

КВАНТОВАЯ КОЛЛЕКТИВНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ДВУХ ДВУХУРОВНЕВЫХ АТОМОВ С НЕВЫРОЖДЕННЫМИ ДВУХФОТОННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ¹

© 2006 Е.К. Башкиров²

Найдено точное решение коллективной модели двух идентичных двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с двухмодовым квантовым электромагнитным полем в идеальном резонаторе посредством двухфотонных невырожденных переходов. Рассмотрен случай, когда обе моды поля в начальный момент времени находятся в когерентном состоянии, а атомы — в возбужденном состоянии. На основе точного решения исследовано временное поведение атомных вероятностей, среднего числа фотонов в модах, статистики и сжатия поля, линейной атомной энтропии и перепутывания состояний атомов и поля.

Введение

В последние годы большое внимание в квантовой электродинамике уделяется исследованию динамики атомов, взаимодействующих с квантовыми электромагнитными полями в резонаторе посредством двухфотонных переходов (см. ссылки в статье [1]). Такой интерес обусловлен экспериментальной реализацией двухфотонного одноатомного микромазера на ридберговских переходах в микроволновом резонаторе [2]. Важным обобщением модели двухфотонного микромазера является невырожденный двухфотонный двухмодовый мазер, представляющий собой двухуровневый ридберговский атом, взаимодействующий посредством двухфотонных переходов с двумя различными модами квантового электромагнитного поля в высокодобротном резонаторе. Основной особенностью двухфотонного двухмодового мазера является то, что с его помощью мы можем использовать одну моду

¹Представлена доктором физико-математических наук, профессором В.А. Салеевым.

²Башкиров Евгений Константинович (bash@ssu.samara.ru), кафедра общей и теоретической физики Самарского государственного университета, 443011, г. Самара, ул. Академика Павлова, 1

поля для модуляции, усиления и контроля за интенсивностью другой моды. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных исследованию различных аспектов двухмодовой двухфотонной модели. Для указанной модели исследовались динамика средних населенностей атомных уровней и среднего числа фотонов, сжатия в фотонной и атомной подсистемах, статистика фотонного поля и фазовые свойства поля, энтропии поля и степень перепутывания между полем и атомом, спектры испускания, W и Q — функций Вигнера для поля, влияние на динамические свойства модели Штарковского сдвига и фазовой диссипации [3–12]. Однако во всех указанных работах исследовались свойства одноатомной двухфотонной двухмодовой модели. Представляет интерес рассмотреть коллективную динамику системы двухуровневых атомов, взаимодействующих с двумя невырожденными модами квантового электромагнитного поля. В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением простейшей системы, состоящей из двух атомов.

1. Гамильтониан модели

Рассмотрим систему двух двухуровневых атомов, взаимодействующих посредством двухфотонных переходов с двумя невырожденными модами квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе. Гамильтониан рассматриваемой модели в дипольном приближении и приближении вращающейся волны может быть записан в виде

$$H = H_0 + H_{int}, \quad (1)$$

где

$$H_0 = \sum_{f=1}^2 \hbar \omega_0 R_f^z + \sum_{i=1}^2 \hbar \omega_i a_i^+ a_i,$$

— гамильтониан системы двух свободных двухуровневых атомов и свободного двухмодового квантового резонаторного электромагнитного поля,

$$H_{int} = \sum_{f=1}^2 \hbar g (a_1^+ a_2^+ R_f^- + a_1 a_2 R_f^+)$$

— гамильтониан невырожденного двухфотонного взаимодействия между двухуровневыми атомами и двухмодовым полем.

Здесь индекс f нумерует атомы ($f = 1, 2$), а индекс i — моды поля ($i = 1, 2$), a_i^+ и a_i — операторы рождения и уничтожения фотонов резонаторного поля i -й моды, соответственно, R_f^z — оператор полуразности населенностей в f -м атоме, R_f^+ и R_f^- — повышающий и понижающий операторы в f -м двухуровневом атоме, ω_i ($i = 1, 2$) и ω_0 — частоты мод поля и двухуровневого перехода в атомах (см. рис. 1), g — константа двухфотонного взаимодействия между двухуровневым атомом и двухмодовым квантовым электромагнитным полем резонатора. Мы предполагаем также наличие двух-

фотонного резонанса между полем и атомом, т.е. считаем, что выполнено условие $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

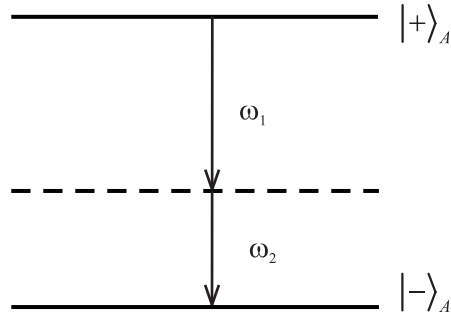


Рис. 1. Схема разрешенных переходов в двухуровневом атоме под действием невырожденного двухмодового поля

Обозначим через $|+\rangle_A$ и $|-\rangle_A$ возбужденное и основное состояние изолированного атома и через $|n\rangle_F$ фоковское состояние для моды поля. Тогда для двухатомного случая возможные двухатомные состояния есть

$$|+, +\rangle_A = |+\rangle_{A_1} \otimes |+\rangle_{A_2},$$

$$|+, -\rangle_A = |+\rangle_{A_1} \otimes |-\rangle_{A_2},$$

$$|-, +\rangle_A = |-\rangle_{A_1} \otimes |+\rangle_{A_2},$$

$$|-, -\rangle_A = |-\rangle_{A_1} \otimes |-\rangle_{A_2}.$$

Фоковские состояния для двухмодового электромагнитного поля, соответственно, имеют вид

$$|n_1, n_2\rangle_F = |n_1\rangle_{F_1} \otimes |n_2\rangle_{F_2}.$$

Если, например, оба атома в начальный момент времени находятся в возбужденном состоянии, а моды поля — в фоковских состояниях с числами фотонов, равными n_1 и n_2 , начальная волновая функция системы может быть записана в виде

$$|\psi(0)\rangle = |+, +\rangle_A |n_1, n_2\rangle_F. \quad (2)$$

Гамильтониан взаимодействия может перевести состояние (2) в состояния:

$$\begin{aligned} &|+, -\rangle_A |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle_F, \\ &|-, +\rangle_A |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle_F, \\ &|-, -\rangle_A |n_1 + 2, n_2 + 2\rangle_F. \end{aligned} \quad (3)$$

Состояния (2), (3) являются собственными для свободного гамильтониана H_0 и соответствуют энергии

$$E_{n_1, n_2} = \hbar\omega_1(n_1 + 1) + \hbar\omega_2(n_2 + 1).$$

Предположим, что обе моды резонатора в начальный момент времени находятся в когерентном состоянии, т.е.

$$|\psi(0)\rangle_F = |\alpha_1, \alpha_2\rangle_F = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} C_{n_1}(\alpha_1) C_{n_2}(\alpha_2) |n_1, n_2\rangle_F.$$

Здесь

$$C_{n_i}(\alpha_i) = \exp(-|\alpha_i|^2/2) \frac{\alpha_i^{n_i}}{\sqrt{n_i!}} \quad (i = 1, 2),$$

где $\alpha_i = |\alpha_i| e^{i\varphi_i}$ и $\bar{n}_i = |\alpha_i|^2$ — среднее начальное число фотонов в моде i резонаторного поля или начальная безразмерная интенсивность резонаторного поля, а φ_i — фаза i -й моды. В дальнейшем мы всегда будем полагать, что $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Атомы в настоящей работе будем считать в начальный момент находящимися в возбужденном состоянии.

2. Решение временного уравнения Шредингера для начального возбужденного состояния атомов

Пусть в начальный момент времени оба атома находятся в возбужденном состоянии:

$$|\psi(0)\rangle_A = |+, +\rangle_A.$$

Тогда для времен $t > 0$ волновую функцию системы можно записать в виде

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp(-iE_{n_1, n_2}t/\hbar) C_{n_1}(\alpha_1) C_{n_2}(\alpha_2) \times \\ \times [A_{+,+}^{n_1, n_2}(t) |+, +\rangle_A |n_1, n_2\rangle_F + A_{-,-}^{n_1, n_2}(t) |-, -\rangle_A |n_1 + 2, n_2 + 2\rangle_F + \\ + A_0^{n_1, n_2}(t) (|+, -\rangle_A |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle_F + |-, +\rangle_A |n_1 + 1, n_2 + 1\rangle_F)]. \end{aligned} \quad (4)$$

Зависящая от времени волновая функция рассматриваемой двухатомной модели $|\psi(t)\rangle$ удовлетворяет временному уравнению Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H |\psi(t)\rangle. \quad (5)$$

