ФИЗИКА

УДК 535.42

ОБОБЩЕННЫЕ ГАУССОВЫ ПУЧКИ И ИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С АСТИГМАТИЗМОМ[1]

© 2006 Е.Г. Абрамочкин, Е.В. Разуева, В.Г. Волостников[2]

Исследовано преобразование обобщенных гауссовых пучков — пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса — в оптических системах с астигматизмом общего вида. На основе матричного подхода показано, что результаты преобразования допускают интерпретацию в терминах вращений в трехмерном пространстве. Приведены примеры конкретных преобразований.

Введение

Гауссовы пучки и преобразование Френеля. Известно [1, 2], что эволюция когерентного светового поля $F(x, y, l)$ при распространении в свободном пространстве вдоль оси l описывается, в параксиальном приближении, параболическим уравнением

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial F}{\partial l} = 0.$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число, λ — длина волны света, l — переменная распространения и x, y — поперечные координаты.

Если в плоскости $l = 0$ задано распределение комплексной амплитуды $F_0(x, y)$, обладающее конечной энергией,

$$F(x, y, l)\Big|_{l=0} = F_0(x, y),$$

то дальнейшая эволюция поля F выражается через начальное распределение F_0 с помощью преобразования Френеля:

$$F(x, y, l) = \frac{k}{2\pi i l}\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(\frac{ik}{2l}\big[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\big]\Big) F_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{1}$$

[1]Представлена доктором физико-математических наук, профессором Ю.Н. Радаевым.

[2]Абрамочкин Евгений Григорьевич (ega@fian.smr.ru), Разуева Евгения Вадимовна (dev@fian.smr.ru), Волостников Владимир Геннадиевич (coherent@fian.smr.ru), лаборатория когерентной оптики Самарского филиала Физического института им. П.Н. Лебедева РАН, 443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, 221.

Например, для двумерной функции Гаусса

$$F_0(x,y) = \exp\Big(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2}\Big)$$

вычисление интеграла (1) приводит к самому известному решению параболического уравнения — гауссову пучку:

$$F(x,y,l) = \frac{1}{1+\dfrac{il}{kw_0^2}}\ \exp\Bigg(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2\Big(1+\dfrac{il}{kw_0^2}\Big)}\Bigg) = \\ = \frac{1}{1+\dfrac{il}{kw_0^2}}\ \exp\Bigg(\frac{il(x^2+y^2)}{2kw_0^4\Big(1+\dfrac{l^2}{k^2w_0^4}\Big)}\Bigg)\exp\Bigg(-\frac{x^2+y^2}{2w_0^2\Big(1+\dfrac{l^2}{k^2w_0^4}\Big)}\Bigg).$$

Для комплексного начального распределения

$$F_0(x,y) = \exp\Big(-\Big[\frac{1}{2w_0^2}-\frac{ik}{R_0}\Big](x^2+y^2)\Big) \tag{2}$$

получается следующее решение:

$$F(x,y,l) = \frac{1}{1+\dfrac{2l}{R_0}+\dfrac{il}{kw_0^2}}\ \exp\Bigg(-\Big[\frac{1}{2w_0^2}-\frac{ik}{R_0}\Big]\frac{x^2+y^2}{1+\dfrac{2l}{R_0}+\dfrac{il}{kw_0^2}}\Bigg). \tag{3}$$

Если определить комплексный параметр q_0, объединяющий два вещественных параметра — радиус кривизны волнового фронта R_0 и ширину пучка w_0:

$$\frac{1}{q_0} = \frac{2}{R_0}+\frac{i}{kw_0^2}\,, \tag{4}$$

то формулы (2), (3) примут вид:

$$F_0(x,y) = \exp\Big(\frac{ik(x^2+y^2)}{2q_0}\Big), \qquad F(x,y,l) = \frac{1}{1+l/q_0}\ \exp\Big(\frac{ik(x^2+y^2)}{2(q_0+l)}\Big).$$

Таким образом, гауссов пучок (2) при распространении сохраняет свою структуру, и, с точностью до множителя $\dfrac{1}{1+l/q_0}$, его эволюция сводится лишь к изменению комплексного параметра:

$$q_0 \to q = q_0 + l. \tag{5}$$

При этом достаточно сложное определение комплексного параметра (4) позволяет получить простой закон его изменения. В терминах вещественных параметров пучка — его ширины и радиуса кривизны волнового фронта — соответствующее преобразование имеет более громоздкий вид:

$$w_0 \to w_0\sqrt{\Big(1-\frac{2l}{R_0}\Big)^2+\frac{l^2}{k^2w_0^4}}\,, \qquad R_0 \to R_0\,\frac{\Big(1-\dfrac{2l}{R_0}\Big)^2+\dfrac{l^2}{k^2w_0^4}}{1-\dfrac{2l}{R_0}-\dfrac{lR_0}{2k^2w_0^4}}\,.$$

Линейные оптические системы и правило *ABCD*. Преобразование Френеля является частным случаем преобразования светового поля оптическими системами, состоящими из линейных элементов. Известно [1, 2], что в общем случае при прохождении такого элемента комплексные амплитуды светового поля во входной и выходной плоскостях связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} F(x,y) = {}& \frac{k}{2\pi i B}\times \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(\frac{ik}{2B}[A(\xi^2+\eta^2) + D(x^2+y^2) - 2(x\xi+y\eta)]\Bigr) F_0(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \end{aligned} \tag{6}$$

Для более компактной формы записи будем далее использовать векторную систему обозначений: $\mathbf{r} = (x, y)$, $\boldsymbol{\rho} = (\xi, \eta)$. Тогда равенство (6) примет вид

$$F(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i B} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(\frac{ik}{2B}[A|\boldsymbol{\rho}|^2 + D|\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})]\Bigr) F_0(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho}, \tag{6$'$}$$

а преобразование Френеля (1) — вид[3]

$$F(\mathbf{r}) = \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(\frac{ik}{2l}\,|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|^2\Bigr) F_0(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho}.$$

Если преобразованию (6′) поставить в соответствие матрицу

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где C определяется из условия $\det\mathbf{M} = AD - BC = 1$, то можно показать, что последовательное прохождение светового поля через оптические элементы с матрицами $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ соответствует перемножению матриц $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_1$:

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "\mathbf{M}_1"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1"'] & F_1 \arrow[r, "\mathbf{M}_2"] & F_2 \end{tikzcd} \tag{7}$$

Таким образом, прохождение светового поля через линейную оптическую систему можно трактовать в терминах перемножения матриц оптических элементов.

