

УДК 130.145

ПЕРЕПУТАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В СИСТЕМЕ ДВУХ НЕИДЕНТИЧНЫХ АТОМОВ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С ТЕПЛОВОМ ШУМОМ¹

© 2006 Е.К. Башкиров²

Рассмотрено перепутывание состояний двух неидентичных двухуровневых атомов с различными частотами переходов, взаимодействующих с модой теплового поля в идеальном резонаторе. Исследовано влияние расстройки на степень атом-атомного перепутывания

Квантовое перепутывание играет ключевую роль в квантовой информатике, квантовых вычислениях и связи [1]. В реальных условиях квантовые системы всегда взаимодействуют с окружением. Такое взаимодействие обычно приводит к декогерентности, однако в некоторых случаях оно может являться источником перепутывания. Недавно Бозе с соавторами [2] показали, что перепутывание всегда возникает при взаимодействии произвольной системы с большим числом степеней свободы в смешанном состоянии и одиночного кубита в чистом состоянии, и проиллюстрировали общие результаты на примере модели Джейнса—Каммингса одиночного атома в чистом состоянии, взаимодействующего с модой теплового поля в идеальном резонаторе. Ким с соавторами [3] исследовали атом-атомное перепутывание двух идентичных двухуровневых атомов с однофотонными переходами, индуцированное тепловым шумом. В нашей работе [4] рассмотрено атом-атомное перепутывание в случае двухмодового теплового поля. Зоу с соавторами [5] рассмотрели перепутывание в системе двух неидентичных атомов с одинаковыми частотами переходов, но разными константами диполь-фотонного взаимодействия. В настоящей работе мы рассмотрим атомное перепутывание, индуцированное тепловым шумом, в системе двух неидентичных двухуровневых атомов с различными частотами атомных переходов и одинаковыми константами диполь-фотонного взаимодействия. Для получения аналитических выражений для степени атомного перепутывания ограничимся рассмотрением модели, в которой частотные расстройки атомов по отношению к частоте моды поля одинаковы по моду-

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором В.А. Салеевым.

²Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

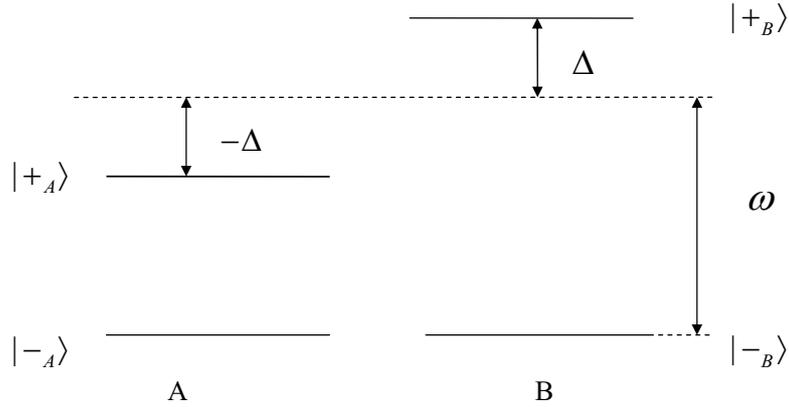


Рис. 1. Схема энергетических уровней в модели неидентичных атомов с расстройкой

лю и противоположны по знаку. Указанная модель рассматривалась ранее Агарвалом и Кимом [6] при исследовании атомного перепутывания, индуцированного когерентным одномодовым полем резонатора.

Рассмотрим пару неидентичных двухуровневых атомов A и B с различными частотами атомных переходов ω_i ($i = A, B$), взаимодействующих с модой квантового электромагнитного поля частоты ω в идеальном резонаторе (см. рис. 1). Обозначим возбужденное и основное состояния атомов через $|+_A, B\rangle$ и $|-_A, B\rangle$. Введем стандартным образом расстройку для каждого из атомов: $\Delta_A = \omega_A - \omega$ и $\Delta_B = \omega_B - \omega$. Предположим также, что расстройки удовлетворяют соотношению: $\Delta_A = -\Delta_B \equiv \Delta$.