Используя формулы (4) и (5), мы можем найти явный вид уравнений движения для коэффициентов $A_{+,+}^{n_1, n_2}(t)$, $A_{-,-}^{n_1, n_2}(t)$ и $A_0^{n_1, n_2}(t)$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial A_{+,+}^{n_1, n_2}(t)}{\partial t} &= 2 \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} g A_0^{n_1, n_2}(t), \\ i \frac{\partial A_{-,-}^{n_1, n_2}(t)}{\partial t} &= 2 \sqrt{(n_1 + 2)(n_2 + 2)} g A_0^{n_1, n_2}(t), \\ i \frac{\partial A_0^{n_1, n_2}(t)}{\partial t} &= \sqrt{(n_1 + 1)(n_2 + 1)} g A_{+,+}^{n_1, n_2}(t) + \sqrt{(n_1 + 2)(n_2 + 2)} g A_{-,-}^{n_1, n_2}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Начальные условия для уравнений (6) запишем в виде:

$$A_{+,+}^{n_1, n_2}(0) = 1, \quad A_{-,-}^{n_1, n_2}(0) = A_0^{n_1, n_2}(0) = 0.$$

Решения уравнений (6) с выбранными начальными условиями есть:

$$\begin{aligned} A_{+,+}^{n_1,n_2}(t) &= 1 - \frac{4g^2(n_1+1)(n_2+1)}{\Omega_{n_1,n_2}^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{n_1,n_2}t}{2}\right), \\ A_{-,-}^{n_1,n_2}(t) &= -\frac{4g^2\sqrt{(n_1+1)(n_1+2)(n_2+1)(n_2+2)}}{\Omega_{n_1,n_2}^2} \sin^2\left(\frac{\Omega_{n_1,n_2}t}{2}\right), \\ A_0^{n_1,n_2}(t) &= -\frac{ig\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}}{\Omega_{n_1,n_2}} \sin(\Omega_{n_1,n_2}t), \end{aligned} \quad (7)$$

где частота Раби двухатомной модели равна:

$$\Omega_{n_1,n_2} = g\sqrt{2[(n_1+1)(n_2+1) + (n_1+2)(n_2+2)]}.$$

Используя решения (7), мы можем найти временные зависимости для наблюдаемых величин рассматриваемой модели. Для сравнения приведем ниже точное решение задачи для одиночного двухуровневого атома, резонансно взаимодействующего посредством невырожденных двухфотонных переходов с двумя модами квантового электромагнитного поля в идеальном резонаторе и находящегося в начальный момент времени в возбужденном состоянии. Временную волновую функцию $|\psi_{single}(t)\rangle$ в этом случае можно записать в виде:

$$\begin{aligned} |\psi_{single}(t)\rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \exp(-iE_{n_1,n_2}^{(single)}t/\hbar) C_{n_1}(\alpha_1) C_{n_2}(\alpha_2) \times \\ &\times [A_+^{n_1,n_2}(t) |+\rangle_A |n_1, n_2\rangle_F + A_-^{n_1,n_2}(t) |-\rangle_A |n_1+1, n_2+1\rangle_F]. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} E_{n_1,n_2}^{(single)} &= \hbar\omega_1(n_1+1/2) + \hbar\omega_2(n_1+1/2), \\ A_+^{n_1,n_2}(t) &= \cos(\Omega_{n_1,n_2}^{(single)}t), \quad A_-^{n_1,n_2}(t) = -i\sin(\Omega_{n_1,n_2}^{(single)}t), \end{aligned}$$

и частота осцилляций Раби одиночного атома есть:

$$\Omega_{n_1,n_2}^{(single)} = g\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}.$$

3. Атомные вероятности

Вероятности обнаружить оба атома в возбужденном состоянии $W_{ee}(t)$ и основном состоянии $W_{gg}(t)$ могут быть представлены через коэффициенты разложения (4) следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{ee}(t) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1,n_2}(t)|^2 = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \left\{ 1 - \frac{4g^2(n_1+1)(n_2+1)}{\Omega_{n_1,n_2}^2} [1 - \cos(\Omega_{n_1,n_2}t)] + \right. \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4g^4(n_1+1)^2(n_2+1)^2}{\Omega_{n_1,n_2}^4} \left[\frac{3}{2} - 2\cos(\Omega_{n_1,n_2}t) + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_{n_1,n_2}t) \right] \Bigg\}, \\
 W_{gg}(t) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,-}^{n_1,n_2}(t)|^2 = \\
 &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \frac{4g^4(n_1+1)(n_2+1)(n_1+2)(n_2+2)^2}{\Omega_{n_1,n_2}^4} \times \\
 & \times \left[\frac{3}{2} - 2\cos(\Omega_{n_1,n_2}t) + \frac{1}{2}\cos(2\Omega_{n_1,n_2}t) \right].
 \end{aligned} \tag{9}$$

Соответственно, вероятность того, что один атом (любой из двух) находится в возбужденном, а другой — в основном :

$$\begin{aligned}
 W_{eg}(t) &= 2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1,n_2}(t)|^2 = \\
 &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \frac{g^2(n_1+1)(n_2+1)}{\Omega_{n_1,n_2}^2} [1 - \cos(2\Omega_{n_1,n_2}t)].
 \end{aligned} \tag{10}$$

Вероятности (8)–(10) испытывают быстрые осцилляции на частотах Ω_{n_1,n_2} и $2\Omega_{n_1,n_2}$. В результате интерференции слагаемых с различными значениями чисел фотонов в модах n_1 и n_2 для вероятностей (8)–(10) должны наблюдаться восстановления и затухания осцилляций Раби, как и для случая обычной однофотонной одномодовой модели Джейнса–Камминса [13]. Поскольку выражения для вероятностей в отличие от стандартной модели Джейнса–Каммингса содержат два типа быстроосциллирующие слагаемых $\cos(2\Omega_{n_1,n_2}t)$, $\cos(\Omega_{n_1,n_2}t)$, то для рассматриваемой модели должны иметь место два типа восстановлений и затуханий осцилляций Раби для атомных вероятностей. Оценим период восстановления осцилляций Раби. Для этого учтем, что в случае достаточно больших начальных интенсивностей мод когерентного поля $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ распределения Пуассона для величин $P_{n_1}(\bar{n}_1)$ и $P_{n_2}(\bar{n}_2)$ имеют резкие максимумы вблизи $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$. Тогда в разложении Тейлора для частоты Раби Ω_{n_1,n_2} в окрестности $(\bar{n}_1, \bar{n}_1)$ мы можем оставить только слагаемые первого порядка по отклонениям $n_1 - \bar{n}_1$, $n_2 - \bar{n}_2$:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{n_1,n_2} &= \Omega_{\bar{n}_1,\bar{n}_2} + \frac{g(2\bar{n}_2+3)}{\sqrt{2[(\bar{n}_1+1)(\bar{n}_2+1) + (\bar{n}_1+2)(\bar{n}_2+2)]}}(n_1 - \bar{n}_1) + \\
 & + \frac{g(2\bar{n}_1+3)}{\sqrt{2[(\bar{n}_1+1)(\bar{n}_2+1) + (\bar{n}_1+2)(\bar{n}_2+2)]}}(n_2 - \bar{n}_2).
 \end{aligned} \tag{11}$$

Следуя работам [13–17], заметим, что для членов в формулах (8)–(10), осциллирующих на частоте Ω_{n_1,n_2} , восстановления будут иметь место на временах T_R , определяемых соотношениями

$$\begin{aligned}
 |\Omega_{\bar{n}_1+1,\bar{n}_2} - \Omega_{\bar{n}_1,\bar{n}_2}| T_R &= 2\pi k, \\
 |\Omega_{\bar{n}_1,\bar{n}_2+1} - \Omega_{\bar{n}_1,\bar{n}_2}| T_R &= 2\pi m,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где $k, m = 0, 1, 2, \dots$. Подставляя в формулы (12) разложение (11), получаем

$$\frac{g(2\bar{n}_2 + 3)}{\sqrt{2[(\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1) + (\bar{n}_1 + 2)(\bar{n}_2 + 2)]}} T_R = 2\pi k, \quad (13)$$

$$\frac{g(2\bar{n}_1 + 3)}{\sqrt{2[(\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1) + (\bar{n}_1 + 2)(\bar{n}_2 + 2)]}} T_R = 2\pi k, \quad (14).$$

Перемножая полученные уравнения (13) и (14) почленно, имеем:

$$\frac{(gT_R)^2(2\bar{n}_1 + 3)(2\bar{n}_2 + 3)}{2[(\bar{n}_1 + 1)(\bar{n}_2 + 1) + (\bar{n}_1 + 2)(\bar{n}_2 + 2)]} = 4\pi^2 l, \quad (15)$$

где $l = km = 0, 1, 2, \dots$.

Для больших начальных интенсивностей когерентных резонаторных мод поля ($\bar{n}_1, \bar{n}_2 \gg 1$) формула (15) примет вид:

$$(gT_R)^2 = 4\pi^2 l,$$

или

$$gT_R = 2\pi \sqrt{l} \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Уравнение (16) предсказывает восстановления осцилляций Раби на временах: $2\pi, 8.9, 10.9, 14.1$ и т.д. Основные восстановления имеют место на временах: $(gT_R) = 2\pi, 4\pi$ и т.д., а вторичные — на временах: $8.9, 10.9$ и т.д. Дополнительные восстановления связаны с наличием в выражениях для вероятностей слагаемых, осциллирующих с удвоенной частотой $2\Omega_{n_1, n_2}$. Для дополнительных восстановлений, действуя аналогично предыдущему случаю, можно получить следующее уравнение для времен восстановлений

$$g\tilde{T}_R = \pi \sqrt{l} \quad (l = 0, 1, 2, \dots). \quad (17)$$

Таким образом, дополнительные восстановления должны возникать на временах: $\pi, 4.4, 5.5$ и т.д. Заметим, что структура затуханий и восстановлений для рассматриваемой модели полностью идентична соответствующей структуре для двухатомной модели с двухфотонным невырожденным рамановским взаимодействием, полученной ранее в работе [17].

