что  $\varepsilon = -(a^2 + q^2)$ , окончательно имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \pm \frac{a}{\sqrt{2|\eta|}} \operatorname{th} \left[ \frac{a s(\mathbf{r})}{\sqrt{2}} \right] \{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - (a^2 + q^2)t]\}.$$

Нестационарные решения уравнения (1) будем искать в виде

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varphi(\mathbf{r}, t) \exp\{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)\}, \quad (18)$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — вещественная функция;  $\mathbf{q}$ ,  $\omega$  и  $\varphi_0$  — свободные параметры. Подставляя (18) в (1) и приравнявая к нулю мнимую и вещественную части полученного уравнения, находим

$$\partial\varphi/\partial t + 2(\mathbf{q} \cdot \nabla\varphi) = 0, \quad (19)$$

$$\nabla^2\varphi = (q^2 - \omega)\varphi - 2\eta\varphi^3. \quad (20)$$

Линейное однородное уравнение первого порядка (19) имеет своим решением любую дифференцируемую функцию  $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}, t))$ , где  $s(\mathbf{r}, t)$  — полный интеграл уравнения

$$\partial s/\partial t + 2(\mathbf{q} \cdot \nabla s) = 0,$$

или в развернутой форме

$$\frac{\partial s}{\partial t} + 2\left(q_x \frac{\partial s}{\partial x} + q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z}\right) = 0. \quad (21)$$

Уравнения характеристик для (21) имеют вид

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2q_x} = \frac{dy}{2q_y} = \frac{dz}{2q_z},$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = 2q_x, \quad \frac{dy}{dt} = 2q_y, \quad \frac{dz}{dt} = 2q_z.$$

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений элементарно интегрируется при начальных условиях  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $z(0) = z_0$ :

$$x = 2q_x t + x_0, \quad y = 2q_y t + y_0, \quad z = 2q_z t + z_0.$$

Выражаем отсюда начальные данные

$$x_0 = x - 2q_x t, \quad y_0 = y - 2q_y t, \quad z_0 = z - 2q_z t. \quad (22)$$

Согласно методу Коши, полный интеграл уравнения (21) имеет вид

$$s = k_x x_0 + k_y y_0 + k_z z_0 + k_0,$$

где  $k_x, k_y, k_z$  — произвольные постоянные;  $k_0$  — аддитивная произвольная постоянная, а  $x_0, y_0, z_0$  — выражены согласно (22), т.е.

$$s = k_x(x - 2q_x t) + k_y(y - 2q_y t) + k_z(z - 2q_z t) + k_0.$$

Аддитивную произвольную постоянную выберем в виде

$$k_0 = -k_x x_0 - k_y y_0 - k_z z_0,$$

тогда

$$s = k_x(x - x_0 - 2q_x t) + k_y(y - y_0 - 2q_y t) + k_z(z - z_0 - 2q_z t).$$

что можно записать в векторной форме

$$s = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t). \quad (23)$$

В силу линейности уравнения (21) его решение (23) можно умножить на любой числовой множитель  $1/C$ , что и сделано для удобства. Итак, окончательно

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/C. \quad (24)$$

Подставляя  $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}, t))$ , где  $s(\mathbf{r}, t)$  — определяется формулой (24) в (20), получим

$$\varphi''(s) \frac{k^2}{C^2} = (q^2 - \omega)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \quad (25)$$

Положим  $C = k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Тогда (24) и (25) примут вид

$$s(\mathbf{r}, t) = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/k, \quad (26)$$

$$\varphi''(s) = (q^2 - \omega)\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s). \quad (27)$$

При  $\eta > 0$  полагаем  $q^2 - \omega = a^2$  и (27) принимает вид

$$\varphi''(s) = a^2\varphi(s) - 2\eta\varphi^3(s),$$

совпадающий с уравнением (16). Мы можем сразу записать его решение

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a/\sqrt{\eta}}{\operatorname{ch} as(\mathbf{r}, t)} = \frac{\pm a/\sqrt{\eta}}{\operatorname{ch}[a\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/k]}.$$

Так как  $\omega = q^2 - a^2$ , то окончательно

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a \exp\{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - (q^2 - a^2)t + \varphi_0]\}}{\sqrt{\eta} \operatorname{ch}[a\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)/k]}.$$

Если принять здесь  $\mathbf{q} = (q, 0, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$ , получим известное решение одномерного нелинейного уравнения Шредингера.