При прохождении линейных систем преобразование гауссова пучка (2) сводится к изменению комплексного параметра (4) по закону [3, 4]:

$$q_0 \to q = \frac{Aq_0 + B}{Cq_0 + D}, \tag{8}$$

который называется правилом $ABCD$.

Явный вид матриц, соответствующих линейным оптическим элементам, хорошо известен [1]. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица преобразования светового поля при распространении в свободном пространстве на расстояние l

[3]Основным объектом исследования в данной работе будут интегральные преобразования, подобные преобразованию (6′), поэтому переменную l будем далее считать параметром и не включать в число аргументов функции F.

(преобразование Френеля), $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$ — матрица преобразования поля при прохождении тонкой линзы с фокусным расстоянием f. В последнем случае параметр B равен нулю, поэтому формула (6′) непосредственно не применима. Однако, делая в (6′) подстановку $D = \dfrac{1+BC}{A}$ и переходя к пределу при $B \to 0$, нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) &= \lim_{B\to 0} \frac{k}{2\pi i B} \exp\Bigl(\frac{ikC}{2A}\,|\mathbf{r}|^2\Bigr) \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(\frac{ikA}{2B}\,\Bigl|\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{r}}{A}\Bigr|^2\Bigr) F_0(\boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\rho} = \\ &= \frac{1}{A}\,\exp\Bigl(\frac{ikC}{2A}\,|\mathbf{r}|^2\Bigr) \iint_{\mathbb{R}^2} \delta\Bigl(\boldsymbol{\rho} - \frac{\mathbf{r}}{A}\Bigr) F_0(\boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\rho} = \frac{1}{A}\,\exp\Bigl(\frac{ikC}{2A}\,|\mathbf{r}|^2\Bigr) F_0\Bigl(\frac{\mathbf{r}}{A}\Bigr). \end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $\delta(\mathbf{r})$ — двумерная дельта-функция Дирака. Формула (9) справедлива для любых световых полей и любых линейных оптических элементов.

Астигматические оптические системы. Линейные системы, обладающие радиальной симметрией, являются простейшим примером оптических систем. Другой важный класс оптических систем — это системы, обладающие прямоугольной симметрией. Они называются системами с простым астигматизмом. Преобразование светового поля в них происходит по направлениям x, y независимо друг от друга:

$$\begin{aligned} F(x,y) = \frac{k}{2\pi i\sqrt{B_x B_y}} \iint_{\mathbb{R}^2} &\exp\Bigl(\frac{ik}{2B_x}[A_x\xi^2 + D_x x^2 - 2x\xi]\Bigr)\times \\ &\times \exp\Bigl(\frac{ik}{2B_y}[A_y\eta^2 + D_y y^2 - 2y\eta]\Bigr) F_0(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta \end{aligned} \tag{10}$$

и соответствует двум матрицам

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} A_y & B_y \\ C_y & D_y \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{M}_x = \det \mathbf{M}_y = 1.$$

Если матрицы $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ трансформировать в одну 4×4-матрицу $\mathbf{M}$, состоящую из четырех диагональных 2×2-блоков:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & 0 & B_x & 0 \\ 0 & A_y & 0 & B_y \\ C_x & 0 & D_x & 0 \\ 0 & C_y & 0 & D_y \end{pmatrix},$$

то формулу (10) можно представить в виде[4]:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}) = &\frac{k}{2\pi i\sqrt{\det \mathbf{B}}}\times \\ &\times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(\frac{ik}{2}\bigl[(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{r}, \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}) - 2(\mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\rho})\bigr]\Bigr) F_0(\boldsymbol{\rho}) d^2\boldsymbol{\rho}. \end{aligned} \tag{10′}$$

Определитель матрицы $\mathbf{M}$ по-прежнему равен единице. Кроме того,

$$\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = \mathbf{I} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

[4]Рассмотрение случая $\det \mathbf{B} = 0$ аналогично выводу формулы (9).

а последовательное прохождение светового поля через астигматические оптические элементы с 4×4-матрицами $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ сводится к к прохождению через один астигматический элемент и произведению матриц, как показано на схеме (7).

Правило *ABCD*, первоначально сформулированное для гауссовых пучков (2) и оптических систем (6′), допускает естественное обобщение на гауссовы пучки вида

$$F_0(x,y) = \exp\left(\frac{ik}{2}\left[\frac{x^2}{q_{0x}} + \frac{y^2}{q_{0y}}\right]\right) \tag{11}$$

и оптические системы (10′). В данном случае преобразование (10′) сводится к произведению одномерных интегралов, поэтому изменение комплексных параметров пучка q_{0x} и q_{0y} при прохождении оптической системы с простым астигматизмом происходит независимо друг от друга:

$$q_{0x} \to q_x = \frac{A_x q_{0x} + B_x}{C_x q_{0x} + D_x}, \qquad q_{0y} \to q_y = \frac{A_y q_{0y} + B_y}{C_y q_{0y} + D_y}. \tag{12}$$

Если из параметров q_{0x}, q_{0y} составить матрицу $\mathbf{Q}_0 = \begin{pmatrix} q_{0x} & 0 \\ 0 & q_{0y} \end{pmatrix}$, то гауссов пучок (11) и его преобразование системой (10′) можно представить в виде

$$F_0(\mathbf{r}) = \exp\left(\frac{ik}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{Q}_0^{-1}\mathbf{r})\right), \qquad F(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{Q}_0^{-1})}} \exp\left(\frac{ik}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{r})\right),$$

и матрица комплексного параметра $\mathbf{Q}_0$ преобразуется согласно тензорному закону *ABCD*:

$$\mathbf{Q}_0 \to \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_x & 0 \\ 0 & q_y \end{pmatrix} = (\mathbf{A}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{B})(\mathbf{C}\mathbf{Q}_0 + \mathbf{D})^{-1}. \tag{13}$$

Дальнейшее обобщение правила *ABCD* связано со все более усложняющимся видом гауссовых функций и оптических систем. При этом увеличивается количество используемых компонент в матрицах систем, однако размерность матриц остается прежней: для рассмотрения общей ситуации преобразования гауссовых пучков достаточно матриц четвертого порядка.

