

ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗ В ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТОНКОПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН¹

© 2006 А.С. Пименов²

Отыскание функции распределения тока и диаграммы направленности для системы тонких круглоцилиндрических проводников сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для его решения применяется метод вейвлет-Галеркина на базе сплайновых вейвлет. Использование псевдоразреженности матрицы системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) позволяет применять алгоритмы технологии разреженных матриц. Изучаются свойства матриц и приводятся результаты численных расчетов.

Вычислительные трудности решения интегральных уравнений в задачах электродинамики во многом обусловлены заполненностью матриц, возникающих при их дискретизации. Это приводит к огромному объему вычислений (особенно в трехмерных задачах). Однако, как было показано в [1], в базисе из вейвлет-функций [2] большинство элементов матрицы СЛАУ оказываются очень малыми по абсолютной величине, т.е. она будет псевдоразреженной [3]. Использование этого факта позволяет существенно уменьшить объем вычислений и требования к оперативной памяти компьютера и открывает путь к созданию эффективных алгоритмов решения существенно трехмерных задач.

В настоящей работе рассматривается применение метода вейвлет-Галеркина к системе электрически тонких проводников.

1. Постановка задачи

Рассматривается система вертикальных электрически тонких круглоцилиндрических проводников (рис. 1).

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором И.А. Блатовым

²Пименов Александр Сергеевич (pimenov_a@mail.ru), кафедра прикладной математики Самарского муниципального университета Наяновой, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 196.

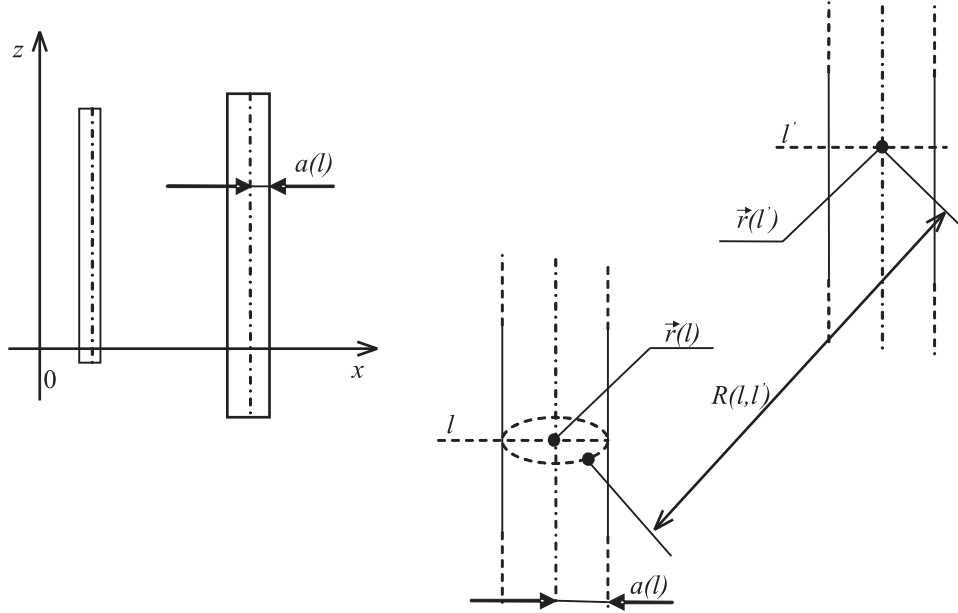


Рис. 1. Система проводников

Задача состоит в отыскании функции распределения тока по проводникам при заданном возбуждении системы. Необходимо решить следующее уравнение Поклингтона:

$$E(l) = \int_L i[\omega\mu_0 G(l, l') - \frac{1}{\omega\epsilon_0} \frac{\partial^2 G(l, l')}{\partial l \partial l'}] I(l') dl', \quad (1.1)$$

$$G(l, l') = \frac{e^{-i\beta R(l, l')}}{R(l, l')}, R(l, l') = \sqrt{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|^2 + a^2(l)}, \quad (1.2)$$

где L — контур, образованный совокупностью осей проводников; l, l' — координата, отсчитываемая вдоль L ; E — заданная функция распределения стороннего поля (z -составляющая), возбуждающего систему; I — искомая функция распределения осевого тока; G — функция Грина; $\vec{r}(l)$ — радиус-вектор точки на L ; $a(l)$ — радиус проводника в сечении l ; $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число; $\omega = \frac{6\pi \cdot 10^8}{\lambda}$ — круговая частота; λ — длина волны; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ — магнитная постоянная; $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-7}$ — электрическая постоянная.

Один из проводников рассматривается в качестве активного вибратора. В среднем его сечении на контуре L выделяется короткий отрезок, на котором задается сторонний кусочно-синусоидальный ток (физически такой локальный источник соответствует зазору вибратора, к которому подключается фидер). Функция E определяется по формуле:

$$E(l) = -30i(G(l, l_1) - 2 \cos(|l_2 - l_1|/2)G(l_1, (l_2 + l_1)/2) + G(l, l_2)). \quad (1.3)$$

С целью удобства физической интерпретации при тестировании в качестве окончательной характеристики предлагается использовать диаграмму

направленности (ДН) — функцию угловых сферических координат, описывающую распределение поля излучения на сфере весьма большого радиуса (много большего размеров исследуемой системы).

В данном случае ненормированная комплекснозначная ДН определяется по формуле:

$$f(\theta, \varphi) = \sin \theta \int_L I(l) \exp\{i\beta \vec{r}(l) \vec{v}(\theta, \varphi)\} dl, \quad (1.4)$$

где $\vec{v}$ — орт направления излучения.

Нормировка ДН выполняется к своему максимуму:

$$F(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi) / \max Am(f). \quad (1.5)$$

В конечном итоге практический интерес представляет амплитудная ДН $Am(F)$.

Для решения уравнения (1) применяется метод вейвлет-Галеркина. Вначале в п. 2 строятся сплайновые вейвлеты. Путем скалярного умножения левой и правой частей уравнения на эти функции мы получаем СЛАУ относительно неизвестных коэффициентов. Формулируется теорема о том, что матрица СЛАУ является псевдоразреженной, т.е. большинство ее элементов по модулю меньше заданного барьера.