Тогда гамильтониан рассматриваемой системы в представлении взаимодействия можно записать в виде [6]:

$$H_I = \hbar g \sum_{i=A,B} (a^+ \sigma^-_i + a \sigma^+_i) - \hbar \Delta \sigma^0, \quad (1)$$

где a^+ и a — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторной моды; $\sigma^+_i = |+_i\rangle\langle -_i|$ и $\sigma^-_i = |-_i\rangle\langle +_i|$ — операторы перехода между уровнями в i -ом атоме; g — константа диполь-фотонного взаимодействия и оператор σ^0 равен:

$$\sigma^0 = |+_A\rangle\langle -_A| - |+_B\rangle\langle -_B|.$$

Для рассматриваемой модели может быть найдено точное решение уравнения эволюции. Используя атомный базис $|+_A, +_B\rangle$, $|+_A, -_B\rangle$, $|-_A, +_B\rangle$, $|-_A, -_B\rangle$, мы можем записать явное выражение для оператора эволюции $U(t)$ в виде:

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} U_{11} &= 2aFa^+ + 1, & U_{12} &= U_{13} = a(-iS + \delta F), & U_{14} &= 2aFa, & U_{44} &= 2a^+Fa + 1, \\ U_{22} &= \frac{1}{2}[\cos \Omega t - 2i\delta S + \delta^2 C + 2\Theta(2n + 1)], & U_{23} &= \frac{1}{2}[\cos \Omega t - \delta^2 C - 2\Theta(2n + 1)], \\ U_{24} &= (-iS + \delta F)a, & U_{33} &= \frac{1}{2}[\cos \Omega t + 2i\delta S + \delta^2 C + 2], & U_{34} &= -(iS + \delta F)a, \end{aligned}$$

$$\Omega = g\sqrt{4a^+a + \delta^2 + 2}, \quad F = C - \Theta, \quad C = \frac{g^2}{\Omega^2}(\cos \Omega t),$$

$$\Theta = \frac{g}{\Omega^2}, \quad S = \frac{g}{\Omega} \sin \Omega t \quad \text{и} \quad \delta = \frac{\Delta}{g}.$$

Пусть резонаторное поле в начальный момент времени находится в тепловом состоянии:

$$\rho_F(0) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|, \quad p_n = \frac{\bar{n}^n}{(1 + \bar{n})^{n+1}},$$

где $\bar{n} = (\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1)^{-1}$ — среднее число фотонов в моде.

Для исследования перепутывания состояний атомов нам потребуется редуцированная атомная матрица плотности:

$$\rho_{at}(t) = \text{Tr}_F U(t)\rho(0)U^+(t). \quad (3)$$

Если атомы в начальный момент времени приготовлены в чистом состоянии, таком как $|+A, +B\rangle$, $|+A, -B\rangle$, $|-A, +B\rangle$, $|-A, -B\rangle$, или их линейной суперпозиции, редуцированная атомная матрица плотности с использованием формул (2) и (3) может быть представлена в виде:

$$\rho_{at}(t) = \begin{pmatrix} Y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y & E & 0 \\ 0 & E^* & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Для двухкубитной системы, описываемой матрицей плотности вида (4), мы можем использовать в качестве меры перепутывания параметр Переса—Хородецких [7], [8]:

$$\varepsilon = -2 \sum_i \mu_i^-,$$

где μ_i^- — отрицательные собственные значения для матрицы, являющейся частично транспонированной по отношению к редуцированной атомной матрице плотности $\rho_{at}(t)$. Если $\varepsilon = 0$, то состояние системы сепарабельно, если

$\varepsilon > 0$, то имеет место перепутывание состояний атомов. Значение $\varepsilon = 1$ соответствует максимально возможному перепутыванию. Для частично транспонированной по отношению к (4) матрицы плотности имеется всего одно отрицательное собственное значение, равное:

$$\mu_1^- = \frac{1}{2}(Z + X - \sqrt{(Z - X)^2 + 4|E|^2}).$$

Собственное значение μ_1^- становится отрицательным тогда и только тогда, когда $|E| > \sqrt{XZ}$. При выполнении этого условия параметр перепутывания может быть представлен в виде:

$$\varepsilon = \sqrt{(Z - X)^2 + 4|E|^2} - Z - X. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь возможность атом-атомного перепутывания для различных начальных состояний атомной подсистемы.