Число линейно независимых компонент матрицы оптической системы зависит от типа симметрии системы. Если оптическая система обладает радиальной симметрией, то ее матрица содержит всего три независимых компонента — A, B, D, — и преобразование пучка описывается формулой (6). Оптические системы с простым астигматизмом обладают двумя осями симметрии, а соответствующее преобразование (10) требует шести линейно независимых компонент. Если в такую систему входит гауссов пучок (11), т.е. пучок, оси симметрии которого совпадают с осями симметрии оптической системы, то пучок на выходе характеризуется диагональной матрицей (13).

Если же оси симметрии гауссова пучка составляют угол ϕ с осями симметрии оптической системы, то матрицу оптического элемента $\mathbf{M}$ необходимо «довернуть» на этот угол:

$$\mathbf{M}(\phi) = \begin{pmatrix} \mathcal{R}(-\phi) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}(-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}(\phi) & 0 \\ 0 & \mathcal{R}(\phi) \end{pmatrix},$$

где

$$\mathcal{R}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

— матрица поворота вокруг оптической оси на угол ϕ.

В этом случае для описания астигматической системы необходимо семь независимых параметров, один из которых — угол поворота ее осей симметрии.

Оптические системы, не имеющие радиальной или прямоугольной симметрии, называются общими астигматическими. Преобразование светового поля в таких системах сохраняет вид (10′), но матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ в общем случае не диагональны [1].

Для наших дальнейших целей удобнее перейти к безразмерным величинам и привести преобразование (10′) к преобразованию Фурье. Сделаем замену переменных, функций и матрицы $\mathbf{B}$ (матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ безразмерны по определению):

$$\frac{\boldsymbol{\rho}}{w_0} \to \boldsymbol{\rho}, \qquad \frac{\mathbf{r}}{w_0} \to \mathbf{r}, \qquad F_0(\boldsymbol{\rho}) \to F_0(\boldsymbol{\rho}), \qquad F(\mathbf{r}) \to F(\mathbf{r}), \qquad \mathbf{B} \to k w_0^2 \mathbf{B}.$$

В новых обозначениях преобразование светового поля (10′) примет вид:

$$F(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}}} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(\frac{i}{2}\big[(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}) + (\mathbf{r}, \mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}) - 2(\mathbf{r}, \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\rho})\big]\Big) F_0(\boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\rho},$$

или

$$\begin{aligned} 2\pi i \sqrt{\det \mathbf{B}}\, \exp\Big(-\frac{i}{2}(\mathbf{r}, \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{r})\Big) F(\mathbf{B}^T\mathbf{r}) = \\ = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) + \frac{i}{2}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho})\Big) F_0(\boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\rho}, \end{aligned} \tag{14}$$

где $\mathbf{B}^T$ — транспонированная матрица.

Интеграл в правой части равенства (14) содержит экспоненциальный множитель $\exp\Big(\frac{i}{2}(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho})\Big)$. Квадратичная форма $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho})$ зависит от трех параметров и может быть представлена в скалярном виде разными способами, например,

$$(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}) = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = \left(\boldsymbol{\rho}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}\right).$$

Однако для нас предпочтительнее использовать представление

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}) = a(\xi^2 + \eta^2) + b[(\xi^2 - \eta^2)\cos 2\beta + 2\xi\eta \sin 2\beta] = \\ = \left(\boldsymbol{\rho}, \begin{pmatrix} a + b\cos 2\beta & b\sin 2\beta \\ b\sin 2\beta & a - b\cos 2\beta \end{pmatrix} \boldsymbol{\rho}\right). \end{aligned}$$

Функция

$$\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta) = (\xi^2 - \eta^2)\cos 2\beta + 2\xi\eta \sin 2\beta$$

называется функцией астигматического воздействия, и преобразование поля $F_0(\boldsymbol{\rho})$ оптической системой (14′) сводится к вычислению интеграла Фурье

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-i(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{r}) + \frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2} + \frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho}, \beta)}{2}\Big) F_0(\boldsymbol{\rho})\, d^2\boldsymbol{\rho}.$$

Пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса и их свойства. В работах [2] описаны многие решения параболического уравнения, среди которых особое значение имеют два класса решений, выражающихся через функции Эрмита–Гаусса

$$\mathscr{H}_{n,m}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, 2^{n+m}\, n!\, m!}}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} H_n(x) H_m(y) \qquad (n, m = 0, 1, \ldots) \tag{15}$$

и функции Лагерра–Гаусса

$$\mathscr{L}_{n,\pm m}(x, y) = \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+m)!}}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} (x \pm iy)^m L_n^m(x^2 + y^2) \qquad (n, m = 0, 1, \ldots), \tag{16}$$

где

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n}\, e^{-t^2}, \qquad L_n^m(t) = \frac{1}{n!}\, t^{-m} e^t \frac{d^n}{dt^n}\, (t^{n+m} e^{-t})$$

— полиномы Эрмита и Лагерра соответственно.

Аналитические выражения для этих классов функций с использованием преобразования Френеля имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(\frac{ik}{2l}\, |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2\Big) \mathscr{H}_{n,m}\Big(\frac{\boldsymbol{\rho}}{w_0}\Big) d^2\boldsymbol{\rho} = \\ = \frac{1}{|\sigma|} \exp\Big(\frac{il|\mathbf{r}|^2}{2kw_0^4|\sigma|^2} - i(n + m + 1) \arg \sigma\Big) \mathscr{H}_{n,m}\Big(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\Big), \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} \frac{k}{2\pi i l} \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(\frac{ik}{2l}\, |\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^2\Big) \mathscr{L}_{n,\pm m}\Big(\frac{\boldsymbol{\rho}}{w_0}\Big) d^2\boldsymbol{\rho} = \\ = \frac{1}{|\sigma|} \exp\Big(\frac{il|\mathbf{r}|^2}{2kw_0^4|\sigma|^2} - i(2n + m + 1) \arg \sigma\Big) \mathscr{L}_{n,\pm m}\Big(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\Big), \end{aligned} \tag{18}$$

где $\sigma = 1 + \dfrac{il}{k\rho^2}$ — вспомогательный комплексный параметр, используемый для более компактной записи.