Теперь для решения поставленной задачи применяем метод Галеркина, сначала приводя его к уравнению Поклингтона и проводя оценку ядра. Формулируется и доказывается теорема о сходимости в зависимости от малого параметра a . Если n — число точек разбиения контура, то $\|u_a - u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $a \rightarrow 0 : an \leq C_1$, где C_1 — некоторая константа.

Приводятся результаты численных экспериментов. Первые правдоподобные результаты получаем за 6 секунд. Решение этой задачи методом коллокации дает те же результаты за 12 минут.

2. Сплайновые вейвлеты

Пусть $[a, b] = [0, 1]$, m — натуральное число и n_0 — такое целое число, что $2^{n_0} < 2m - 1 < 2^{n_0+1}$. Рассмотрим семейство $\Delta = \{\Delta_n, n = n_0, n_0 + 1, \dots\}$ разбиений отрезка $[0, 1]$ $\Delta_n : 0 = x_0^n < x_1^n < \dots < x_{2^n}^n = 1$ с постоянным шагом $h = h_n = 1/2^n$. На каждом из разбиений Δ_n рассмотрим пространство сплайнов $L_n = S(\Delta_n, m-1, 1)$. Тогда для каждого $k \geq n_0$ пространство $S(\Delta_k, m-1, 1)$ можно представить в виде прямой суммы $L_k = L_{n_0} \oplus W_{n_0+1} \oplus W_{n_0+2} \oplus \dots \oplus W_k$, где через W_k обозначено ортогональное дополнение пространства L_{k-1} до пространства L_k . Искомый wavelet-базис будем строить как объединение базиса в L_{n_0} и всех базисов в пространствах W_n , $n_0 < n \leq k$.

Вначале построим базис в ортогональном дополнении W_n пространства L_{n-1} до пространства L_n . Зафиксируем $n \geq n_0 + 1$. В случае необходимости

будем считать, что каждое из разбиений Δ_n продолжено с тем же шагом на всю числовую ось узлами x_i^n , $-\infty < i < +\infty$. Нормализованные B -сплайны на разбиении Δ_n будем обозначать $N_{m-1,j,n}$.

Зафиксируем некоторое целое $i \geq 0$ такое, что $i + 2m - 1 \leq 2^{n-1}$, то есть отрезок $[x_i^{n-1}, x_{i+2m-1}^{n-1}]$ целиком содержится в $[0, 1]$. Будем искать функцию $\psi_{i,n}(x) \in W_n$ в виде

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j N_{m-1,j,n}. \quad (2.1)$$

Для того чтобы $\psi_{i,n} \in W_n$, достаточно потребовать выполнения условий

$$(\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2, \quad (2.2)$$

поскольку остальные условия ортогональности выполняются автоматически в силу дизъюнктивности носителей.

Подставляя представление (2.1) в (2.2), получим однородную систему $3m - 2$ уравнений с $3m - 1$ неизвестными

$$\sum_{j=2i}^{2i+3m-2} \alpha_j (N_{m-1,j,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + 2m - 2, \quad (2.3)$$

которая всегда имеет нетривиальное решение. Находя это нетривиальное решение, получаем искомый набор коэффициентов и функцию $\psi_{i,n}(x)$ в виде (2.1).

Из представления (2.1) и свойств B -сплайнов вытекает, что носитель $\text{supp}(\psi_{i,n}) \subset [x_{2i}^n, x_{2i+4m-2}^n]$, т.е. содержит $4m - 2$ смежных частичных отрезка. Возникает вопрос, нельзя ли построить wavelet с меньшей длиной носителя? Следующая теорема показывает, что это не так.

Теорема 2.1. Пусть $p < m - 1$, и функция $\psi_{i,n}(x)$ вида

$$\psi_{i,n}(x) = \sum_{j=2i}^{2i+m+2p} \alpha_j N_{m-1,j,n} \quad (2.4)$$

удовлетворяет условиям

$$(\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = i - m + 1, i - m + 2, \dots, i + m + p - 1. \quad (2.5)$$

Тогда $\psi_{i,n}(x) \equiv 0$.

Следствие 2.1. Совокупность функций $\{\psi_{i,n}\}$, $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2m + 1$ линейно независима на каждом отрезке $[x_j^{n-1}, x_{j+m-1}^{n-1}]$, $0 \leq j \leq 2^{n-1}$ (т.е. линейно независимы их сужения на каждый такой отрезок).

Замечание 2.1. Справедлива формула $\psi_{i,n}(x) = \psi_{0,n}(2^{n-n_0}x - i/2^{n_0-1})$, т.е. совокупность построенных wavelet-функций получается сдвигом одной единственной функции $\psi_{0,n}(x)$.

Таким образом, мы построили совокупность полуортогональных линейно независимых wavelet $\{\psi_{i,n}\}$, $i = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 2m + 1$. Однако размерность ортогонального дополнения W_n равна 2^{n-1} , т.е. до базиса в W_n нам не хватает ровно $2(m-1)$ функций. Построим недостающие wavelet-функции. Для

этого рассмотрим функции $\psi_{i,n}(x)$ при $-2m+2 \leq i \leq 2^{n-1}-1$ на расширенном разбиении Δ_n .

Первую группу из $m-1$ недостающих wavelet будем искать в виде

$$\widetilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x), \quad -m+1 \leq i \leq -1, \quad (2.6)$$

из условий

$$(\widetilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = -m+1, -m+2, \dots, -1, \quad (2.7)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[0, 1]$.

Подставляя (2.6) в (2.7), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j (\psi_{j,n}, N_{m-1,k,n-1}) = (\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}), \quad (2.8)$$

$$k = -m+1, -m+2, \dots, -1$$

для определения α_j . Матрица системы (2.8) не вырождена, так как в противном случае существовало бы нетривиальное решение соответствующей однородной системы, что означало бы, что функция $\sum_{j=-2m+2}^{-m} \alpha_j \psi_{j,n}(x)$ является wavelet-функцией на $[0, 1]$ с носителем $[x_0^n, x_{2m-2}^n]$, что невозможно в силу теоремы 2.1. Решая систему (2.8), получаем, что функция (2.6) является искомой wavelet-функцией, так как ортогональность к B -сплайнам $N_{m-1,k,n-1}$ при $k \geq 0$ имеет место в силу ортогональности им всех wavelet из линейной комбинации (2.6), а при $-m+1 \leq k \leq -1$ — в силу условий (2.7).