При  $\eta < 0$ , т.е.  $\eta = -|\eta|$ , полагаем  $q^2 - \omega = -a^2$  и (27) принимает вид

$$\varphi''(s) = 2|\eta|\varphi^3(s) - a^2\varphi(s),$$

совпадающий с уравнением (17). Следовательно

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}} \operatorname{th} \frac{a}{\sqrt{2}} s(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}} \operatorname{th} \frac{a\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)}{\sqrt{2}k}.$$

Учитывая, что  $\omega = q^2 + a^2$ , окончательно имеем

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{\pm a}{\sqrt{2|\eta|}} \operatorname{th} \frac{a\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 - 2\mathbf{q}t)}{\sqrt{2}k} \exp\{i[\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - (q^2 + a^2)t + \varphi_0]\}.$$

## 2. Комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау

Комплексное уравнение Гинзбурга—Ландау

$$\partial A/\partial t = A + (1 + ib)\nabla^2 A - (1 + ic)|A|^2 A, \quad (28)$$

где  $A(\mathbf{r}, t)$  — комплексная функция;  $b$  и  $c$  — вещественные параметры, описывает широкий круг физических явлений, таких как нелинейные волны,

фазовые переходы второго рода, сверхпроводимость, сверхтекучесть, конденсация Бозе—Эйнштейна и т.д. [6].

Уравнение вида

$$\partial A / \partial t = A + (1 + ib) \nabla^2 A - (-1 + ic) |A|^2 A, \quad (29)$$

называется субкритическим уравнением Гинзбурга—Ландау по терминологии, принятой в [6].

Рассмотрим уравнение (28). Будем искать его решение в виде

$$A = \varphi(\mathbf{r}) \exp\{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \varphi_0)\}, \quad (30)$$

где  $\varphi(\mathbf{r})$  — вещественная функция;  $\omega, \varphi_0$  и  $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$  — свободные параметры. Подставляя (30) в (28) и выделяя вещественную и мнимую части полученного уравнения, имеем

$$2b(\mathbf{q} \cdot \nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi - (q^2 - 1)\varphi - \varphi^3, \quad (31)$$

$$b\nabla^2 \varphi + 2(\mathbf{q} \cdot \nabla \varphi) + (\omega - bq^2)\varphi - c\varphi^3. \quad (32)$$

Положим в (31) правую и левую части уравнения равными нулю, т.е.

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla \varphi) = 0, \quad (33)$$

$$\nabla^2 \varphi = (q^2 - 1)\varphi + \varphi^3. \quad (34)$$

Тогда, с учетом (33) и (34), уравнение (32) можно переписать в виде

$$b[(q^2 - 1)\varphi + \varphi^3] + (\omega - bq^2)\varphi - c\varphi^3 = 0,$$

или

$$(b - c)\varphi^3 + (\omega - b)\varphi = 0. \quad (35)$$

Решением линейного однородного уравнения (33) является любая дифференцируемая функция  $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}))$ , где  $s(\mathbf{r})$  — полный интеграл уравнения  $(\mathbf{q} \cdot \nabla s) = 0$ , или

$$q_x \frac{\partial s}{\partial x} + q_y \frac{\partial s}{\partial y} + q_z \frac{\partial s}{\partial z} = 0. \quad (36)$$

Уравнение (36) совпадает с рассмотренным ранее уравнением (10), поэтому его полный интеграл имеет вид (12):

$$s(\mathbf{r}) = [k_y(y - y_0 - (x - x_0)q_y/q_x) + k_z(z - z_0 - (x - x_0)q_z/q_x)]/C, \quad (37)$$