На рис. 2 и 3 представлена временная зависимость вероятностей W_{ee} и W_{eg} для моделей с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 5, 30$ и 100 , соответственно. Из рисунков хорошо видно, что численные расчеты подтверждают аналитические оценки для структуры восстановлений указанной модели. Единственная особенность состоит в том, что не все дополнительные восстановления, предсказываемые аналитической формулой, в действительности существуют, но все существующие дополнительные восстановления описываются аналитической формулой (17). При увеличении начальных интенсивностей когерентных мод $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ вторичные и дополнительные восстановления исчезают для вероятностей W_{ee} и W_{eg} и остаются только основные восстановления.

Интересно сравнить полученные результаты для поведения атомных вероятностей с соответствующими результатами для вероятностей одиночного атома, взаимодействующего посредством невырожденных двухфотонных

переходов с двумя модами квантового электромагнитного поля. Для одиночного атома вероятности обнаружить его в возбужденном и основном состоянии есть

$$W_e(t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_+^{n_1, n_2}(t)|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) [1 + \cos(2\Omega_{n_1, n_2}^{single} t)],$$

$$W_g(t) = 1 - W_e(t).$$

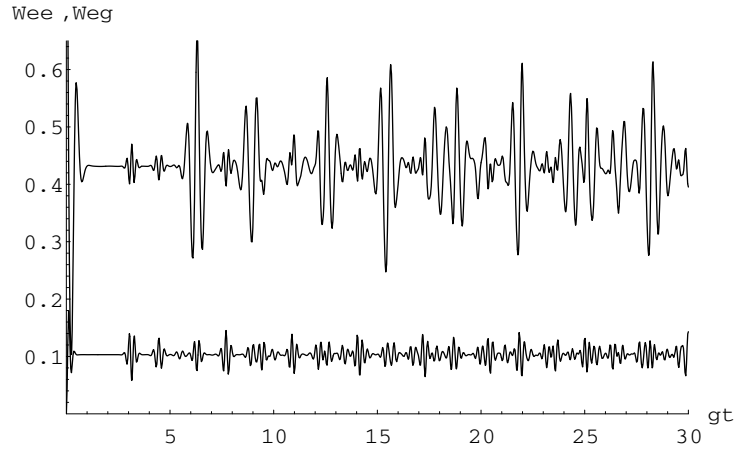


Рис. 2. Временная зависимость вероятностей W_{ee} (верхний график) и W_{eg} (нижний график) для модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 5$

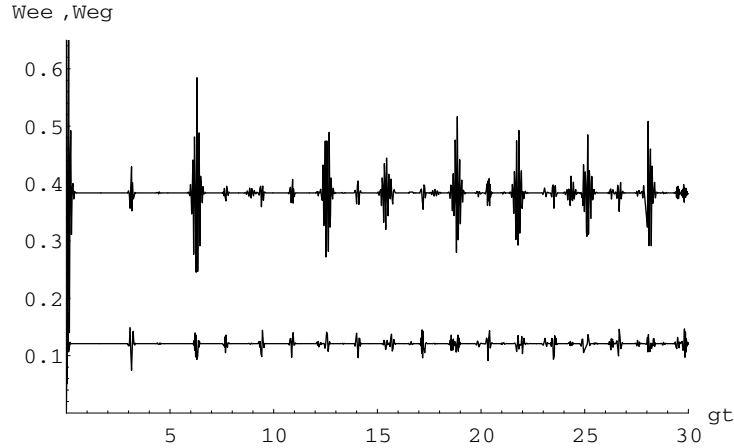


Рис. 3. Временная зависимость вероятностей W_{ee} (верхний график) и W_{eg} (нижний график) для модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 30$

Для одиночного атома осцилляции населенностей происходят на единственной частоте $2\Omega_{n_1, n_2}^{single}$. Поэтому в рассматриваемом случае мы получаем всего одно условие для времен восстановления осцилляций Раби:

$$(gT_R^{(single)}) = 2\pi\sqrt{l}, \quad (l = 1, 2, \dots).$$

В этом случае восстановления осцилляций Раби должны иметь место на временах $gT_R^{(single)} = 2\pi, 8.9, 10.9, 4\pi, \dots$, что подтверждается численными расчетами. На рис. 4 показано временное поведение вероятности обнаружить одиночный атом на верхнем уровне для модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 30$.

Таким образом, взаимодействие атомов в резонаторе через общее резонаторное поле приводит к заметному усложнению структуры затуханий и восстановлений Раби для вероятностей атомных состояний.

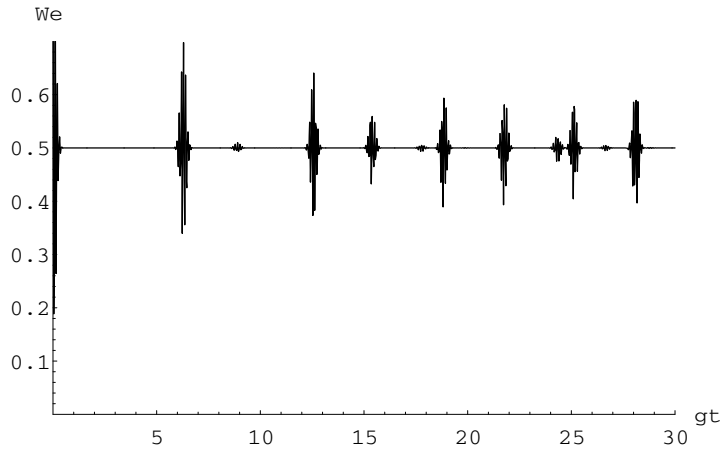


Рис. 4. Временная зависимость вероятностей W_e для одиночного атома в случае $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 30$

4. Среднее число фотонов в модах

Средние числа фотонов в модах легко могут быть вычислены с использованием формул (4) и (7):

$$\begin{aligned} \langle N_1(t) \rangle = \langle a_1^\dagger(t) a_1(t) \rangle = & \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_1 P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1, n_2}(t)|^2 + \\ & + \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + 2) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,-}^{n_1, n_2}(t)|^2 + \\ & + 2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + 1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1, n_2}(t)|^2, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\langle N_2(t) \rangle = \langle a_2^\dagger(t) a_2(t) \rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1, n_2}(t)|^2 + \\
&+ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2 + 2) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,+}^{n_1, n_2}(t)|^2 + \\
&+ 2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2 + 1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1, n_2}(t)|^2.
\end{aligned} \tag{19}$$

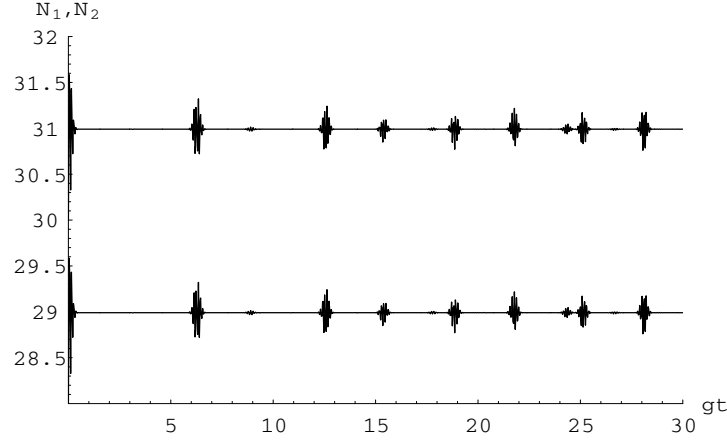


Рис. 5. Временная зависимость среднего числа фотонов N_1 (верхний график) и N_2 (нижний график) для модели с $\bar{n}_1 = 30, \bar{n}_2 = 28$

На рис. 5 показана временная зависимость средних чисел фотонов в модах $N_1(t)$ и $N_2(t)$ для модели с начальными безразмерными интенсивностями $\bar{n}_1 = 30, \bar{n}_2 = 28$. Структура затуханий и восстановлений осцилляций Раби похожа на соответствующую структуру для атомных вероятностей, так как временное поведение средних чисел фотонов определяется теми же гармоническими функциями времени с частотами Ω_{n_1, n_2} и $2\Omega_{n_1, n_2}$. Однако для среднего числа фотонов реализуются не все из восстановлений, описываемых формулами (16) и (17).