Тем самым мы построили совокупность $m-1$ wavelet-функций (2.6). Их линейная независимость с ранее построенными функциями вытекает из вида (2.6) и следствия 2.1.

Вторую группу из $m-1$ недостающих wavelet будем искать в виде

$$\widetilde{\psi}_{i,n}(x) = \psi_{i,n}(x) - \sum_{j=2^{n-1}-m+1}^{2^{n-1}-1} \alpha_j \psi_{j,n}(x), \quad 2^{n-1}-2m+2 \leq i \leq 2^{n-1}-m, \quad (2.9)$$

из условий

$$(\widetilde{\psi}_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}) = 0, \quad k = 2^{n-1}-m+1, 2^{n-1}-m+2, \dots, 2^{n-1}-1, \quad (2.10)$$

где скалярное произведение понимается в смысле $L_2[0, 1]$.

Подставляя (2.9) в (2.10), получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=2^{n-1}-m+1}^{2^{n-1}-1} \alpha_j (\psi_{j,n}(x), N_{m-1,k,n-1}) = (\psi_{i,n}, N_{m-1,k,n-1}), \quad (2.11)$$

$$k = 2^{n-1}-m+1, 2^{n-1}-m+2, \dots, 2^{n-1}-1$$

для определения α_j . Решая систему (2.11), получаем, что функция (2.9) является искомой wavelet-функцией. Тем самым мы построили совокупность

$m-1$ wavelet-функций (2.9). Вместе с функциями (2.1) и (2.6) они образуют искомый базис в W_n , если $2^{n-1} > 2m-1$.

В качестве базиса в L_{n_0} выберем совокупность “усеченных” B -сплайнов

$$\{\varphi_k = \bar{N}_{m-1,k,n_0}, -m+1 \leq k \leq 2^{n_0-1}\}. \quad (2.12)$$

Итак, совокупность функций (2.12) и (2.1), (2.6), (2.9) при $n_0+1 \leq n \leq k$ образует искомый wavelet-базис в пространстве L_k .

Замечание 2.2. Из рассмотренных ранее аппроксимационных свойств сплайнов вытекает, что совокупность функций

$$\begin{aligned} & \{\bar{N}_{m-1,k,n_0} \mid_{k=-m+1}^{2^{n_0-1}}\} \cup \\ & \cup \left\{ \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} \left\{ \{\psi_{i,n} \mid_{i=0}^{2^{n-1}-2m+1}\} \cup \{\tilde{\psi}_{i,n} \mid_{i=-m-1}^{-1}\} \cup \{\tilde{\psi}_{i,n} \mid_{i=2^{n-1}-2m+2}^{2^{n-1}-m}\} \right\} \right\} \end{aligned}$$

образует базис в $L_2[0, 1]$.

Замечание 2.3. Для функций (2.6) и (2.9) при $i \in [2^{n-1}-2m+2, 2^{n-1}-m]$ в силу симметрии справедливы формулы

$$\tilde{\psi}_{i,n}(x) = \tilde{\psi}_{n_0+1, 2^{n-1}-2m-i+1}(2^{n-n_0-1}(1-x)).$$

3. Алгоритм построения wavelet-базисов

Из полученных в предыдущем пункте результатов вытекает следующий алгоритм построения wavelet-базисов в $S(\Delta_k, m-1, 1)$ в случае произвольных $m \geq 1$, $k : 2^k > 2m-1$.

- 1) Для $n = n_0 + 1$ численно решаем СЛАУ (2.3) при $i = 0$ следующим образом:
 - а) для $j = 0, 1, \dots, 3m-2$ вычисляем скалярные произведения $(N_{m-1,j,n}, N_{m-1,k,n-1})$, применяя для вычисления интегралов на каждом частичном отрезке, входящем в носитель B -сплайна, квадратурную формулу Гаусса, точную для многочленов степени $2(m-1)$ [5].
 - б) полагаем $\alpha_{3m-2} = 1$ и находим α_j , $0 \leq j \leq 3m-3$, решая систему с квадратной симметричной матрицей одним из прямых методов (например, методом квадратного корня [5]).
- 2) Для $n = n_0 + 1$ аналогичным образом решаем системы (2.6) при $-m+1 \leq i \leq -1$.
- 3) Определяем для $n \in [n_0 + 1, k]$, $i \in [0, 2^{n-1} - 2m + 1]$ — функции

$$\psi_{i,n}(x) = 2^{(n-n_0-1)/2} \psi_{n_0+1,0}(2^{n-n_0-1}x - i/2^{n_0}),$$

для $n \in [n_0 + 1, k]$, $i \in [-m+1, -1]$ — функции

$$\psi_{i,n}(x) = 2^{(n-n_0-1)/2} \tilde{\psi}_{n_0+1,i}(2^{n-n_0-1}x),$$

а для $n \in [n_0 + 1, k]$, $i \in [2^{n-1} - 2m + 2, 2^{n-1} - m]$ — функции

$$\psi_{i,n}(x) = 2^{(n-n_0-1)/2} \widetilde{\psi}_{n_0+1, 2^{n-1}-2m-i+1}(2^{n-n_0-1}(1-x)).$$

- 4) Присоединяем к построенным функциям функции $\{\varphi_{k,n_0}, -m+1 \leq k \leq \leq 2^{n_0} - 1\}$, где $\varphi_{k,n_0}(x) = \overline{N}_{m-1,k,n_0}$.

Замечание 3.1. Таким образом, wavelet-базис в $S(\Delta_k, m-1, 1)$ получается сжатиями и симметричными преобразованиями $m-1$ -й функции $\widetilde{\psi}_{n_0+1,i}$ при $i = -m+1, -m+2, \dots, -1$, а также сжатиями и сдвигами функции $\psi_{n_0+1,0}$.