Особое значение решений (17), (18) параболического уравнения связано с такими свойствами классов функций $\{\mathscr{H}_{n,m}(\mathbf{r});\ n, m = 0, 1, \ldots\}$ и $\{\mathscr{L}_{n,\pm m}(\mathbf{r});\ n, m = 0, 1, \ldots\}$, как ортонормальность и полнота в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Кроме того, интенсивность решений (17) и (18) при изменении l меняется только в масштабе. Это свойство позволяет назвать их структурно устойчивыми пучками.

Пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса сохраняют свою структуру интенсивности при прохождении через оптические системы с радиальной симметрией:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) + \frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2}\Bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho} = \\ = \frac{2\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+a^2}}\exp\Bigl(-\frac{ia|\mathbf{r}|^2}{2(1+a^2)} + i(n+m+1)\arctan a\Bigr)\mathscr{H}_{n,m}\Bigl(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1+a^2}}\Bigr),$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) + \frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2}\Bigr)\mathscr{L}_{n,\pm m}(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho} = \\ = \frac{2\pi(-i)^{2n+m}}{\sqrt{1+a^2}}\exp\Bigl(-\frac{ia|\mathbf{r}|^2}{2(1+a^2)} + i(2n+m+1)\arctan a\Bigr)\mathscr{L}_{n,\pm m}\Bigl(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1+a^2}}\Bigr).$$

Пучки Эрмита–Гаусса, кроме того, сохраняют свою форму при прохождении через астигматические системы, если ее оси симметрии совпадают с осями симметрии пучка:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) + \frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho},0)}{2}\Bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho} = \\ = \frac{2\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+b^2}}\exp\Bigl(-\frac{ib\psi(\mathbf{r},0)}{2(1+b^2)} + i(n-m)\arctan b\Bigr)\mathscr{H}_{n,m}\Bigl(\frac{\mathbf{r}}{\sqrt{1+b^2}}\Bigr). \tag{19}$$

Как и в случае обычных гауссовых пучков, преобразование пучков Эрмита–Гаусса сводится к преобразованию матрицы комплексного параметра.

Если оси симметрии системы составляют с осями симметрии пучка угол α, то структура пучков Эрмита–Гаусса при прохождении такой системы радикально меняется. В этом случае пучки Эрмита–Гаусса преобразуются в конечную сумму различных пучков Эрмита–Гаусса [12]:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Bigl(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) + \frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho},\beta)}{2}\Bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho} = \frac{2\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1+b^2}}\exp\Bigl(-\frac{ib\psi(\mathbf{r},\beta)}{2(1+b^2)}\Bigr)\times \\ \times\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k e^{i(n+m-2k)\arctan b}\,c_k^{(n,m)}(\beta)\mathscr{H}_{n+m-k,k}\Bigl(\frac{\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}}{\sqrt{1+b^2}}\Bigr), \tag{20}$$

где

$$c_k^{(n,m)}(\beta) = \sqrt{\frac{(n+m-k)!\,k!}{n!\,m!}}\,\cos^{n-k}\beta\,\sin^{m-k}\beta\,P_k^{(n-k,m-k)}(-\cos 2\beta), \tag{21}$$

и $P_k^{(\mu,\nu)}(t) = \dfrac{(-1)^k}{2^k\,k!}\,\dfrac{1}{(1-t)^\mu(1+t)^\nu}\,\dfrac{d^k}{dt^k}\Bigl[(1-t)^{k+\mu}(1+t)^{k+\nu}\Bigr]$ — полиномы Якоби.

В частности, когда $b = 1/w_0^2$ и оси симметрии астигматической системы составляют с осями симметрии пучка Эрмита–Гаусса угол $\beta = \pi/4$, реализуется преобразование пучков Эрмита–Гаусса в пучки Лагерра–Гаусса:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\bigl(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) + i\xi\eta\bigr)\mathscr{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho} = \\ = \pi\sqrt{2}\,\exp\Bigl(-\frac{ixy}{2}\Bigr)\begin{cases} i^{2m-n}\mathscr{L}_{m,n-m}\Bigl(\dfrac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\Bigr) & (n \geqslant m), \\ i^n\,\mathscr{L}_{n,n-m}\Bigl(\dfrac{\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\Bigr) & (n \leqslant m). \end{cases} \tag{22}$$

В [7] пучки Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса были объединены в единый класс параметрических пучков. Если определить функции $\{\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta);\ n,m=0,1,\ldots\}$ равенством

$$\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)=\sum_{k=0}^{n+m} i^k c_k^{(n,m)}(\theta)\mathscr{H}_{n+m-k,k}(\mathbf{r}), \tag{23}$$

тогда уравнение (20) при $b=1$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})+\frac{i\psi(\boldsymbol{\rho},\beta)}{2}\Big)\mathscr{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})\,d^2\boldsymbol{\rho}&=\\ =\pi\sqrt{2}\,\exp\Big(-\frac{i\psi(\mathbf{r},\beta)}{4}-\frac{\pi i}{4}(n+m)\Big)&\mathscr{G}_{n,m}\Big(\frac{\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\,\Big|\,\beta\Big).\end{aligned} \tag{20$'$}$$

Сравнение астигматического преобразования (20) при $\beta=0$ и $\beta=\pi/4$ с формулами (19) и (22) показывает, что

$$\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,0)=(-i)^m\mathscr{H}_{n,m}(\mathbf{r})\quad\text{и}\quad\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\pi/4)=\begin{cases}(-1)^m\mathscr{L}_{m,n-m}(\mathbf{r}) & (n\geqslant m),\\ (-1)^n\mathscr{L}_{n,n-m}(\mathbf{r}) & (n\leqslant m).\end{cases} \tag{24}$$

Поэтому пучки $\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)$ были названы пучками Эрмита–Лагерра–Гаусса.