1. Пусть в начальный момент времени возбужден только один из атомов, т.е. начальное атомное состояние есть: $|+A, -B\rangle$. В этом случае матричные элементы X, Z и E в выражении (4) есть:

$$\begin{aligned} X &= \sum_n p_n n (\delta^2 F_n^2 + S_n^2), \quad Z = \sum_n p_n (n+1) (\delta^2 F_n^2 + S_n^2); \\ E &= \frac{1}{4} \sum_n p_n [\cos(\Omega_n t) + \delta^2 C_n + 2\Theta_n(2n+1)] [\cos(\Omega_n t) - \delta^2 C_n - 2\Theta_n(2n+1)] - \\ &\quad - \frac{\delta}{2} t \sum_n p_n [\cos(\Omega_n t) - \delta^2 C_n - 2\Theta_n(2n+1)] S_n, \end{aligned} \quad (6)$$

где $O_n = \langle n | O | n \rangle$.

Результаты численных расчетов параметра перепутывания (5) для атомной матрицы плотности с элементами вида (6) представлены на рис. 2. Расчеты проведены для модели с различными значениями параметра расстройки δ и начальным средним числом фотонов в тепловой моде поля $\bar{n} = 0.1$. С увеличением параметра расстройки степень атомного перепутывания уменьшается. Этот результат легко объяснить, если учесть, что при увеличении параметра расстройки уменьшается взаимодействие атомов с полем, а, следовательно, начальное чистое состояние атомной системы меньше возмущается тепловым полем в процессе эволюции атомной системы.

2. Если в начальный момент оба атома находятся в основном состоянии $|-A, -B\rangle$, матричные элементы в формуле (4) принимают вид:

$$\begin{aligned} X &= \sum_n p_n (n-1) F_{n-1}^2, \quad Z = \sum_n p_n [2n F_{n-1} + 1]^2, \\ E &= \sum_n p_n n [-\delta^2 F_{n-1}^2 + S_{n-1}^2] + 2\delta t \sum_n p_n n F_{n-1} S_{n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Временное поведение параметра перепутывания для рассматриваемого начального условия представлено на рис. 3. Расчеты показывают, что мак-

симальная степень перепутывания состояний атомов, первоначально находящихся в чистом основном состоянии, достаточно мала. Как и в предыдущем случае, атомное перепутывание уменьшается при увеличении параметра расстройки. Однако влияние расстройки на степень перепутывания возрастает при увеличении среднего начального числа фотонов в резонаторной моде поля.

3. Для атомов, приготовленных в возбужденном состоянии $|+_A, +_B\rangle$, для матричных элементов атомного статистического оператора имеем:

$$\begin{aligned} X &= \sum_n p_n [2(n+1)F_{n+1} + 1]^2, & Z &= 4 \sum_n p_n (n+1)(n+2)F_{n+1}^2, \\ E &= \sum_n p_n (n+1) [-\delta^2 F_{n+1}^2 + S_{n+1}^2] - 2\delta t \sum_n p_n (n+1)F_{n+1}S_{n+1}. \end{aligned} \quad (8)$$