Замечание 3.2. Для вычисления функций из замечания 3.1 необходимо уметь вычислять значения B -сплайнов $N_{m-1,j,n-1}$. Их вычисление осуществляется с помощью рекуррентных формул (3.1), которые сводят вычисление $N_{m-1,j,n-1}$ к вычислению B -сплайнов первой степени по формулам

$$N_{1,j,n-1} = \begin{cases} x - x_j^{n-1}, & x \in [x_j^{n-1}, x_{j+1}^{n-1}], \\ x_{j+2}^{n-1} - x, & x \in [x_{j+1}^{n-1}, x_{j+2}^{n-1}], \\ 0, & x \notin [x_j^{n-1}, x_{j+2}^{n-1}]. \end{cases}$$

$$N_{m-1,k}(t) = \frac{t - x_k}{x_{k+m-1} - x_k} N_{m-2,k}(t) + \frac{x_{k+m} - t}{x_{k+m} - x_{k+1}} N_{m-2,k+1}(t). \quad (3.1)$$

Замечание 3.3. Построение wavelet-функций в данном разделе проводилось в случае $[a, b] = [0, 1]$. Однако очевидно, что на произвольном отрезке $[a, b]$ соответствующую wavelet-систему можно получить из построенной с помощью линейной замены $x' = \frac{x-a}{b-a}$, рассматривая wavelet-функции переменной x' . Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что wavelet-система построена для произвольного отрезка $[a, b]$.

Замечание 3.4. В последующих разделах для краткости обозначений и приведения их в соответствие с общепринятыми в теории wavelet-функций положим

$$\overline{N}_{m-1,j,n}(x) = \varphi_{i,n}(x),$$

считая m фиксированным.

4. Интегральные уравнения и метод Бубнова–Галеркина

Определение 4.1. Определенную на квадрате $[a, b] \times [a, b]$ функцию $K(x, y)$ будем называть асимптотически m -гладкой, если она m раз непрерывно дифференцируема, и для всех ее производных l -го порядка ($1 \leq l \leq m$) и некоторой константы $\alpha > 0$ справедливы оценки

$$\left| \frac{\partial^l K(x, y)}{\partial x^s \partial y^{l-s}} \right| \leq C \frac{1}{|x - y|^{\alpha-l}}. \quad (4.1)$$

Пусть $K(x, y)$ — асимптотически m -гладкая функция. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) + \int_a^b K(x, y)u(y) dy = f(x) \quad (4.2)$$

с заданной функцией f и неизвестной функцией u . Сложности численного решения уравнений такого вида (особенно многомерных) традиционными численными методами связаны с тем, что матрицы, получающиеся при их дискретизации, оказываются заполненными, т.е. состоящими из ненулевых элементов.

Рассмотрим для (4.2) метод Бубнова–Галеркина на базе построенных wavelet-функций степени $m-1$. Зафиксируем некоторое натуральное $k > n_0$ и будем искать решение (4.2) в виде

$$u = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \varphi_{j,n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i} \quad (4.3)$$

из условий

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b K(x, y) \left(\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \varphi_{j,n_0}(y) + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i}(y) \right) \varphi_{l,n_0}(x) dx = \\ = \int_a^b f(x) \varphi_{l,n_0}(x) dx, \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n_0}-1, \\ \int_a^b \int_a^b K(x, y) \left(\sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \varphi_{j,n_0}(y) + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j,n_0+i}(y) \right) \psi_{l,n}(x) dx = \\ = \int_a^b f(x) \psi_{l,n}(x) dx, \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n-1}-m, \quad n_0+1 \leq n \leq k. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Совокупность условий (4.4) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей порядка 2^k+m-1 , элементы которой имеют вид

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_a^b \varphi_{j,n_0}(x) \varphi_{l,n_0}(x) dx + \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi_{j,n_0}(y) \varphi_{l,n_0}(x) dx dy, \\ \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi_{j,n_0}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy, \int_a^b \int_a^b K(x, y) \varphi_{j,n_0}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy, \\ \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j,n}(y) \psi_{l,n+s}(x) dx dy, \quad s \neq 0, \\ \int_a^b \psi_{j,n}(x) \psi_{l,n}(x) dx + \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j,n}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для классических систем функций в методе Галеркина числа (4.5) оказываются, в основном, ненулевыми и недостаточно малыми, чтобы ими можно было пренебречь и рассматривать СЛАУ (4.4) как разреженную. Получим оценки чисел (4.4) в случае wavelet. В целях упрощения технических деталей рассмотрим случай $\alpha = 0$ в (4.1).

Теорема 4.1. Найдется такая константа $C > 0$, не зависящая от k , что при $-m + 1 \leq l \leq 2^{n-1} - m$, $-m + 1 \leq j \leq 2^{n-1} - m$, $n_0 + 1 \leq n \leq k$ справедливы оценки

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j,n}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy \right| \leq C 2^{-n} (1 + |l - j|)^{-m}, \quad (4.6)$$

а при $-m + 1 \leq j \leq 2^{n+s-1}$, $1 \leq s \leq k - n$

$$\left| \int_a^b \int_a^b K(x, y) \psi_{j,n+s}(y) \psi_{l,n}(x) dx dy \right| \leq C 2^{-(n+s(m+1))} (1 + |l - j/2^s|)^{-m}. \quad (4.7)$$

Из теоремы 4.1 следует, что матрица системы (4.4) является псевдоразреженной, т.е. в ней очень много малых по модулю элементов. Учитывая, что СЛАУ для интегральных уравнений Фредгольма второго рода хорошо обусловлены, пренебрегая этими малыми элементами, мы получим хорошую разреженную аппроксимацию этой матрицы, для которой можно применять алгоритмы для разреженных систем [6].

5. Метод решения поставленной задачи

Будем решать уравнение (1.1).

Представим его в следующем виде:

$$E(l) = \int_L K(l, l') I(l') dl', \quad (5.1)$$

где $K(l, l') = i(\omega \mu_0 G(l, l') - \frac{1}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial^2 G(l, l')}{\partial l \partial l'})$ — ядро интегрального уравнения Фредгольма первого рода (5.1). Функции $E(l), K(l, l')$ имеют разрывы первого рода в точках $l = c_0, l = c_1, \dots$, в которых контур L прерывается (т.е. на концах проводников). Поскольку токовая функция на концах проводников должна иметь нули (из физических соображений), она является непрерывной, но негладкой в этих точках.

Проведем оценки ядра для рассматриваемых систем (от l линейно зависит только вертикальная координата радиус-вектора, радиус проводников $a(l) = \text{const}$).