где  $k_y, k_z$  — произвольные постоянные, а постоянная  $C$  введена для удобства. Подставляя  $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}))$  в (34), получим

$$\varphi''(s) \left[ \frac{(k_y q_y + k_z q_z)^2}{q_x^2} + k_y^2 + k_z^2 \right] / C^2 = (q^2 - 1)\varphi(s) + \varphi^3(s). \quad (38)$$

Положим

$$C = \sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}/q_x.$$

Тогда (37) и (38) примут вид:

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y [q_x(y - y_0) - q_y(x - x_0)] + k_z [q_x(z - z_0) - q_z(x - x_0)]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}}, \quad (39)$$

$$\varphi''(s) = (q^2 - 1)\varphi(s) + \varphi^3(s).$$

Последнее уравнение запишем в виде

$$\varphi''(s) = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi},$$

где

$$V(\varphi) = (\varphi^2 + q^2 - 1)^2/4.$$

Умножая (40) на  $\varphi'(s)$  и интегрируя, получим

$$\pm \sqrt{2} \int \frac{d\varphi}{\varphi^2 - (1 - q^2)} = s,$$

откуда находим

$$\varphi = \pm \sqrt{1 - q^2} \operatorname{th} \left( s \sqrt{\frac{1 - q^2}{2}} \right),$$

где  $s$  определяется формулой (39).

Уравнение (35) выполняется тождественно, если  $b = c$ ,  $\omega = b$ . Окончательно решение имеет вид

$$A = \pm \sqrt{1 - q^2} \operatorname{th} \left( s \sqrt{\frac{1 - q^2}{2}} \right) \exp\{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - bt + \varphi_0)\}. \quad (40)$$

Рассмотрим теперь уравнение (29). Его решение попрежнему ищем в виде (30). Повторяя ход решения уравнения (28), получим

$$(\mathbf{q} \cdot \nabla \varphi) = 0, \quad (41)$$

$$\nabla^2 \varphi = (q^2 - 1)\varphi - \varphi^3, \quad (42)$$

$$(-b - c)\varphi^3 + (\omega - b)\varphi = 0, \quad (43)$$

Уравнение (41) совпадает с (33), поэтому его решением является любая дифференцируемая функция  $\varphi = \varphi(s(\mathbf{r}))$ , где, согласно (39),

$$s(\mathbf{r}) = \frac{k_y [q_x(y - y_0) - q_y(x - x_0)] + k_z [q_x(z - z_0) - q_z(x - x_0)]}{\sqrt{(k_y q_y + k_z q_z)^2 + q_x^2(k_y^2 + k_z^2)}}.$$

Тогда из (42) получим

$$\varphi''(s) = (q^2 - 1)\varphi(s) + \varphi^3(s),$$

что совпадает по форме с (5), следовательно, повторив решение уравнения (5), находим

$$\varphi = \pm \sqrt{2(q^2 - 1)} / \operatorname{ch} \left( s \sqrt{q^2 - 1} \right).$$

Уравнение (43) выполняется тождественно при  $c = -b$ ,  $\omega = b$  и окончательно

$$A = \frac{\pm \sqrt{2(q^2 - 1)} \exp\{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - bt + \varphi_0)\}}{\operatorname{ch} \left( s(\mathbf{r}) \sqrt{q^2 - 1} \right)}.$$