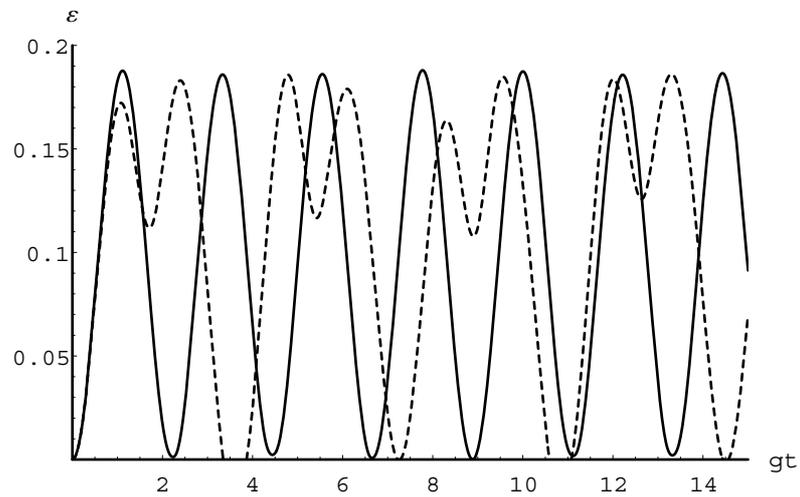
Численные расчеты с использованием формул (5), (8) показывают, что для выбранного начального состояния атомное перепутывание отсутствует для любых значений параметров выбранной модели.

4. Вычислим, наконец, степень перепутывания для начального смешанного состояния атомной подсистемы:

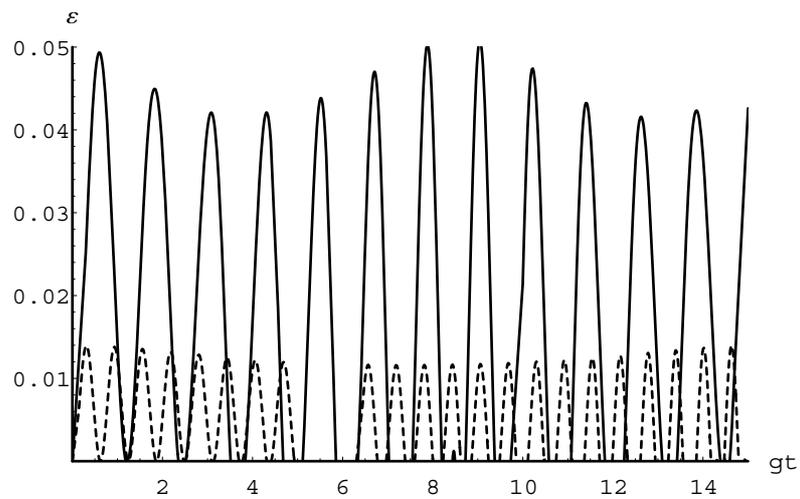
$$\rho_A(0) = \prod_{i=A,B} [\lambda |+_i\rangle\langle+_i| + (1-\lambda) |-_i\rangle\langle-_i|,$$

где $\lambda/(1-\lambda) = \exp(\omega/k_B T)$. Комбинируя формулы для матричных элементов атомного статистического оператора (6) – (8), нетрудно вычислить степень перепутывания ϵ в случае начального смешанного состояния атомов. Результаты численных расчетов для временной зависимости параметра перепутывания ϵ для модели с $\bar{n} = 1$ и различными значениями параметра смешивания λ представлены на рис. 4, при этом сплошные кривые соответствуют нулевой расстройке, штриховые кривые — расстройке $\delta = 0.5$. Расчеты показывают, что уже для небольших значений параметра смешивания λ перепутывание исчезает. При увеличении параметра расстройки максимальное значения параметра смешивания λ , при котором исчезает атом-атомное перепутывание, уменьшается. Так, при нулевой расстройке, перепутывание исчезает при $\lambda = 0.065$, а для расстройки $\delta = 0.5$ — уже при $\lambda = 0.025$.

Таким образом, в настоящей работе показано, что система двух неидентичных атомов с различными частотами переходов, приготовленных в чистом состоянии, может перейти в перепутанное состояние за счет взаимодействия с тепловым шумом. Исключение составляет чистое начальное состояние, в котором возбуждены оба атома. Наличие расстройки в частотах атомных переходов приводит к уменьшению степени перепутывания. Для начального смешанного состояния атомной подсистемы перепутывание возможно только при малых значениях параметра перемешивания λ (доли возбужденного состояния в смеси) и малых расстройках δ .