Лемма. Для ядра уравнения (5.1) верна оценка

$$|K(l, l')| \leq \frac{C}{((l - l')^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (5.2)$$

Доказательство. Пусть $z(l)$ — вертикальная координата, соответствующая положению точки l на контуре L .

$$\frac{\partial^2 G(l, l')}{\partial l \partial l'} = e^{-i\beta R} \left(\frac{1}{R^3} + \frac{i\beta}{R^2} - 3 \frac{(z(l) - z(l'))^2}{R^5} + \beta^2 \frac{(z(l) - z(l'))^2}{R^3} - 3i\beta \frac{(z(l) - z(l'))^2}{R^4} \right);$$

Сначала докажем, что $|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')| \geq C|l - l'|$. Если l, l' лежат в пределах одного проводника, то $|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')| = |l - l'|$. Иначе $|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')| = \sqrt{(z(l) - z(l'))^2 + (x(l) - x(l'))^2} \geq |x(l) - x(l')| \geq C|l - l'|$, где $C = \frac{\min(|x(l) - x(l')|)}{L}$,

$\min(|x(l) - x(l')|)$ — минимальное расстояние между двумя проводниками контура.

Так как

$$\frac{1}{R^2} = \frac{R}{R^3} \leq \frac{L}{R^3}, \quad \frac{(z(l) - z(l'))^2}{R^5} \leq \frac{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|}{R^5} \leq \frac{1}{R^3},$$

то учитывая, что $|z(l) - z(l')| \leq L$, $R = \sqrt{|\vec{r}(l) - \vec{r}(l')|^2 + a^2}$, получаем:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 G(l, l')}{\partial l \partial l'} \right| &\leq \left(\left| \frac{1}{R^3} \right| + \left| \frac{\beta}{R^2} \right| + 3 \left| \frac{(z(l) - z(l'))^2}{R^5} \right| + \beta^2 L^2 \left| \frac{1}{R^3} \right| + 3\beta \left| \frac{(z(l) - z(l'))^2}{R^4} \right| \right) \leq \\ &\leq \frac{C_1}{((l - l')^2 + a^2)^{3/2}}; \\ |G(l, l')| &= \left| \frac{e^{-i\beta R(l, l')}}{R(l, l')} \right| \leq \frac{1}{|R|} \leq \frac{C_2}{((l - l')^2 + a^2)^{3/2}}; \\ |K(l, l')| &\leq |\omega \mu_0 G(l, l')| + \left| \frac{1}{\omega \epsilon_0} \frac{\partial^2 G(l, l')}{\partial l \partial l'} \right| \leq \frac{C}{((l - l')^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Применим метод Бубнова–Галеркина на базе вейвлет-функций степени $m - 1$ для решения системы (5.1). Зафиксируем натуральное $k > n_0$ и ток будем искать в виде

$$I = \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0}-1} d_{0j} \varphi_{j, n_0} + \sum_{i=1}^{k-n_0} \sum_{j=-m+1}^{2^{n_0+i-1}-m} c_{ij} \psi_{j, n_0+i} \quad (5.3)$$

из условий

$$\left(\int_{y=0}^L K(x, y) I(y) dy, \varphi_{l, n_0}(x) \right) = (E(x), \varphi_{l, n_0}(x)), \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n_0} - 1, \quad (5.4)$$

$$\left(\int_{y=0}^L K(x, y) I(y) dy, \psi_{l, n}(x) \right) = (E(x), \psi_{l, n}(x)), \quad -m+1 \leq l \leq 2^{n_0} - 1, \quad n_0 + 1 \leq n \leq k. \quad (5.5)$$

Здесь $\varphi_{l, n_0}(x)$ — сплайны и $\psi_{l, n}(x)$ — сплайновые вейвлеты третьей степени [2].

Совокупность условий (5.4)–(5.5) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов d_{0j}, c_{ij} с квадратной псевдоразреженной матрицей порядка $2^k + m - 1$, элементы которой имеют вид:

$$\int_{x=0}^L \int_{y=0}^L K(x, y) \varphi_{j, n_0}(y) \varphi_{l, n_0}(x) dx dy, \quad (5.6)$$

$$\int_{x=0}^L \int_{y=0}^L K(x, y) \varphi_{j, n_0}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy, \quad (5.7)$$

$$\int_{x=0}^L \int_{y=0}^L K(x, y) \psi_{j, n}(y) \psi_{l, n}(x) dx dy. \quad (5.8)$$

Для решения системы необходимо вычислить элементы ее матрицы. Матрица системы состоит из сплайнового, вейвлетно-сплайновых и вейвлетных блоков.

Интегралы будем вычислять разбиением всего контура на 2^k отрезков и применением формулы Гаусса с p узлами на каждом отрезке.

Согласно [3], большинство элементов матрицы пренебрежимо малы по модулю. Поэтому заполнять матрицу мы будем следующим образом. Элемент матрицы будем считать нулевым, если он по модулю меньше заданного барьера $0 < \epsilon \ll 1$. Такие элементы мы хранить просто не будем.

Матрицу мы вычисляем целиком, применяя быстрое вейвлет-преобразование (FWT). Идея его состоит в том, что все сплайны и вейвлеты уровня $n-1$ представляются в виде линейной комбинации сплайнов предыдущего уровня (n). Поэтому мы можем вычислять интегралы по самому мелкому разбиению со сплайнами самого верхнего уровня k . Затем интегралы с вейвлетами уровня k мы вычисляем как линейную комбинацию вычисленных интегралов и таким же образом (со сплайновыми коэффициентами) находим интегралы со сплайнами уровня $k-1$. Таким образом, мы получаем быстрый алгоритм для вычисления всех элементов матрицы (с учетом, конечно, что интегралы на уровне k уже посчитаны).

Естественно, надо учитывать, что алгоритм FWT весьма прост в одномерном случае, а в двумерном использование его напрямую приведет к большим затратам памяти (больше, чем уйдет на хранение самой матрицы). Поэтому в каждой точке разбиения отрезка $[0; L]$ x_i мы считаем все интегралы $\int_{y=0}^L K(x_i, y)\psi(y)dy(*)$, где ψ обозначает все вейвлеты уровней $n_0 + 1..k$ и сплайны уровня n_0 указанным выше способом. При этом в памяти храним последние незаконченные (т.е. недосчитанные) m сплайнов каждого уровня $n_0..k$ и $3m-2$ вейвлет каждого уровня $n_0 + 1..k$ и прибавляем к сплайнам посчитанные интегралы (*), а досчитанные сплайны добавляем к вейвлетам и сплайнам следующих уровней и т.д. Законченные вейвлетные и сплайновые элементы уровня n_0 мы добавляем в матрицу, если они больше заданного барьера.