Эти обобщенные гауссовы пучки сохраняют ряд свойств пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса. Например, структурную устойчивость к преобразованию Френеля:

$$\begin{aligned}\frac{k}{2\pi il}\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(\frac{ik}{2l}\,|\mathbf{r}-\boldsymbol{\rho}|^2\Big)\mathscr{G}_{n,m}\Big(\frac{\boldsymbol{\rho}}{w_0}\,\Big|\,\theta\Big)d^2\boldsymbol{\rho}&=\\ =\frac{1}{|\sigma|}\exp\Big(\frac{il|\mathbf{r}|^2}{2kw_0^4|\sigma|^2}-i(n+m+1)\arg\sigma\Big)&\mathscr{G}_{n,m}\Big(\frac{\mathbf{r}}{w_0|\sigma|}\,\Big|\,\theta\Big).\end{aligned}$$

При любом фиксированном θ семейство функций $\{\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta),n,m=0,1,\ldots\}$ образует ортонормальный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\overline{\mathscr{G}}_{N,M}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\,d^2\mathbf{r}=\delta_{nN}\delta_{mM}.$$

Некоторые свойства пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса, включая производящую функцию, рекуррентные соотношения, интегральные моменты вида

$$\iint_{\mathbb{R}^2}x\big|\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\big|^2d^2\mathbf{r}=\iint_{\mathbb{R}^2}y\big|\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\big|^2d^2\mathbf{r}=\iint_{\mathbb{R}^2}xy\big|\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\big|^2d^2\mathbf{r}=0,$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2+y^2)\big|\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\big|^2d^2\mathbf{r}=2(n+m+1),$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2}(x^2-y^2)\big|\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta)\big|^2d^2\mathbf{r}=2(n-m)\cos\theta,$$

а также значения полного углового момента этих пучков были найдены в [7, 6].

1. Общее астигматическое преобразование пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса и вращения в трехмерном пространстве

Объединение пучков Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса, полученное из астигматического преобразования (20), позволяет рассматривать известные и находить новые свойства данных пучков с единых позиций. При этом удается их качественное различие свести к количественным параметрам. В связи с этим возникает вопрос: возможно ли представление астигматических преобразований нового единого семейства пучков средствами матричной оптики подобно тому, как преобразуются гауссовы пучки симметричными оптическими системами?

Следует отметить, что матричное описание астигматических систем общего вида было исследовано ранее (см., например, [8]). Однако, ко времени публикации этих работ преобразование (20) еще не было известно. Как следствие, отсутствие понятия семейства обобщенных гауссовых пучков ранее давало только возможность преобразования некоторых интегральных характеристик световых полей (например, первых и вторых моментов [9], радиуса кривизны волнового фронта [10]), либо описания только оптических систем, но не преобразования целых классов световых полей, например, пучков Эрмита–Гаусса. Задачей данной работы является преобразование гауссовых пучков астигматическими оптическими системами общего вида посредством матричного аппарата.

Общее астигматическое преобразование пучков Эрмита–Лагерра–Гаусса было найдено в [6]:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-i(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}) + \frac{ia|\boldsymbol{\rho}|^2}{2} + \frac{ib\psi(\boldsymbol{\rho},\beta)}{2}\Big)\mathcal{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\,|\,\theta)\,d^2\boldsymbol{\rho} = \frac{2\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt[4]{\Delta_+\Delta_-}}\times$$
$$\times\exp\Big(-\frac{ia(1+a^2-b^2)|\mathbf{r}|^2}{2\Delta_+\Delta_-} - \frac{ib(1+b^2-a^2)\psi(\mathbf{r},\beta)}{2\Delta_+\Delta_-} + i(n-m)\gamma + \tag{25}$$
$$+\frac{i(n+m+1)}{2}\arg(1+b^2-a^2+2ia)\Big)\mathcal{G}_{n,m}\Big(\mathcal{R}(-\alpha)\mathcal{S}(a,b)\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}\,\Big|\,\theta'\Big),$$

где $\Delta_\pm = 1+(a\pm b)^2$, $\mathcal{S}(a,b) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\Delta_+} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\Delta_-}\end{pmatrix}$, и параметры пучка на выходе α, θ', γ связаны с параметром пучка на входе θ и параметрами оптической системы a, b, β соотношениями:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}2\alpha = \operatorname{tg}2\theta\,\dfrac{\sin 2\omega}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg}2\beta\,\cos 2\omega, \\ \sin 2\theta' = \sin 2\theta\,\cos 2\omega + \cos 2\theta\,\sin 2\beta\,\sin 2\omega, \\ \operatorname{ctg}2\gamma = \operatorname{ctg}2\omega\,\dfrac{\cos 2\theta}{\cos 2\beta} - \operatorname{tg}2\beta\,\sin 2\theta. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $\omega = \frac{1}{2}\arg(1+a^2-b^2+2ib)$ — вспомогательный параметр.

Видно, что пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса образуют инвариантный относительно общего астигматического преобразования набор.

Известно [11], что произвольное вращение вектора в трехмерном пространстве полностью определяется заданием трех вещественных параметров. Например, используя углы Эйлера, его можно представить в виде трех последовательных вращений:

1) вращение вокруг z axis на угол $\gamma \in [0, 2\pi)$;
2) вращение вокруг y axis на угол $\beta \in [0, \pi]$;
3) вращение вокруг z axis на угол $\alpha \in [0, 2\pi)$.

При повороте вектора

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \geqslant 0, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi],$$

его длина r сохраняется, а угловые координаты изменяются: $\theta \to \theta'$, $\phi \to \phi'$. Связь между углами в исходной и повернутой системе координат можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta' & e^{-i\phi'}\sin\theta' \\ e^{i\phi'}\sin\theta' & -\cos\theta' \end{pmatrix} = U(\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} U^{-1}(\alpha, \beta, \gamma), \tag{27}$$

где

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}$$

— матрица поворота в трехмерном пространстве.

Из определения матрицы $U(\alpha, \beta, \gamma)$ легко найти некоторые частные последовательности вращений, например,

$$U(\alpha_2, \beta_2, -\alpha_1)U(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = U(\alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1).$$

В общем случае два последовательных поворота можно свести к одному следующим образом:

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = U(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)U(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1),$$

где углы результирующего поворота (α, β, γ) связаны с углами $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ формулами:

$$\begin{cases} \operatorname{ctg}(\alpha - \alpha_2) = \operatorname{ctg}\beta_1 \dfrac{\sin\beta_2}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)} + \cos\beta_2 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \gamma_2), \\ \cos\beta = \cos\beta_1\cos\beta_2 - \sin\beta_1\sin\beta_2\cos(\alpha_1 + \gamma_2), \\ \operatorname{ctg}(\gamma - \gamma_1) = \operatorname{ctg}\beta_2 \dfrac{\sin\beta_1}{\sin(\alpha_1 + \gamma_2)} + \cos\beta_1 \operatorname{ctg}(\alpha_1 + \gamma_2). \end{cases} \tag{28}$$