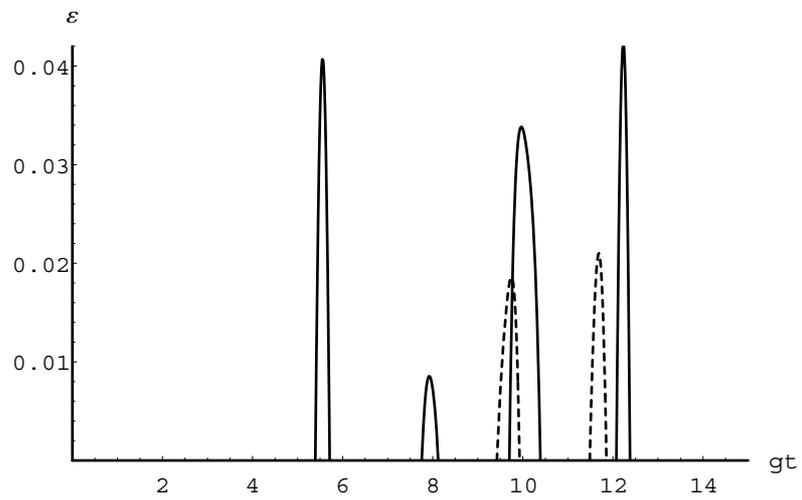


a)

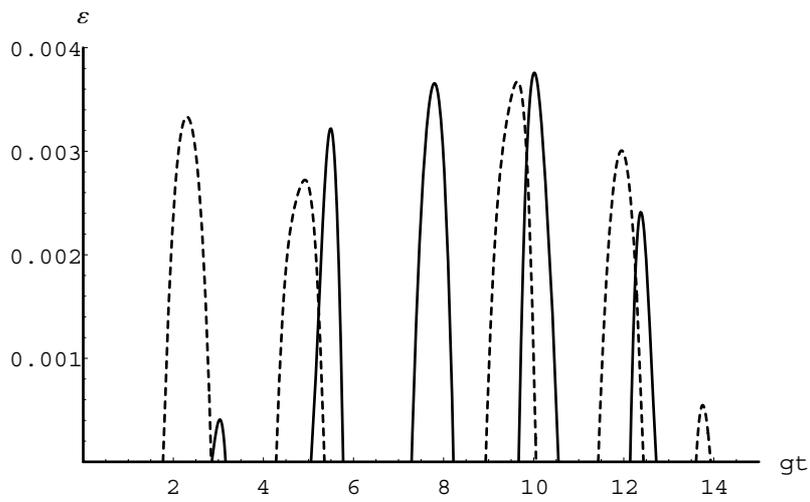


b)

Рис. 2. Атом-атомное перепутывание для начального состояния атомов $|+_{A,-B}\rangle$ и $\bar{n} = 0.1$: а) $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 1$ (штриховая линия); б) $\delta = 5$ (сплошная линия), $\delta = 10$ (штриховая линия)

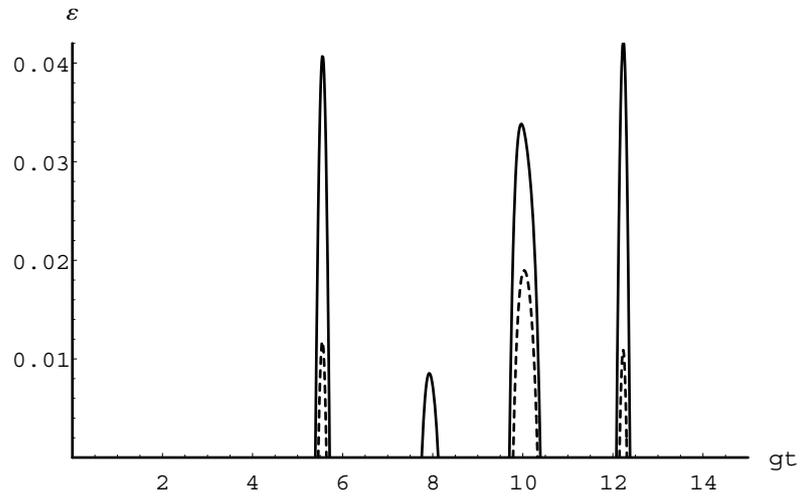


a)