5. Статистика поля

Для того чтобы исследовать статистические свойства мод поля, необходимо вычислить корреляционную функцию второго порядка:

$$G_{ij}^{(2)}(t) = \frac{\langle a_i^\dagger(t) a_j^\dagger(t) a_j(t) a_i(t) \rangle}{\langle a_i^\dagger(t) a_i(t) \rangle \langle a_j^\dagger(t) a_j(t) \rangle}, \quad i, j = 1, 2. \tag{20}$$

Корреляционные функции $G_{11}^{(2)}(t)$ и $G_{22}^{(2)}(t)$ описывают степень когерентности второго порядка в модах 1 и 2, соответственно, а корреляционная функция $G_{12}^{(2)}(t)$ описывает степень межмодовой корреляции.

Начнем исследование статистических свойств поля с рассмотрения степени когерентности второго порядка в модах. В этом случае корреляционные функции второго порядка удобно переписать в виде:

$$G_{ii}^{(2)}(t) = 1 + \frac{\langle : (\Delta N_i(t))^2 : \rangle}{\langle N_i(t) \rangle^2}, \quad i = 1, 2,$$

где $\langle N_i \rangle = \langle a_i^\dagger(t) a_i(t) \rangle$ - среднее число фотонов в моде i , а

$$\langle : (\Delta N_i(t))^2 : \rangle = \langle a_i^\dagger(t) a_i^\dagger(t) a_i(t) a_i(t) \rangle - \langle N_i(t) \rangle^2 \quad (21)$$

— нормальноупорядоченная неопределенность числа фотонов в моде i . Поле моды i обладает субпуассоновской статистикой и, соответственно, имеет место эффект антигруппировки фотонов (состояние моды не имеет классического аналога), если $G_{ii}^{(2)}(t) < 1$ или $\langle : (\Delta N_i(t))^2 : \rangle < 0$. Численные расчеты удобнее проводить для величин $\langle : (\Delta N_i(t))^2 : \rangle$. Средние числа фотонов, входящие в нормальноупорядоченные неопределенности чисел фотонов (21), определяются формулами (18) и (19). Для величин $\langle a_i^\dagger(t) a_i^\dagger(t) a_i(t) a_i(t) \rangle$ ($i = 1, 2$) из формул (4) и (7) имеем:

$$\begin{aligned} \langle a_1^\dagger(t) a_1^\dagger(t) a_1(t) a_1(t) \rangle &= \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_1(n_1-1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1,n_2}(t)|^2 + \\ &+ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1+2)(n_1+1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,-}^{n_1,n_2}(t)|^2 + \\ &+ 2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1+1) n_1 P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1,n_2}(t)|^2, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \langle a_2^\dagger(t) a_2^\dagger(t) a_2(t) a_2(t) \rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} n_2(n_2-1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1,n_2}(t)|^2 + \\ &+ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2+2)(n_2+1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,-}^{n_1,n_2}(t)|^2 + \\ &+ 2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2+1) n_2 P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1,n_2}(t)|^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Подставляя формулы (18), (19), (22) и (23) в выражения (21), мы найдем временные зависимости нормальноупорядоченных неопределенностей чисел фотонов в модах 1 и 2 и сможем определить тип статистики мод резонаторного поля. На рис. 6 показана временная зависимость величины $\langle : (\Delta N_1(t))^2 : \rangle$ (величина $\langle : (\Delta N_2(t))^2 : \rangle$ ведет себя аналогичным образом) для модели с когерентными начальными модами резонаторного поля с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$. Неопределенность числа фотонов положительна только на малых временных интервалах. Это означает, что большую часть времени резонаторное поле находится в неклассическом состоянии с субпуассоновской статистикой (в эти моменты времени мы можем говорить об антигруппировке

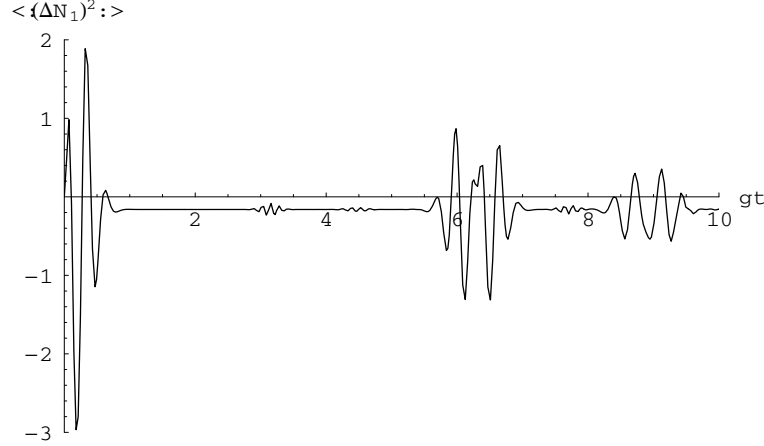


Рис. 6. Временная зависимость величины $\langle (\Delta N_1(t))^2 \rangle$ для модели с $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 10$

фотонов). При этом поведение статистики поля слабо зависит от величины начальных интенсивностей.

Интересно сравнить статистику поля излучающей системы двух атомов и одиночного атома. На рис. 7 показано временное поведение нормально упорядоченной неопределенности числа фотонов в моде 1 для одиночного атома и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 30$. В целом поведение $\langle (\Delta N_1(t))^2 \rangle$ и $\langle (\Delta N_1^{single}(t))^2 \rangle$ похоже. Однако минимумы указанной величины для коллективной модели по модулю больше, нежели для одиночного атома. Это означает более высокую степень антигруппировки фотонов в эти моменты времени.

На рис. 8 показана временная зависимость величин $\langle (\Delta N_1(t))^2 \rangle$ и $\langle (\Delta N_2(t))^2 \rangle$ для случая, когда одна из мод находится в вакуумном состоянии: $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 0$. В этом случае статистика резонаторных мод носит другой характер. Большую часть времени статистика первой моды носит суперпуассоновский, а второй моды — пуассоновский характер, и только для небольших интервалов времени статистика поля является в обеих модах субпуассоновской.

Для того, чтобы исследовать степень межмодовой корреляции рассмотрим полевую корреляционную функцию второго порядка:

$$G_{12}^{(2)}(t) = \frac{\langle a_1^+(t)a_2^+(t)a_2(t)a_1(t) \rangle}{\langle a_1^+(t)a_1(t) \rangle \langle a_2^+(t)a_2(t) \rangle} = 1 + \frac{C(t)}{\langle a_1^+(t)a_1(t) \rangle \langle a_2^+(t)a_2(t) \rangle}.$$

Для численных расчетов удобнее вместо $G_{12}^{(2)}(t)$ использовать кросс-корреляционную функцию $C(t)$, равную:

$$C(t) = \langle a_1^+(t)a_2^+(t)a_2(t)a_1(t) \rangle - \langle a_1^+(t)a_1(t) \rangle \langle a_2^+(t)a_2(t) \rangle.$$

Для случая $C(t) = 0$ моды поля полностью независимы или нескоррелированы, для $C(t) > 0$ моды поля скоррелированы, и, наконец, для $C(t) < 0$ —

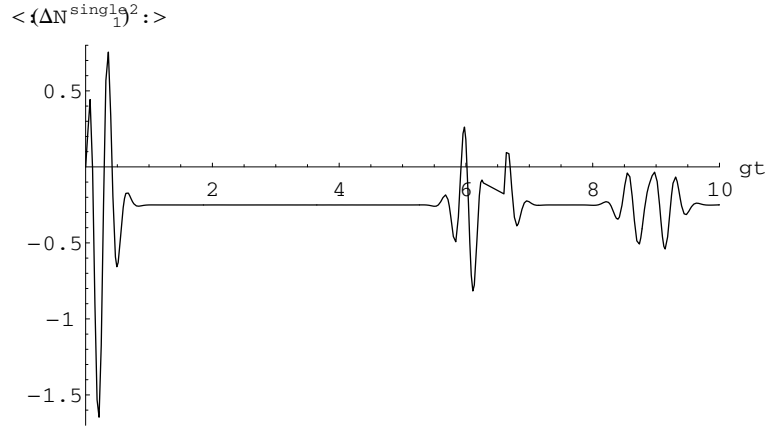


Рис. 7. Временная зависимость величины $\langle (\Delta N_1^{single}(t))^2 \rangle$ для модели с $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 10$

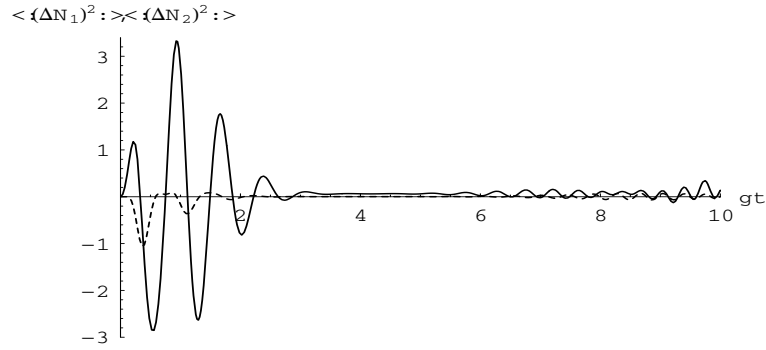


Рис. 8. Временная зависимость величины $\langle (\Delta N_1(t))^2 \rangle$ (сплошная линия) и $\langle (\Delta N_2(t))^2 \rangle$ (точечная линия) для модели с $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 0$