В приведенных решениях амплитудные функции имеют вид гиперболических секанса и тангенса, аргументами которых являются линейные функции  $s(\mathbf{r})$  или  $s(\mathbf{r}, t)$ . Для нахождения решений, зависящих от нелинейных функций  $s(\mathbf{r})$  или  $s(\mathbf{r}, t)$ , нужно вместо полных интегралов линейных однородных уравнений первого порядка использовать особые интегралы. Проиллюстрируем сказанное на примере решений вида (18), сводящихся к уравнениям (19) и (20). Найдем особый интеграл уравнения (19). Для этого исключим стандартным способом [5] произвольные постоянные  $k_x, k_y, k_z$  из полного интеграла (26). Дифференцируя (26) по  $k_x, k_y, k_z$  и приравнявая производные к нулю, найдем

$$s(\mathbf{r}, t) = \sqrt{(x - x_0 - 2q_x t)^2 + (y - y_0 - 2q_y t)^2 + (z - z_0 - 2q_z t)^2}. \quad (44)$$

Подставив  $\varphi = \varphi(s)$  в (20), получим

$$\varphi''(s) + \frac{2\varphi'(s)}{s} = a^2\varphi - 2\eta\varphi^3. \quad (45)$$

Аналитические решения этого обыкновенного дифференциального уравнения автору неизвестны, однако легко найти приближенное решение при больших значениях  $s$  (что является оправданным в нелинейной оптике, где расстояния измеряются в единицах длин волн). Тогда вторым слагаемым в левой части (45) можно пренебречь. Получим уже знакомое уравнение

$$\varphi''(s) = a^2\varphi - 2\eta\varphi^3(s). \quad (45)$$

имеющее решение

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{\operatorname{ch} as(\mathbf{r}, t)},$$

где  $s(\mathbf{r}, t)$  выражается формулой (28).

Таким же способом, используя особые интегралы линейных однородных уравнений первого порядка, можно модифицировать и другие решения. Ввиду важности нелинейного уравнения Шредингера для нелинейной оптики, рассмотрим стационарное решение (7) определяемое уравнениями (8) и (9). Особый интеграл уравнения (8) имеет вид

$$s(\mathbf{r}) = \sqrt{\left(y - y_0 - \frac{q_y}{q_x}(x - x_0)\right)^2 + \left(z - z_0 - \frac{q_z}{q_x}(x - x_0)\right)^2}.$$

Подставляя  $f = f(s)$  в (9), получим

$$\varphi''(s) + \frac{f'(s)}{s} = a^2 f(s) - 2\eta f^3(s),$$

где  $a^2 = q^2 + \varepsilon$  и приближенное решение

$$f(\mathbf{r}) = \frac{a/\sqrt{\eta}}{\operatorname{ch} as(\mathbf{r})}.$$

## Заключение

Для нелинейных эволюционных уравнений, описывающих некоторое комплексное скалярное поле, когда естественной постановкой задачи является отыскание решений в виде модулированной монохроматической волны, найдены точные аналитические решения, в случае кубической нелинейности.

## Литература

- [1] Тахтаджян, Л.А. Гамильтонов подход в теории солитонов / Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев. – М.: Наука, 1986.
- [2] Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд [и др.] – М.: Мир, 1988.
- [3] Ньюэлл, А. Солитоны в математике и физике / А. Ньюэлл. – М.: Мир, 1989.
- [4] Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля / Р. Раджараман. – М.: Мир, 1985.
- [5] Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953.
- [6] Aranson, I.S. The world of the complex Ginzburg–Landau equation / I.S. Aranson, L. Kramer // Rev. Mod. Phys. – 2002. V. 74. No 1. P. 99–143.

Поступила в редакцию 12/III/2006;  
в окончательном варианте — 16/V/2006.

## EXACT SOLUTIONS OF NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION AND COMPLEX GINZBURG—LANDAU EQUATION ON $\mathbb{R}^{(3+1)}$ <sup>3</sup>

© 2006 I.V. Alimenkov<sup>4</sup>

The exact analytic solutions of the nonlinear Schrödinger equation and complex Ginzburg—Landau equation on  $\mathbb{R}^{3+1}$  are found.

Paper received 12/III/2006.

Paper accepted 16/V/2006.

---

<sup>3</sup>Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. A.F. Krutov.

<sup>4</sup>Alimenkov Ivan Vasiljevich (i-alimenkov@mail.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State Aerospace University, Samara, 443086, Russia.