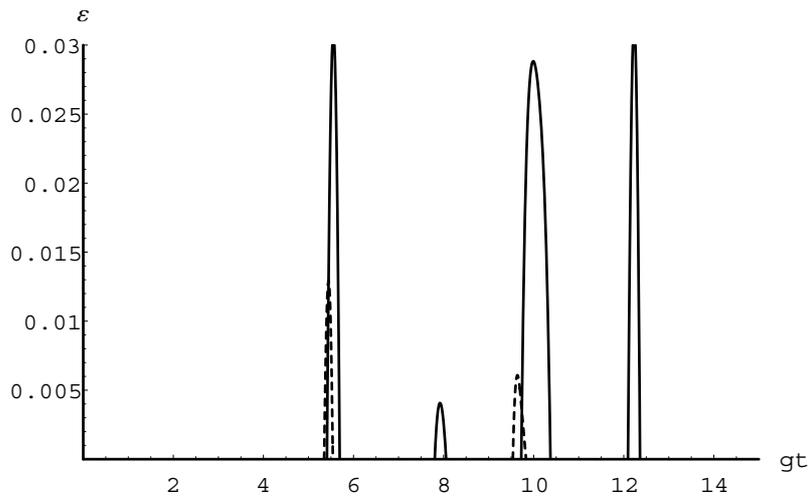


b)

Рис. 3. Атом-атомное перепутывание для начального состояния атомов $| -_A, -_B \rangle$ и $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 1$ (штриховая линия): а) $\bar{p} = 1$, б) $\bar{p} = 0.1$



a)



b)

Рис. 4. Атом-атомное перепутывание для смешанного начального состояния атомов в случае $\bar{n} = 1$ и $\delta = 0$ (сплошная линия), $\delta = 0.5$ (штриховая линия): а) $\lambda = 0$, б) $\lambda = 0.01$

Литература

- [1] Nielsen, M.A. Quantum Computation and Quantum Information / M.A. Nielsen, I.L. Chuang. Cambridge: Cambridge University Press, – 2000.
- [2] Subsystem purity as an enforcer of entanglement / S. Bose [at al.] // Phys.Rev.Lett. – 2001. – V. 87. – P. 050401(1–4).
- [3] Entanglement induced by a single-mode heat environment / M.S. Kim [at al.] // Phys. Rev. A. – 2002. – V. 65. – P. 040101(1–4).
- [4] Bashkirov, E.K. Entanglement induced by the two-mode thermal noise / E.K. Bashkirov // Las. Phys. Lett. – 2005. – DOI:10.1002/lapl.200510081. – 6 p.
- [5] Entanglement of two atoms through different couplings and thermal noise / L. Zhou [at al.] // J. Optics B: Quantum Semiclass. Opt. – 2004. – V. 6. – P. 378–384.
- [6] Kim, M.S. Study of atomic entanglement through the evolution of the field in cavity QED / M.S. Kim, G.S. Agarwal // J. Mod. Opt. – 1999. – V. 46. – P. 2111–2125.
- [7] Peres, A. Separability Criterion for density matrices / A. Peres // Phys. Rev. Lett. – 1996. – V. 77. – P. 1413–1415.
- [8] Horodecki, M. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions / M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki // Phys.Lett. A. – 1997. – V. 232., – P. 333–338.

Поступила в редакцию 13/I/2006;
в окончательном варианте — 13/I/2006.

ENTANGLEMENT IN THE SYSTEM OF TWO NONIDENTICAL ATOMS INTERACTING WITH THERMAL NOISE³

© 2006 E.K. Bashkirov⁴

The entanglement between two unidentical two-level atoms with different frequencies interacting with one-mode thermal field in lossless cavity is considered. The role of detuning in this effect is studied.

Paper received 13/I/2006.

Paper accepted 13/I/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Saleev.

⁴Bashkirov Eugene Konstantinovich (bash@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.