антикоррелированы. Вычисляя среднее $\langle a_1^+(t)a_2^+(t)a_2(t)a_1(t) \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle a_1^+(t)a_2^+(t)a_2(t)a_1(t) \rangle &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_1 n_2 P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1, n_2}(t)|^2 + \\
 &+ \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + 2)(n_2 + 2) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,-}^{n_1, n_2}(t)|^2 + \\
 &+ 2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + 1)(n_2 + 1) P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1, n_2}(t)|^2
 \end{aligned} \tag{24}$$

и используя формулы (18) и (19), мы можем найти кросс-корреляционную функцию $C(t)$ для двухатомной модели. Результаты численных расчетов кросс-корреляционной функции представлены на рис. 9 и 10 для моделей

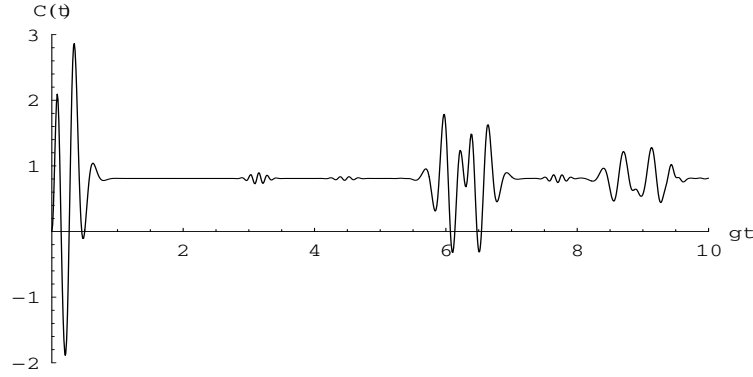


Рис. 9. Временная зависимость кросс-корреляционной функции $C(t)$ для модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$

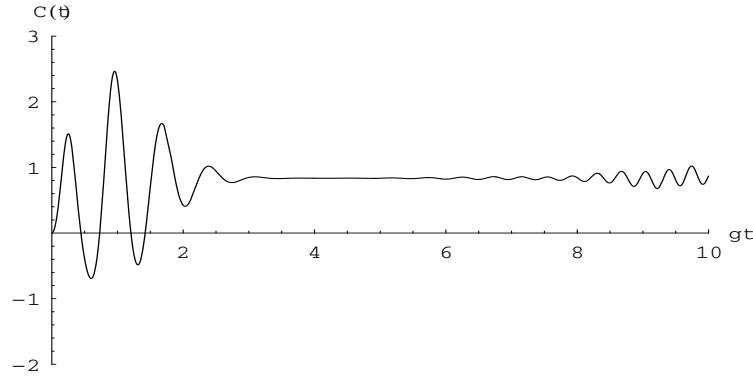


Рис. 10. Временная зависимость кросс-корреляционной функции $C(t)$ для модели с $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 0$

с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$ и $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 0$. Поведение кросс-корреляционной функции демонстрирует ту же структуру затуханий и восстановлений, что и атомные вероятности. В рассматриваемой модели фотоны испускаются и поглощаются парами, что должно приводить к сильной корреляции фотонов. Такое предположение подтверждается численными расчетами. Хорошо видно из рис. 9 и 10, что кросс-корреляционная функция, за исключением малых интервалов времени, положительна, что и означает наличие корреляции между фотонами разных мод. Заметим, что поведение кросс-корреляционной функции в рассматриваемой модели принципиально отличается от поведения соответствующей величины в одно и двухатомной моделях с рамановским взаимодействием (в отличие от схожего для рассматриваемой модели и моделей с рамановским взаимодействием поведения атомных вероятностей, среднего числа фотонов и других динамических величин) [16], [17]. В моделях с рамановским взаимодействием атома с полем сопровождается поглощением фотона одной моды и испусканием фотона другой моды,

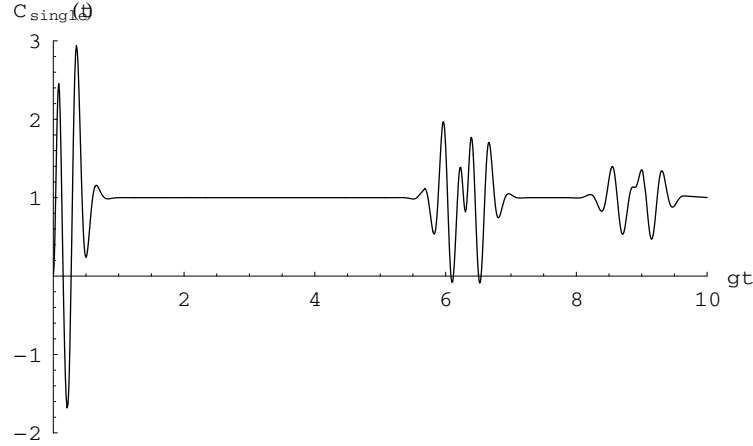


Рис. 11. Временная зависимость кросс-корреляционной функции одиночного атома $C_{single}(t)$ для модели с $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 10$

что приводит к сильной антикорреляции фотонов двух мод. Соответственно, кросс-корреляционная функция для моделей с таким взаимодействием почти всегда отрицательна. Для сравнения на рис. 11 представлена временная зависимость кросс-корреляционной функции мод поля для одиночного атома в случае $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$. Поведение кросс-корреляционной функции для двухатомной системы отличается от поведения соответствующей величины для одиночного атома лишь наличием слабых дополнительных восстановлений. Это еще раз подтверждает вывод предыдущего абзаца о том, что межмодовое взаимодействие определяется в основном характером атом-полевого взаимодействия, а не особенностями строения атомной подсистемы.

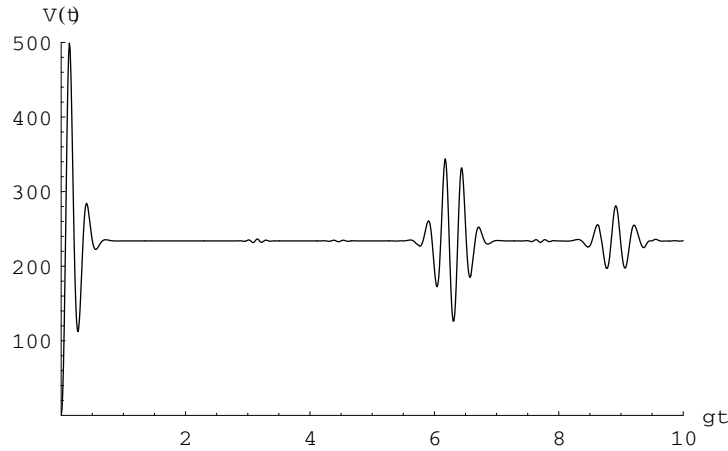


Рис. 12. Временная зависимость функции $V(t)$ для модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$

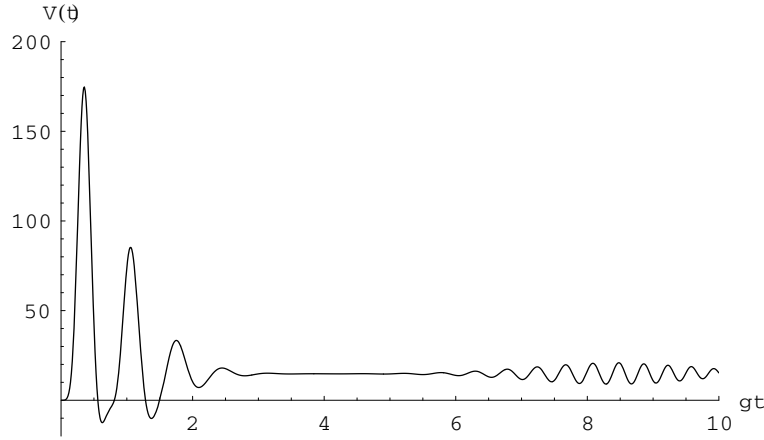


Рис. 13. Временная зависимость функции $V(t)$ для модели с $\bar{n}_1 = 10$, $\bar{n}_2 = 0$

Наконец, рассмотрим для рассматриваемой системы неравенство Коши–Шварца. Для этого введем величину

$$V(t) = \langle a_1^+(t)a_2^+(t)a_2(t)a_1(t) \rangle^2 - \langle a_1^{+2}(t)a_1^2(t) \rangle \langle a_2^{+2}(t)a_2^2(t) \rangle.$$

Используя формулы (22)–(24), мы легко можем вычислить величину $V(t)$. Для отрицательных значений $V(t) < 0$ имеет место нарушение неравенства Коши–Шварца, что свидетельствует о нахождении системы в неклассическом состоянии и наличии неклассических корреляций между модами поля. На рис. 12 и 13 показано временное поведение величины $V(t)$ для моделей с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 10$ и $\bar{n}_1 = 10, \bar{n}_2 = 0$. Для начальных когерентных мод резонатора величина $V(t)$ в любой момент времени положительна, что свидетельствует об отсутствии нарушения неравенства Коши–Шварца и, соответственно, об отсутствии квантовых корреляций между модами. Для случая, когда одна мода находится в когерентном, а другая в вакуумном состоянии, величина $V(t) > 0$ для всех времен, за исключением небольших интервалов в начале эволюции. Нарушение неравенства Коши–Шварца в этом случае, естественно, связано с квантовой природой начального вакуумного состояния одной из резонаторных мод. Отметим также принципиальную разницу в поведении величины $V(t)$ для рассматриваемой модели и модели с рамановским взаимодействием. В последней модели величина $V(t)$ почти для всех времен отрицательна, что свидетельствует о наличии квантовой корреляции состояний фотонов.