Из сравнения этих формул с соотношениями (26) видно, что изменение параметров при интегральном преобразовании (25) может быть записано с помощью трехмерных матриц поворота:

$$U\Big(\frac{\pi}{2} - 2\alpha, \frac{\pi}{2} - 2\theta', 2\gamma\Big) = U\Big(0, 2\omega, \frac{\pi}{2} + 2\beta\Big)U\Big(0, \frac{\pi}{2} - 2\theta, 0\Big). \tag{29}$$

Существует другая последовательность вращений, которая описывается уравнениями (26):

$$U\Big(2\alpha, \frac{\pi}{2}+2\theta', 2\gamma\Big) = U\Big(-\frac{\pi}{2}, 2\omega, \frac{\pi}{2}-2\beta\Big)U\Big(0, \frac{\pi}{2}+2\theta, 0\Big). \tag{30}$$

Каждая матрица поворота определяется параметрами только одной группы:

1) θ — параметром исходного пучка Эрмита–Лагерра–Гаусса;
2) θ', α, γ — параметрами конечного пучка Эрмита–Лагерра–Гаусса;
3) β, ω — параметрами оптической системы.

Вращениям векторов в трехмерном пространстве соответствует преобразование функций. Если функция $f(\theta,\phi)$ определена на единичной сфере, тогда преобразование $f(\theta,\phi)\to f(\theta',\phi')$ при повороте на углы Эйлера α, β, γ описывается в терминах оператора поворота

$$f(\theta',\phi') = \mathscr{D}(\alpha,\beta,\gamma)f(\theta,\phi),$$

где явный вид оператора определяется по его действию на сферические функции [7]:

$$Y_{l,m}(\theta',\phi') = \mathscr{D}(\alpha,\beta,\gamma)Y_{l,m}(\theta,\phi) = \sum_{n=-l}^{l} e^{-in\alpha} d^l_{n,m}(\beta) e^{-im\gamma} Y_{l,n}(\theta,\phi), \tag{31}$$

и $d^l_{n,m}(\beta)$ — d-функции Вигнера[5]. Здесь $l = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ и $n,m\in\{-l,-l+1,\dots,l\}$. Например,

$$d^0_{0,0}(\beta)=1; \qquad \|d^{1/2}_{n,m}(\beta)\| = \mathcal{R}\Big(\frac{\beta}{2}\Big) \qquad \Big(n,m=-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\Big);$$

$$\|d^1_{n,m}(\beta)\| = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\beta & -\sqrt{2}\sin\beta & 1-\cos\beta \\ \sqrt{2}\sin\beta & 2\cos\beta & -\sqrt{2}\sin\beta \\ 1-\cos\beta & \sqrt{2}\sin\beta & 1+\cos\beta \end{pmatrix} \qquad (n,m=-1,0,1).$$

Последовательные действия оператора $\mathscr{D}$ удовлетворяют соотношению, похожему на соотношение для матрицы U:

$$\mathscr{D}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathscr{D}(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)\mathscr{D}(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1).$$

где углы $(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1)$, $(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2)$ связаны с (α,β,γ) уравнениями (28). Значит, аналогично (29), (30), имеем

$$\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2}-2\alpha, \frac{\pi}{2}-2\theta', 2\gamma\Big) = \mathscr{D}\Big(0, 2\omega, \frac{\pi}{2}+2\beta\Big)\mathscr{D}\Big(0, \frac{\pi}{2}-2\theta, 0\Big), \tag{29$'$}$$

$$\mathscr{D}\Big(2\alpha, \frac{\pi}{2}+2\theta', 2\gamma\Big) = \mathscr{D}\Big(-\frac{\pi}{2}, 2\omega, \frac{\pi}{2}-2\beta\Big)\mathscr{D}\Big(0, \frac{\pi}{2}+2\theta, 0\Big). \tag{30$'$}$$

---

[5] По определению

$$d^l_{n,m}(\beta) = \sqrt{\frac{k!\,(k+\mu+\nu)!}{(k+\mu)!\,(k+\nu)!}}\sin^\mu\Big(\frac{\beta}{2}\Big)\cos^\nu\Big(\frac{\beta}{2}\Big)P_k^{(\mu,\nu)}(\cos\beta)\cdot\left\{\begin{array}{ll} 1 & (m\geqslant n) \\ (-1)^{n-m} & (n>m)\end{array}\right|,$$

где $\mu=|n-m|$, $\nu=|n+m|$, $k=l-\dfrac{\mu+\nu}{2}$.

Используя определение коэффициентов $c_k^{(n,m)}(\alpha)$ из уравнения (21), явный вид матричных элеметов оператора поворота $\mathscr{D}$ и d-функций Вигнера, можно доказать, что функции Эрмита–Лагерра–Гаусса с различными параметрами могут быть построены при действии оператора $\mathscr{D}$ на функции Эрмита–Гаусса:

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{l+m,l-m}(\mathbf{r}\,|\,\theta) &= \sum_{n=-l}^{l} d^l_{m,n}(2\theta)\mathscr{G}_{l+n,l-n}(\mathbf{r}\,|\,0) = \\ &= \sum_{n=-l}^{l} d^l_{n,m}(-2\theta)\mathscr{G}_{l+n,l-n}(\mathbf{r}\,|\,0) = \mathscr{D}(0,-2\theta,0)\mathscr{G}_{l+m,l-m}(\mathbf{r}\,|\,0).\end{aligned} \tag{32}$$

Действуя правой и левой частями соотношения (29′) на функции Эрмита–Гаусса, получаем следующий результат. Интегральное преобразование (25) можно интерпретировать как действие оператора $\mathscr{D}$:

$$\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2}-2\alpha,\frac{\pi}{2},0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta')e^{-i(n-m)\gamma} = \mathscr{D}(0,2\omega,2\beta)\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta). \tag{33}$$

Таким образом, при действии оператором поворота на пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса параметры θ, θ' и α преобразуются так же, как сферические координаты вектора $(\theta,\phi)\to(\theta',\phi')$ преобразуются в (27):

$$\Big(\frac{\pi}{2}+2\theta,0\Big)\xrightarrow{U(0,2\omega,\frac{\pi}{2}-2\beta)}\Big(\frac{\pi}{2}+2\theta',\frac{\pi}{2}+2\alpha\Big).$$