После заполнения матрицы мы вычисляем вектор правой части:

$$\mathbf{v} = \left(\int_{x=0}^L E(x)\psi(x)dx \right)_{\psi} \quad (5.9)$$

и с помощью метода сопряженных градиентов находим решение искомой СЛАУ. Матрица этой СЛАУ A не является эрмитовой, поэтому для сходимости метода необходимо домножить обе части на комплексно-сопряженную к матрице A матрицу A^* . Реализуя этот вариант, нет никакой необходимости перемножать A и A^* , т.к. это потребует определенного времени и структура матрицы A нарушится, вместо этого в методе сопряженных градиентов на каждой итерации на вектор решения умножается сначала A , а потом A^* .

6. Обоснование метода

Обоснование метода основывается на следующей теореме об операторных уравнениях.

Рассмотрим операторные уравнения

$$K_a u = f, \quad P_n K_a u_n = P_n f, \quad (6.1)$$

где K_a — семейство операторов, зависящих от параметра $a \in (0, a_0]$, действующих в банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|$, $P_n : E \rightarrow E_n$ — операторы проектирования на подпространства $E_n \subset E$.

То, что второе уравнение (6.1) следует из первого, можно показать следующим образом:

$$\begin{aligned} (K_a u_n, v_n) &= (f, v_n); (K_a u_n - f, v_n) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow K_a u_n - f \perp E_n \Leftrightarrow P_n(K_a u_n - f) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{P_n K}$ — сужение оператора $P_n K$ на E_n .

Теорема. Пусть удовлетворены следующие условия.

1. Первое из уравнений (6.1) при всех $a \in (0, a_0]$ имеет единственное решение $u_a \in E$, и может быть найдена константа $C_1 > 0$, для которой $\|u_a - P_n u_a\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, a \rightarrow 0 : an \leq C_1$.

2. Оператор $\widetilde{P_n K}$ обратим, и для всех $n \geq n_0, a \in (0, a_0] : na \leq C_1$ верны оценки $\|(\widetilde{P_n K})^{-1} P_n K_a\| \leq C_2$.

Тогда $\|u_a - u_n\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty, a \rightarrow 0 : an \leq C_1$ и верны оценки $\|u_n - P_n u_a\| \leq C_2 \|u_a - P_n u_a\|$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} P_n K_n u_n &= P_n f \stackrel{(f=K_a u_a)}{\Rightarrow} P_n K_a(u_n - P_n u_a) = P_n K_a u_a - P_n K_a P_n u_a; \\ \widetilde{P_n K_a}(u_n - P_n u_a) &= P_n K_a(u_n - P_n u_a); \\ u_n - P_n u_a &= (\widetilde{P_n K_a})^{-1} P_n K_a(u_n - P_n u_a) \stackrel{2}{\Rightarrow} \|u_n - P_n u_a\| \leq C_2 \|u_a - P_n u_a\|; \\ \|u_a - u_n\| &\leq \|u_a - P_n u_a\| + \|u_n - P_n u_a\| \leq (1 + C_2) \|u_a - P_n u_a\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Выполнение условий теоремы для рассматриваемого метода Бубнова–Галеркина в случае $E = L_\infty[l], E_n = S(\Delta, 3, 1)$ следует из аппроксимационных свойств сплайновых вейвлет, ограниченности последовательности операторных норм $\|P_n\|_\infty$ [6], априорных предположений о гладкости функции тока, представления оператора задачи в виде $\widetilde{P_n K_a} = \widetilde{P_n K_{a,1}} + \widetilde{P_n K_{a,2}}$, где $K_{a,1}$ — интегральный оператор с ядром $K_1(x, y) = \begin{cases} K(x, y), & |x - y| \leq C_3 a \\ 0, & |x - y| > C_3 a \end{cases}$, где C_3 достаточно большая, но не зависящая от a, n константа. В самом

деле, из вида $K(x, y)$ следует обратимость $\widetilde{P_n K_{a,1}}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{P_n K_a} &= \widetilde{P_n K_{a,1}} + \widetilde{P_n K_{a,2}}; \\ |K(x, y)| &\leq \frac{C}{((x-y)^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}, |x-y| \geq C_3 a, \\ K_{a,1} u_n &= \int_0^L K_1(x, y) u_n(y) dy = \\ &= \int_{\max(0, x-C_3 a)}^{\min(L, x+C_3 a)} K_1(x, y) u_n(y) dy = u_n(y') f(x) \rightarrow u_n(x) f(x), a \rightarrow 0\end{aligned}$$

т.е. имеет место сильная сходимость. Т.к. сфера в конечномерном пространстве является компактным множеством, то следует равномерная сходимость на этой сфере, и $\inf_{u \in E_n, \|u\| \leq 1} \|\widetilde{P_n K_{a,1}} u\| \geq C \|f(x)\| \geq \frac{C}{a^2}$. Значит, существует обратный оператор $\|(\widetilde{P_n K_{a,1}})^{-1}\| \leq a^2$.

Тогда, т.к. a — малый параметр, имеем следующее:

$$\begin{aligned}(\widetilde{P_n K_a})^{-1} &= (\widetilde{P_n K_{a,1}} + \widetilde{P_n K_{a,2}})^{-1} = (\widetilde{P_n K_{a,1}} (I + (\widetilde{P_n K_{a,1}})^{-1} \widetilde{P_n K_{a,2}}))^{-1} = \\ &= (I + (\widetilde{P_n K_{a,1}})^{-1} \widetilde{P_n K_{a,2}})^{-1} (\widetilde{P_n K_{a,1}})^{-1}; \\ \|K_{a,2}(x, y)\| &\leq \frac{C}{a C_3}; \Rightarrow \|M\| = \|(\widetilde{P_n K_{a,1}})^{-1} \widetilde{P_n K_{a,2}}\| < C a < 1; \\ \|(I+M)^{-1}\| &= \|I - M + M^2 - M^3 + \dots\| \leq 1 + \|M\| + \|M\|^2 + \dots = \frac{1}{1 - \|M\|} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \|(\widetilde{P_n K_a})^{-1}\| \leq C a^2 \Rightarrow \|(\widetilde{P_n K_a})^{-1} P_n K_a\| \leq C\end{aligned}$$

7. Антенна Уда–Яги

Вычислительный эксперимент проводился на системе Уда–Яги с пятью проводниками одинакового радиуса (рис. 2).