6. Эволюция линейной атомной энтропии и перепутывание состояний атомов

Взаимодействие атомов с квантовым электромагнитным полем приводит к перепутыванию этих двух подсистем, так что общий волновой вектор не

может быть представлен точно в виде произведения зависящих от времени волновых векторов атома и поля. Наличие максимальной корреляции между подсистемами в перепутанном состоянии приводит к тому, что измерение одной подсистемы приводит сразу же к четко определенному квантовому состоянию второй подсистемы. Квантовое перепутывание состояний привлекает особое внимание в последние годы в связи с его возможным широким применением в квантовой связи и квантовой защите информации, информационных процессах и квантовых вычислениях [18]. Количественная мера перепутывания состояний хорошо определена для систем, состоящих из двух взаимодействующих частей, например атомов и поля. В этом случае мерой перепутывания может служить энтропия, вычисляемая для редуцированных атомной $\rho_A = \text{Tr}_F \rho$ или полевой матриц плотности $\rho_F = \text{Tr}_A \rho$ (ρ — матрица плотности полной системы) по обычным формулам неравновесной статистической механики [19, 20]:

$$S_A = -\text{Tr} \rho_A \ln \rho_A, \quad S_F = -\text{Tr} \rho_F \ln \rho_F.$$

Согласно теореме Араки и Либа [3], для начального чистого состояния полной системы обе энтропии равны друг другу во все последующие моменты времени, т.е. $\rho_A(t) = \rho_F(t)$ [19]. Однако для двухатомной двухмодовой модели вычисление атомной или полевой энтропии возможно только численно ввиду громоздкости получаемых выражений. Альтернативной мерой перепутывания может служить так называемая линейная атомная энтропия [21, 22]:

$$S_A(t) = 1 - \text{Tr} \rho_A(t)^2. \quad (25)$$

Динамика линейной атомной энтропии рассматривалась ранее для одноатомной однофотонной, одноатомной двухфотонной и двухатомной моделей Джейнса–Каммингса с идентичными и неидентичными атомами [23–28]. Значение линейной энтропии для одноатомной модели меняется в пределах $0 \leq S \leq 1/2$, при этом значение $S = 0$ соответствует чистому состоянию системы, а $S > 0$ — перепутанным состояниям атома и поля. Для $S = 1/2$ имеет место максимальное перепутывание состояния атома и поля. Для двухатомной модели $0 \leq S \leq 3/4$ и максимально перепутанному состоянию соответствует случай $S = 3/4$.

Используя формулы (4), (7), (25), мы можем найти выражение для линейной атомной энтропии двухатомной модели:

$$\begin{aligned} S(t) = & \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+,+}^{n_1, n_2}(t)|^2 \right]^2 + \\ & + \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-,-}^{n_1, n_2}(t)|^2 \right]^2 + \\ & + 2\bar{n}_1^2 \bar{n}_2^2 \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2)}{\sqrt{(n_1+1)(n_1+2)(n_2+1)(n_2+2)}} |A_{+,+}^{n_1+2, n_2+2}(t) A_{-,-}^{n_1, n_2}(t)|^2 \right]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4\bar{n}_1\bar{n}_2 \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{P_{n_1}(\bar{n}_1)P_{n_2}(\bar{n}_2)}{\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}} |A_{+,+}^{n_1+1,n_2+1}(t)A_0^{n_1,n_2}(t)|^2 \right]^2 + \\
& +4\bar{n}_1\bar{n}_2 \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{P_{n_1}(\bar{n}_1)P_{n_2}(\bar{n}_2)}{\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}} |A_0^{n_1+1,n_2+1}(t)A_0^{n_1,n_2}(t)|^2 \right]^2 + \\
& +4 \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1)P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_0^{n_1,n_2}(t)|^2 \right]^2.
\end{aligned}$$

На рис. 14 показана временная зависимость линейной энтропии двухатомной невырожденной двухфотонной модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$.

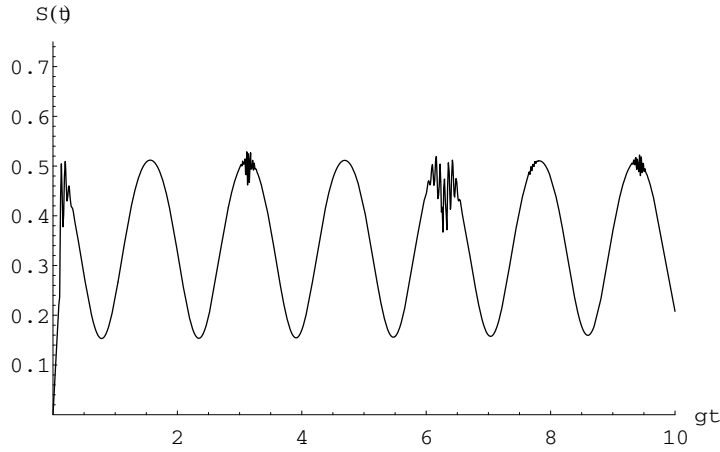


Рис. 14. Временная зависимость линейной атомной энтропии $S(t)$ для двухатомной невырожденной двухфотонной модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$

Для сравнения приведем выражение для линейной энтропии одноатомной невырожденной двухфотонной модели:

$$\begin{aligned}
S(t) = & \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1)P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{+}^{n_1,n_2}(t)|^2 \right]^2 + \\
& + \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1)P_{n_2}(\bar{n}_2) |A_{-}^{n_1,n_2}(t)|^2 \right]^2 + \\
& + 2\bar{n}_1^2\bar{n}_2^2 \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{P_{n_1}(\bar{n}_1)P_{n_2}(\bar{n}_2)}{\sqrt{(n_1+1)(n_2+1)}} |A_{+}^{n_1+1,n_2+1}(t)A_{-}^{n_1,n_2}(t)|^2 \right]^2.
\end{aligned} \tag{26}$$

На рис. 15 и 16 показано временное поведение линейной энтропии для одноатомных двухфотонных невырожденной (расчет на основе формулы (26)) и вырожденной модели (на основе формул, представленных в работе [24]). Из рис. 14–16 видно, что для одноатомных моделей имеет место как восстановление чистого состояния системы, так и максимальное перепутывание

состояния атома и поля. Для двухатомного случая, кроме начального момента времени, когда система находится в чистом состоянии, в остальные моменты времени модель находится в перепутанном состоянии, причем максимально перепутанные состояния атомов и поля ($S = 0.75$) не достигаются.

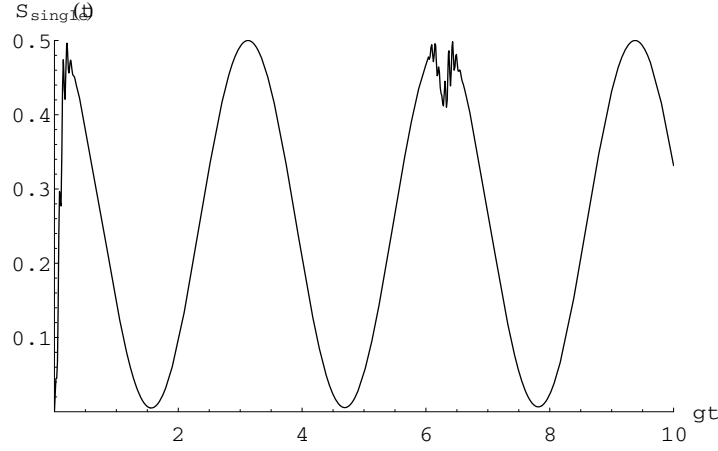


Рис. 15. Временная зависимость линейной атомной энтропии $S_{single}(t)$ для одноатомной невырожденной двухфотонной модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$

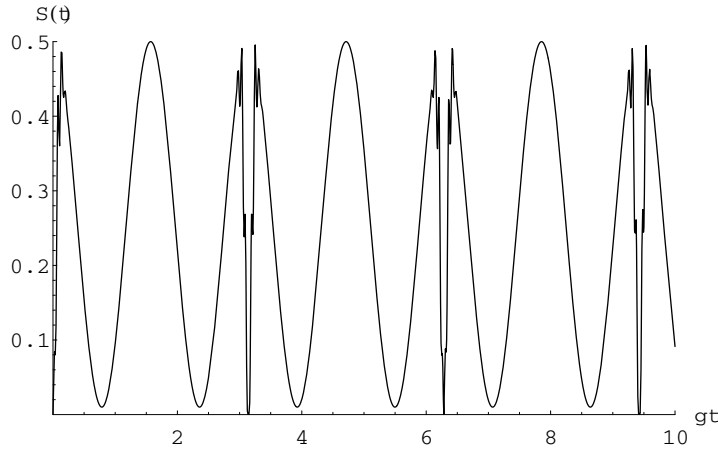


Рис. 16. Временная зависимость линейной атомной энтропии $S(t)$ для одноатомной вырожденной двухфотонной модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 50$

7. Сжатие света

Исследование сжатого света привлекает повышенное внимание в связи с его широким возможным применением для высокоточных оптических

измерений, оптической связи, квантовых вычислений, детектирования гравитационных волн и др. [29]. Возможность сжатия света второго порядка в моделях типа Джейнса–Каммингса анализировалась многими авторами, начиная с работы Мейстре и Зубайри [30] (многочисленные ссылки на последующие работы можно найти в обзоре Шора и Найта [31]). Для одноатомной невырожденной модели сжатие поля рассматривалось впервые в работе [3].