2. Астигматическое преобразование пучков Эрмита–Гаусса в пучки Лагерра–Гаусса

Преобразование пучков Эрмита–Гаусса в пучки Лагерра–Гаусса (22) осуществляется в оптической системе, называемой модовым конвертором. Рассмотрим модовый конвертор, осуществляющий комплексно сопряженную форму преобразования (22). В этом случае параметры оптической системы: $a=0$, $b=1$, $\beta=-\frac{\pi}{4}$. Сравнение общего астигматического преобразования (14′) и преобразования, комплексно сопряженного (22),

$$(\mathbf{r},\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\rho}) = -(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho}), \qquad (\boldsymbol{\rho},\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\boldsymbol{\rho}) = -2\xi\eta, \qquad (\mathbf{r},\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}) = \mathbf{0},$$

позволяет найти матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ оптической системы: $\mathbf{B}=-\mathbf{I}$, $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{D}=\mathbf{0}$. Используя соотношение $\mathbf{AD}-\mathbf{BC}=\mathbf{I}$, мы получаем последнюю из четырех матриц: $\mathbf{C}=\mathbf{I}$. Следовательно, матрица астигматического преобразования имеет вид

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix}\mathbf{A}&\mathbf{B}\\\mathbf{C}&\mathbf{D}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1&-1&0\\1&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$$

Блок матрицы **A** недиагональный, и преобразования по x, y связаны. Чтобы их разделить, необходимо повернуть матрицу **M** на угол $-\pi/4$ (это соответствует вращению оптической системы вокруг оптической оси):

$$\mathbf{M} \to \begin{pmatrix} \mathcal{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \mathbf{M} \begin{pmatrix} \mathcal{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{R}\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В части две матрицы 2×2-матрицы $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$ были объединены в одну 4×4-матрицу **M**. Обращая эту процедуру, мы получаем матрицы

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и двухмерная оптическая система переходит в две одномерных оптических системы с матрицами преобразования $\mathbf{M}_x$, $\mathbf{M}_y$.

Матрица оптической системы является произведением матриц оптических элементов, входящих в нее. Используя только тонкие линзы и промежутки свободного пространства, матрицы которых имеют вид

$$\mathbf{M}_{\mathrm{S}}(l) = \begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{M}_{\mathrm{L}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix},$$

можно построить оптические системы, преобразующие пучки Эрмита–Гаусса в пучки Лагерра–Гаусса. Пример такой системы, состоящей из двух сферических и следующей за ними цилиндрической линз, приведен в [12]. Другие возможные схемы модового конвертера содержат дополнительные оптические элементы, расположенные в различном порядке. Например, это конвертор, состоящий из двух сферических и расположенной между ними цилиндрической линз. Матричное описание такой оптической системы приводит к системе 8 линейных уравнений с 10 неизвестными:

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{M}_{\mathrm{L}}(f_{x_3})\mathbf{M}_{\mathrm{S}}(x_3)\mathbf{M}_{\mathrm{L}}(f_{x_2})\mathbf{M}_{\mathrm{S}}(x_2)\mathbf{M}_{\mathrm{L}}(f_{x_1})\mathbf{M}_{\mathrm{S}}(x_1),$$
$$\mathbf{M}_y = \mathbf{M}_{\mathrm{L}}(f_{y_2})\mathbf{M}_{\mathrm{S}}(y_2)\mathbf{M}_{\mathrm{L}}(f_{y_1})\mathbf{M}_{\mathrm{S}}(y_1),$$

которую необходимо дополнить условием эквивалентности оптических путей по x и y:

$$x_1 + x_2 + x_3 = y_1 + y_2.$$

Так как уравнений меньше, чем переменных, возможно построение различных оптических схем. Например,

$$x_1 = y_1 = \frac{1+a}{1-a}, \quad x_2 = \frac{a(1+a)}{1-a}, \quad x_3 = a, \quad y_2 = x_2 + x_3,$$
$$f_{x_1} = f_{y_1} = \frac{a}{1-a}, \quad f_{x_2} = \frac{a^2}{2}, \quad f_{x_3} = f_{y_2} = a,$$

где $a \in (0,1)$ — параметр.

Итак, построена оптическая система, преобразующая пучки Эрмита–Гаусса в пучки Лагерра–Гаусса. Отметим, что для всех схем модовых конвертеров угол между плоскостями симметрии оптической системы и плоскостями симметрии пучка Эрмита–Гаусса $\pi/4$.

3. Дробное преобразование Фурье

Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса определяются с помощью интегрального преобразования (20′). При изменении угла β функции астигматического воздействия аргументы функции $\mathscr{G}_{n,m}$ поворачиваются:

$$\mathscr{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\,|\,0) \xrightarrow{\psi(\rho,\beta)/2} \mathscr{G}_{n,m}\Big(\frac{\mathcal{R}(-\beta)\mathbf{r}}{\sqrt{2}}\,\Big|\,\beta\Big).$$

Найдем аналогичное интегральное преобразование, но без добавочного вращения координат:

$$\mathscr{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\,|\,0) \xrightarrow{?} \mathscr{G}_{n,m}(\mathbf{r}\,|\,\theta).$$

Подставляя $\theta = 0$ в общее астигматическое преобразование (33), можно получить следующее равенство:

$$\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2} - 2\alpha, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,\theta')e^{-i(n-m)\gamma} = \mathscr{D}(0, 2\omega, 2\beta)\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,0). \tag{34}$$

Если $2\beta + \frac{\pi}{2} = 0$ (т.е. $\beta = -\frac{\pi}{4}$), правая часть уравнения (34) приобретает простой вид:

$$\begin{aligned}\mathscr{D}\Big(0, 2\omega, -\frac{\pi}{2}\Big)\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,0) &= \mathscr{D}\Big(0, 2\omega + \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,0) = \\ = \mathscr{D}\Big(0, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{D}(0, 2\omega, 0)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,0) &\overset{(32)}{=} \mathscr{D}\Big(0, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|-\omega).\end{aligned}$$

Тогда уравнение (34) имеет вид:

$$\mathscr{D}\Big(\frac{\pi}{2} - 2\alpha, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,\theta)e^{-i(n-m)\gamma} = \mathscr{D}\Big(0, \frac{\pi}{2}, 0\Big)\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|-\omega).$$

Если выбрать $\omega = -\theta$, тогда $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = 0$. Кроме того, выбор $\omega = -\theta$ приводит к следующим соотношениям:

$$\operatorname{tg} 2\omega = \frac{2b}{1 + a^2 - b^2} = -\operatorname{tg} 2\theta = \frac{-2\operatorname{tg}\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta},$$