Длина волны 4 метра. Вертикальные размеры проводников (слева направо): 2; 2; 1,8; 1,72; 1,64 м.

Абсциссы проводников: 0,4; 1; 1,8; 2,8; 3,7 м.

Радиусы проводников 0,01 м.

Второй проводник слева — активный вибратор с зазором 0,04 м.

Вся система обладает зеркальной симметрией относительно плоскости $z = 0$.

Было проведено несколько экспериментов, нацеленных на изучение точности решения уравнения (5.1) при различных k . Точность решения определяется двумя параметрами: 1) точность решения интегрального уравнения как сравнение $E(l)$ с левой частью уравнения (5.1) при подстановке в нее полученного тока $I(l)$; 2) различия в диаграммах направленности при различных k .

Было выяснено, что для обеспечения приемлемого вида решения и диаграммы направленности необходимо, чтобы интегрирование производилось по разбиению из более чем 3000 точек. Меньшее количество точек не обеспечивает достаточную точность интегрирования ядра, что приводит к слиш-

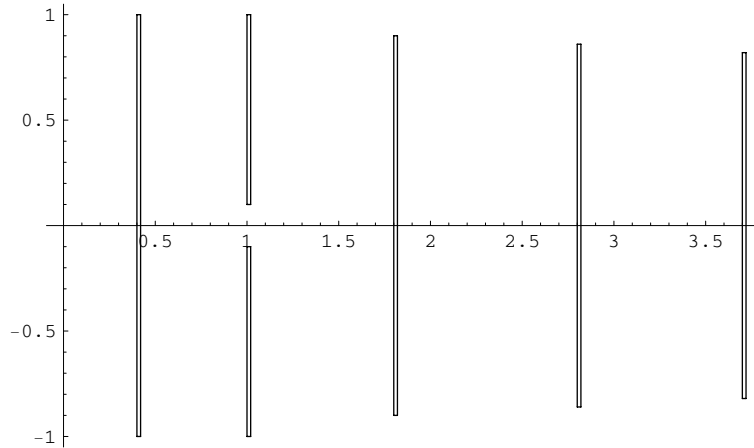


Рис. 2. Антенна Уда-Яги

ком большим погрешностям. Для малых k ($k < 9$) добавляются дополнительные точки разбиения.

Похожая на правильную диаграмма направленности получается при минимальных $k = 6$, количество отрезков $2^9 = 512$, количество точек в формуле Гаусса (p) 6. Время счета — 8 секунд, размер матрицы — 64 Кб. Барьер (т.е. число, для которого любое число, меньшее его по модулю считается равным 0) выбран 0.001, количество ненулевых элементов — 4107 (из 4761 элементов, т.е. 86%). Графики ДН приведены на рисунке 3, 4.

При $k = 11$ абсолютная погрешность решения (как разность между $E(l)$ и левой частью уравнения (5.1)) достигает 0.05 процентов, но относительная погрешность — 365 процентов на концах проводников. При $p = 4$ время счета матрицы 1.5 минуты, размер матрицы 4 Мб. Барьер тот же, количество нулевых элементов — 4017082 (из 4206601, т.е. 95%). На рис. 5–8 представлены графики тока и ДН.

Процент заполненности матрицы можно видеть в табл. 1.

Таблица 1

Процент заполненности матрицы при различных k

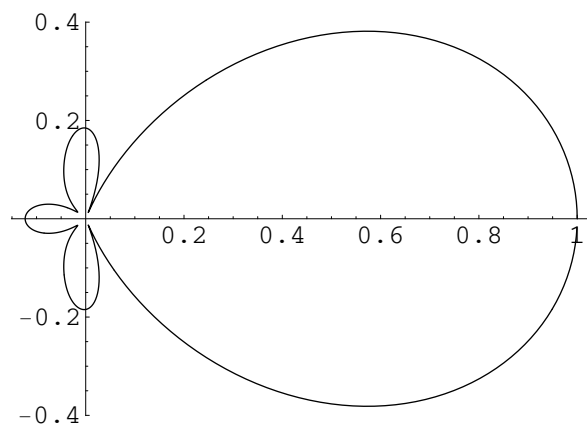
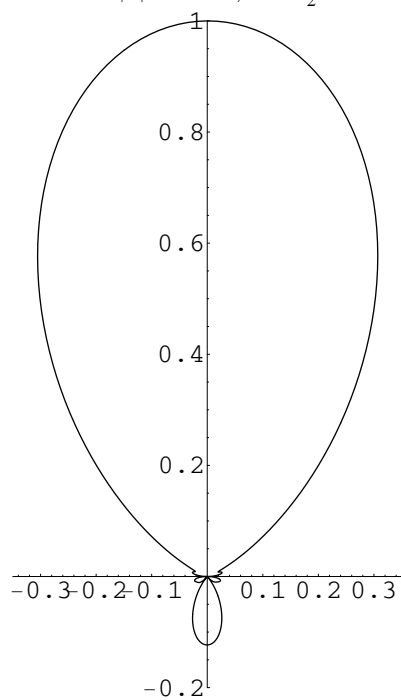
$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
85.4%	57.9%	32.2%	16.8%	8.8%	5.1%

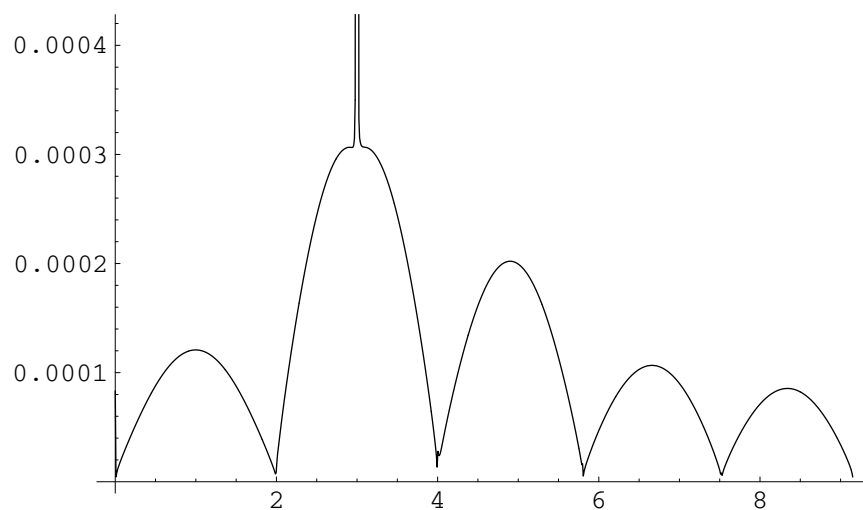
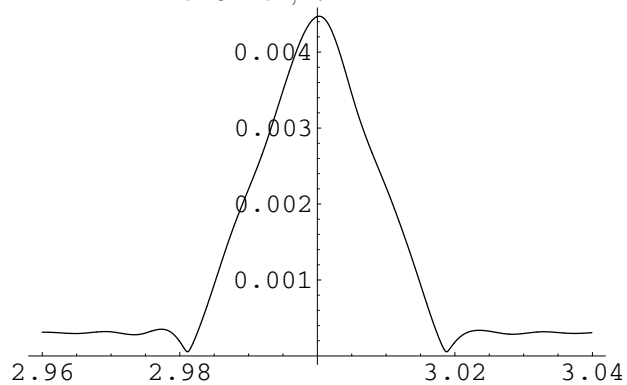
Сравнение времени выполнения при различных барьерах представлено в табл. 2.