Для того чтобы исследовать сжатие второго порядка, введем медленно меняющиеся квадратурные компоненты для каждой из двух мод поля: $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}$ ($i = 1, 2$) (индекс i нумерует моды резонаторного поля):

$$X_1^{(i)} = \frac{1}{2}(a_i e^{i\omega_i t} + a_i^+ e^{-i\omega_i t}),$$

$$X_2^{(i)} = \frac{1}{2i}(a_i e^{i\omega_i t} - a_i^+ e^{-i\omega_i t}).$$

Операторы квадратурных компонент удовлетворяют коммутационному соотношению вида:

$$[X_1^{(i)}, X_2^{(i)}] = i/2.$$

Соответственно, соотношение неопределенностей для неопределенностей (дисперсий) квадратурных компонент может быть записано как

$$(\Delta X_1^{(i)})^2 (\Delta X_2^{(i)})^2 \geq 1/16,$$

где дисперсии квадратурных компонент определяются стандартным образом: $(\Delta X_i)^2 = \langle X_i^2 \rangle - \langle X_i \rangle^2$ ($i = 1, 2$). Сжатие второго порядка для квадратурных компонент электромагнитного поля имеет место, если для одной из неопределенностей ($j = 1$ или 2) выполняется неравенство

$$(\Delta X_j^{(i)})^2 < 1/4 \quad (i = 1 \text{ или } 2).$$

Условие сжатия для квадратурных компонент удобнее записать в виде: $S_j^{(i)} < 0$, где параметр сжатия для j -й квадратурной компоненты есть:

$$S_j^{(i)} = \frac{(\Delta X_j^{(i)})^2 - 1/4}{1/4} = 4(\Delta X_j^{(i)})^2 - 1 \quad (i, j = 1, 2).$$

Значение параметра $S_j^{(i)} = -1$ соответствует 100% сжатию в j -й квадратурной компоненте для i -й моды поля.

В терминах фотонных операторов рождения и уничтожения мы можем переписать выражения для параметров сжатия в виде:

$$S_1^{(i)} = 2\langle a_i^+ a_i \rangle + 2\text{Re}\langle a_i^2 e^{2i\omega_i t} \rangle - 4(\text{Re}\langle a_i e^{i\omega_i t} \rangle)^2,$$

$$S_2^{(i)} = 2\langle a_i^+ a_i \rangle - 2\text{Re}\langle a_i^2 e^{2i\omega_i t} \rangle - 4(\text{Im}\langle a_i e^{i\omega_i t} \rangle)^2. \quad (26)$$

С помощью формул (4), (7) мы можем вычислить величины $a_i(t)$ и $a_i^2(t)$:

$$e^{i\omega_i t} \langle a_1 \rangle = \alpha_1 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \left[(A_{+,+}^{n_1, n_2})^*(t) A_{+,+}^{n_1+1, n_2}(t) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\frac{n_1+3}{n_1+1}} (A_{-,-}^{n_1,n_2})^*(t) A_{-,-}^{n_1+1,n_2}(t) + 2 \sqrt{\frac{n_1+2}{n_1+1}} (A_0^{n_1,n_2})^*(t) A_0^{n_1+1,n_2}(t) \Big] = \alpha_1 A_1^{(1)}, \\
& e^{i\omega_2 t} \langle a_2 \rangle = \alpha_2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \Big[(A_{+,+}^{n_1,n_2})^*(t) A_{+,+}^{n_1,n_2+1}(t) + \\
& + \sqrt{\frac{n_2+3}{n_2+1}} (A_{-,-}^{n_1,n_2})^*(t) A_{-,-}^{n_1,n_2+1}(t) + 2 \sqrt{\frac{n_2+2}{n_2+1}} (A_0^{n_1,n_2})^*(t) A_0^{n_1,n_2+1}(t) \Big] = \alpha_2 A_1^{(2)}, \\
& e^{i2\omega_1 t} \langle a_1^2 \rangle = \alpha_1 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \Big[(A_{+,+}^{n_1,n_2})^*(t) A_{+,+}^{n_1+2,n_2}(t) + \\
& + \sqrt{\frac{(n_1+4)(n_1+3)}{(n_1+2)(n_1+1)}} (A_{-,-}^{n_1,n_2})^*(t) A_{-,-}^{n_1+2,n_2}(t) + \\
& + 2 \sqrt{\frac{n_1+3}{n_1+1}} (A_0^{n_1,n_2})^*(t) A_0^{n_1+2,n_2}(t) \Big] = \alpha_1^2 A_2^{(1)}, \\
& e^{i2\omega_2 t} \langle a_2^2 \rangle = \alpha_2 \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} P_{n_1}(\bar{n}_1) P_{n_2}(\bar{n}_2) \Big[(A_{+,+}^{n_1,n_2})^*(t) A_{+,+}^{n_1,n_2+2}(t) + \\
& + \sqrt{\frac{(n_2+4)(n_2+3)}{(n_2+2)(n_2+1)}} (A_{-,-}^{n_1,n_2})^*(t) A_{-,-}^{n_1,n_2+2}(t) + \\
& + 2 \sqrt{\frac{n_2+3}{n_2+1}} (A_0^{n_1,n_2})^*(t) A_0^{n_1,n_2+2}(t) \Big] = \alpha_2^2 A_2^{(2)},
\end{aligned}$$

Введем также для средних чисел фотонов в модах, определяемых выражениями (18) и (19), обозначения $\langle a_i^\dagger a_i \rangle = A_0^{(i)}$, ($i = 1, 2$). Тогда для параметров сжатия второго порядка $S_1^{(i)}$ и $S_2^{(i)}$ с учетом соотношений $\alpha_i = \bar{n}_i$ мы можем записать:

$$S_1^{(i)} = 2A_0^{(i)} + 2\bar{n}_i A_2^{(i)} - 4\bar{n}_i (A_1^{(i)})^2, \quad (28)$$

$$S_2^{(i)} = 2A_0^{(i)} - 2\bar{n}_i A_2^{(i)}. \quad (29)$$

Численные расчеты факторов сжатия по формулам (28), (29) показывают, что для любых значений начальных безразмерных интенсивностей фотонных резонаторных мод $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$ сжатие во второй квадратурной компоненте отсутствует. В первой квадратурной компоненте сжатие возможно только в начале процесса эволюции и для достаточно больших начальных интенсивностей когерентных мод ($\bar{n}_1, \bar{n}_2 \geq 3.2$). На рис. 17 показано поведение фактора сжатия в первой квадратурной компоненте первой моды поля для различных одинаковых начальных интенсивностей фотонных мод для малых безразмерных времен gt . Максимальная степень сжатия для одинаковых начальных интенсивностей мод достигается при $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 \simeq 10$ и составляет примерно 20%. Заметим, что максимальная степень сжатия поля

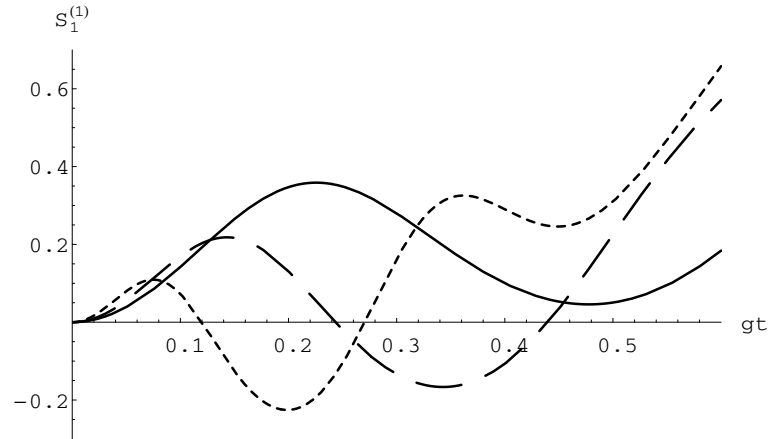


Рис. 17. Временная зависимость параметра сжатия $S_1^{(1)}$ в первой квадратурной компоненте первой моды для модели с $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 3$ (сплошная линия), 5 (штриховая линия), 10 (точечная линия)

в двухатомной модели оказывается меньше, нежели в одноатомной с теми же значениями начальных безразмерных интенсивностей резонаторных мод. В последнем случае максимальное сжатие достигает 40 % [3].

Заключение

Таким образом, в настоящей работе на основе точного решения временного уравнения Шредингера дан анализ квантовой динамики модели двух идентичных двухуровневых атомов, резонансно взаимодействующих с двухмодовым квантовым электромагнитным полем в идеальном резонаторе посредством двухфотонных невырожденных переходов. Сравнение полученных результатов с соответствующими результатами для одноатомной модели [3] позволило выделить нам коллективные особенности поведения рассматриваемой модели, обусловленные взаимодействием атомов через общее поле излучения. При этом мы ограничились рассмотрением только когерентного начального состояния мод поля и возбужденного состояния атомов. Анализ модели для других начальных состояний полей (сжатого, коррелированного, теплового и др.) и атомной подсистемы будет являться предметом последующих работ.

Автор благодарит профессора В.Л. Дербова за консультации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 04-02-16932а.

Литература

- [1] Башкиров, Е.К. Временная эволюция двухуровневого атома с многофотонными переходами в неидеальном резонаторе с расстройкой / Е.К. Башкиров, М.С. Русакова // Вестник Самарского гос. университета. Естественная серия. 2005. №2 (36). С. 156–167.
- [2] Realization of a two-photon maser oscillator / M. Brune [et al.] // Phys. Rev. Lett. 1987. V. 59. №17. P. 1899–1902.
- [3] Gou, S.S. Quantum behaviour of a two-level atom interacting with two modes of light in a cavity / S.S. Gou // Phys. Rev. 1989. V. A40. No. 9. P. 5116–5128.
- [4] Ashraf, M.M. Atomic-dipole squeezing and emission spectra of the nondegenerate two-photon Jaynes-Cummings model / M.M. Ashraf, M.S.K. Razmi // Phys. Rev. 1992. V. A45. No. 11. P. 8121–8128.
- [5] Abdel-Hafez, A.M. Degenerate and nondegenerate two-mode normal squeezing in a two-level atom and two-mode systems / A.M. Abdel-Hafez // Phys. Rev. 1992. V. A45. No. 9. P. 6610–6614.
- [6] Ashraf M.M. Cavity field spectra of the nondegenerate two-photon Jaynes-Cummings model / M.M. Ashraf // Phys. Rev. 1994. V. A50. No. 6. P. 5116–5121.
- [7] Mahmood, S. Squeezing of an effective dipole in a non-degenerate two-photon Jaynes-Cummings model with Stark shift / S. Mahmood, M.M. Ashraf // Opt. Commun. 1996. V. 33. P. 355–358.
- [8] Iwasawa, H. Exact solution of Heisenberg operators for two-photon non-degenerate Jaynes-Cummings model / H. Iwasawa, K. Matsuo // Optics Commun. 1995. V. 117. P. 550–559.
- [9] Li, G.X. Generation of pure states in a nondegenerate two-photon micro-maser / G.X. Li, J.S. Peng // Z. Phys. 1996. V. B100. No. 11. P. 91–93.
- [10] Obada, A.-S.F. Two-mode normal squeezing of a nondegenerate bimodal multiquanta Jaynes-Cummings model in the presence of Stark Shifts / A.-S.F. Obada, A.M. Abdel-Hafez, H.A. Hessian // Intern. J. Theor. Phys. 2000. V. 39. No. 6. P. 1499–1513.
- [11] Hessian, H.A. Influence of phase damping on nonclassical properties of the two-mode Jaynes-Cummings model / H.A. Hessian, H. Ritsch // J. Phys. B.: At. Mol. Opt. Phys. 2002. V. 35. P. 4619–4635.
- [12] Abdalla, M.S. Entropy and entanglement of time dependent two-mode Jaynes-Cummings model / M.S. Abdalla, M. Abdel-Aty, A.-S.F. Obada // Physica A. 2003. V. 326. P. 203–219.
- [13] Eberly, J.H. Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model / J.H. Eberly, N.B. Narozhny, J.J. Sanchez-Mondragon // Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1323–1327.

- [14] Narozhny, N.B. Coherence versus incoherence: collapse and revival in a single quantum model / N.B.Narozhny, J.H.Eberly, J.J.Sanchez-Mondragon // Phys. Rev. A. 1981. V. 23. P. 236–247.
- [15] Yoo, H.-I. Non-linear dynamics of the fermion-boson model: interference between revivals and transition to irregularity / H.-I.Yoo, Sanchez-Mondragon J.J., J.H.Eberly // J. Phys. A. 1981. V. 14. P. 1383–1397.
- [16] Gerry, C.C. Dynamics of a Raman coupled model interacting with two quantized cavity fields / C.C.Gerry, J.H.Eberly // Phys. Rev. A. 1990. V. 42. No. 11. P. 6805–6815.
- [17] Gerry, C.C. Dynamics of a two-atom Raman coupled model interacting with two quantized cavity fields / C.C.Gerry, H. Huang // Phys. Rev. A. 1992. V. 45. No. 11. P. 8037–8044.
- [18] Физика квантовой информации / под ред. Д. Боумейстера, Ф. Эккерта и А. Цайлингера. М.: Постмаркет, 2002. 376 с.
- [19] Phoenix, S.J.D. Fluctuations and Entropy in Models of Quantum Optical Resonance / S.J.D.Phoenix, P.L.Knight // Annals of Physics. 1988. V. 381. P. 381–407
- [20] Phoenix, S.J.D. Establishment of an Entangled Atom-field State in the Jaynes-Cumming Model / S.J.D.Phoenix, P.L.Knight // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. No. 9. P. 6023–6029.
- [21] Gea-Banacloche, J. Collapse and Revival of the state in the Jaynes-Cummings model: an example of state preparation by a quantum apparatus / J. Gea-Banacloche // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 65. No. 27. P. 3385–3388.
- [22] Gea-Banacloche, J. Atom- and field-state evolution in the Jaynes-Cummings model for large initial / J. Gea-Banacloche // Phys. Rev. A. 1991. V. 44. No. 9. P. 5913–5931.
- [23] Nasreen, T. Evolution of wave functions in the two-photon Jaynes-Cummings model: The generation of superpositions of coherent states / T.Nasreen, K.Zaheer // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. No. 1. P. 616–619.
- [24] Dung, H.T. State evolution in the two-photon atom-field interaction with large initial fields / H.T.Dung, N.D.Huyen // Phys. Rev. A. 1994. V. 49. No. 1. P. 473–480
- [25] Dung, H.T. Two atom-single mode radiation field interaction. State evolution, level occupation probabilities and emission spectra / H.T.Dung, N.D.Huyen // J. Mod. Opt. 1994. V. 41. No. 3. P. 453–469.
- [26] Башкиров, Е.К. Эволюция вектора состояния в моделях типа Джейнса–Каммингса: тезисы доклада Всероссийской конференции "Перспективные информационные технологии" / Е.К. Башкиров, Л.М. Ромашкевич. Самара. СГАУ: 1995. 2 с.
- [27] Cooperativity and entanglement of atom-field states / I.K.Kudryavtsev [et al.] // J. Mod. Opt. 1993. V. 40. No. 8. P. 1605–1630.

- [28] Bashkirov, E.K. On evolution of the purity of two nonidentical two-level atoms interacting with one-mode coherent field / E.K. Bashkirov // LANL arXiv. Quant-phys-0506009.
- [29] Zaheer, Kh. Squeezed states of the radiation field / Kh. Zaheer, M.S. Zubairy // Adv. Atom. Molec. Opt. Phys. 1990. V. 28. P. 143–235.
- [30] Meystre P., Zubairy M.S. Squeezed states in the Jaynes-Cummings model / P. Meystre, M.S. Zubairy // Phys. Lett. A. 1982. 89A. No. 8. P. 390–392.
- [31] Shore, B.W. The Jaynes-Cummings model / B.W. Shore, P.L. Knight // J. Mod. Opt. 1993. V. 40. No. 7. P. 1195–1238.

Поступила в редакцию 29/*VIII*/2005;
в окончательном варианте — 29/*XIII*/2005.

QUANTUM COLLECTIVE DYNAMICS OF THE SYSTEM OF TWO TWO-LEVEL ATOMS WITH NONDEGENERATE TWO-PHOTON TRANSITIONS³

© 2005 E.K. Bashkirov⁴

The exact solution for collective model of two identical two-level atoms interacting with two-mode quantum electromagnetic field in lossless cavity through the nondegenerate two-photon transition is studied assuming the field to be initially in the coherent state and both atoms to be in the excited states. On the basis of the exact solution the time evolution of the atomic probabilities, mean photon numbers in modes, field statistics and squeezing, linear atomic entropy and entanglement between atoms and field are studied.

Paper received 29/*VIII*/2005.

Paper accepted 29/*VIII*/2005.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. V.A. Saleev.

⁴Bashkirov Eugene Konstantinovich (bash@ssu.samara.ru), Dept. of General and Theoretical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.