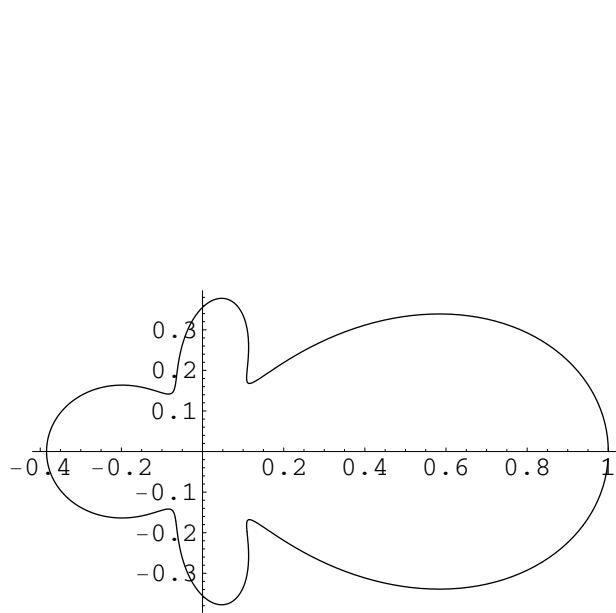
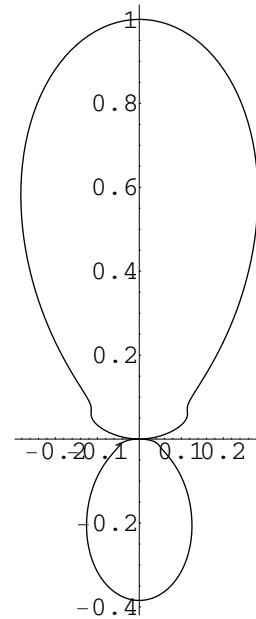
Таблица 2

Сравнение времени выполнения при различных барьерах ϵ

ϵ	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$
0.001	7 сек	16 сек	39 сек	1 мин 35 сек	3 мин 52 сек	6 мин 35 сек
0	7 сек	21 сек	1 мин 13 сек	5 мин 40 сек	18 мин	80 мин

Рис. 3. ДН $k = 6$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ Рис. 4. ДН $k = 6$, $\varphi = 0$

Рис. 5. Ток, $k = 11$ Рис. 6. Пик тока на отрезке $[2;4]$

Рис. 7. ДН, $k = 11$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ Рис. 8. ДН, $k = 11$, $\varphi = 0$

Заключение

Таким образом, для уравнений Фредгольма первого рода специального вида предложен и строго математически обоснован метод вейвлет-Галеркина. Написана программа и проведен численный эксперимент, продемонстрировавший преимущество этого метода перед применяемыми в настоящее время численными методами решения таких задач.

Литература

- [1] Blatov, I.A. On estimates of the inverse matrices elements for the Galerkin method for singular integral equation based on the spline wavelets / I.A. Blatov // Proceedings of the International conference on computational mathematics. Part II. Novosibirsk, 2002. P. 356–361.
- [2] Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. 464 с.
- [3] Блатов, И.А. Об алгебрах операторов с псевдоразрезанными матрицами и их приложениях / И.А. Блатов // Сибирский мат. журнал. 1996. Т. 37. №1. С. 36–59.
- [4] Glinsky, B.M. Composition of wave fields of vibrators and calibration shots of the OMEGA series / B.M. Glinsky, V.V. Kovalevsky, A.S. Alekseev // Third international conference "Monitoring of nuclear tests and their consequences". – Borovoye, 2002. – P. 23–25.

- [5] Бахвалов Н.С. Численные методы / Н.С.Бахвалов, Н.П.Жидков, Г.М.Кобельков. М.: Наука, 1987.
- [6] Писсанецки, С. Технология разреженных матриц / С.Писсанецки. М.: Мир, 1988.

Поступила в редакцию 18/*XI*/2005;
в окончательном варианте — 19/*XII*/2005.

APPLICATION OF SPLINE WAVELET-FUNCTIONS TO NUMERICAL MODELLING OF THIN-WIRE ANTENNAS³

© 2005 A.S.Pimenov⁴

Finding function of distribution of the current and the directional diagram for the system of the slender conductors is reduced to the solution of an integral Fredholm equation of the first type. The Galerkin method on the base of spline wavelets is applied to solve it. The algorithms of the technology of the sparse matrices are researched and the results of the numerical experiments are stated.

The computational difficulties of integral equations solving in the tasks of electrodynamics are caused in many respects by the fullness of the matrices that appear during their discretization. It results in an enormous size of computations (especially in 3-dimensional problems). However, as it is shown in [1], in the basis of wavelet functions [2] the most elements of the SLAE matrix turn out to be very small in absolute value, i.e. it will be pseudosparse [3]. That allows to reduce significantly the amount of computations and the memory requirements and opens the way to the creation of the effective solution algorithms of essential 3-d problems.

In this work the application of the wavelet-Galerkin method to the system of electrically thin conductors is considered.

Paper received 18/*XI*/2005.

Paper accepted 19/*XII*/2005.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. I.A.Blatov

⁴Pimenov Alexander Sergeevich (pimenov_a@mail.ru), Dept. of Applied Mathematics, Samara Marina Nayanova University, Samara, 443001, Russia.