и для $a = 0$, $b = -\operatorname{tg}\theta$ интегральное преобразование принимает вид

$$\begin{aligned}&\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(-i(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) + i\xi\eta\operatorname{tg}\theta\Big)\mathscr{G}_{n,m}(\boldsymbol{\rho}\,|\,0)\,d^2\boldsymbol{\rho} = \\ &\qquad = \frac{2\pi(-i)^{n+m}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}\exp\Big(-\frac{ixy\operatorname{tg}\theta}{1 + \operatorname{tg}^2\theta}\Big)\mathscr{G}_{n,m}\Big(\mathcal{R}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\frac{\mathbf{I}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}\mathcal{R}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\mathbf{r}\,\Big|\,\theta\Big),\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\mathscr{G}_{n,m}(x, y\,|\,\theta) &= \frac{i^{n+m}}{2\pi|\cos\theta|}\times \\ &\times\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-\frac{i(x\xi + y\eta)}{\cos\theta} + i(xy + \xi\eta)\operatorname{tg}\theta\Big)\mathscr{G}_{n,m}(\xi, \eta\,|\,0)\,d\xi\,d\eta.\end{aligned} \tag{35}$$

Из сравнения равенств (35) и (14) можно найти матрицы оптической системы:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\cos\theta & 0 \\ 0 & 1/\cos\theta \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{tg}\theta \\ \operatorname{tg}\theta & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{tg}\theta \\ \operatorname{tg}\theta & 0 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta \\ \sin\theta & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{AD} - \mathbf{BC} = \mathbf{I} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & 0 \\ 0 & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

После замены параметра $\theta \to \theta + \frac{\pi}{2}$ с использованием соотношения [6]

$$\mathscr{G}_{n,m}\Big(x, y \,\Big|\, \theta + \frac{\pi}{2}\Big) = i^{n+m}\mathscr{G}_{n,m}\Big(y, x \,\Big|\, \theta\Big)$$

и замены координат $x \leftrightarrow y$ интегральное преобразование (35) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_{n,m}(x, y \,|\, \theta) = \frac{1}{2\pi|\sin\theta|} \times \\ \times \iint_{\mathbb{R}^2} \exp\Big(\frac{i(x\eta + y\xi)}{\sin\theta} - i(xy + \xi\eta)\operatorname{ctg}\theta\Big)\mathscr{G}_{n,m}(\xi, \eta \,|\, 0)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned} \tag{36}$$

Таким образом, уравнения (35) и (36) показывают два возможных преобразования пучков Эрмита–Гаусса в пучки Эрмита–Лагерра–Гаусса с обычными (неповернутыми) аргументами.

Матрица астигматического преобразования (35) уже была найдена. Матрица преобразования (36) имеет следующий вид:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Блоки $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ могут быть диагонализованы поворотом на угол $\pi/4$:

$$\mathbf{M} \to \mathcal{R}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\mathbf{M}\mathcal{R}\Big(-\frac{\pi}{4}\Big) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразования по x, y разделяются, и матрица соответствующего преобразования имеет вид

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathcal{R}(-\theta), \qquad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \mathcal{R}(\theta).$$

Теперь легко показать, что замена переменных $\boldsymbol{\rho} \to \mathcal{R}\big(\frac{\pi}{4}\big)\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{r} \to \mathcal{R}\big(\frac{\pi}{4}\big)\mathbf{r}$

в уравнении (36) приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{G}_{n,m}\Big(\mathcal{R}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\mathbf{r}\,\Big|\,\theta\Big) = \frac{1}{2\pi|\sin\theta|}\times\\
&\times\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(\frac{i(x\xi - y\eta)}{\sin\theta} - \frac{i\operatorname{ctg}\theta}{2}\,(x^2 - y^2 + \xi^2 - \eta^2)\Big)\mathscr{G}_{n,m}\Big(\mathcal{R}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{\rho}\,\Big|\,0\Big)\,d^2\boldsymbol{\rho} =\\
&= \frac{1}{2\pi|\sin\theta|}\int_{\mathbb{R}}\exp\Big(\frac{ix\xi}{\sin\theta} - \frac{i\operatorname{ctg}\theta}{2}\,(x^2 + \xi^2)\Big)\,d\xi\times\\
&\times\int_{\mathbb{R}}\exp\Big(-\frac{iy\eta}{\sin\theta} + \frac{i\operatorname{ctg}\theta}{2}\,(y^2 + \eta^2)\Big)\mathscr{G}_{n,m}\Big(\mathcal{R}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)\boldsymbol{\rho}\,\Big|\,0\Big)\,d\eta.
\end{aligned}\tag{37}$$

Интегральное преобразование вида

$$\mathcal{F}_\theta[f(\tau)](t) = \frac{\exp(\frac{1}{2}i\theta - \frac{1}{4}\pi i\,\operatorname{sgn}\sin\theta)}{\sqrt{2\pi|\sin\theta|}}\int_{\mathbb{R}}\exp\Big(-\frac{it\tau}{\sin\theta} + \frac{i\cot\theta}{2}\,(t^2 + \tau^2)\Big)f(\tau)\,d\tau,$$

названное дробным преобразованием Фурье, впервые появилось в [14] при решении задачи о нахождении интегрального преобразования, собственными функциями которого были бы одномерные моды Эрмита–Гаусса, а собственными числами — $e^{-in\alpha}$:

$$\mathcal{F}_\alpha[e^{-\tau^2/2}H_n(\tau)](t) = e^{-in\alpha}e^{-t^2/2}H_n(t).$$

Обычное преобразование Фурье совпадает с дробным преобразованием Фурье при $\alpha = \pi/2$:

$$\mathcal{F}[f](t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-it\tau}f(\tau)\,d\tau = \mathcal{F}_{\pi/2}[f](t).$$

Не трудно показать, что параметрическое семейство дробных преобразований Фурье образует группу:

1) тождественное преобразование: $\mathcal{F}_0[f](t) = f(t)$;
2) обратное преобразование: $\mathcal{F}_\alpha^{-1}[f](t) = \mathcal{F}_\alpha^*[f](t) = \mathcal{F}_{-\alpha}[f](t)$;
3) закон композиции: $\mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}_\beta[f]](t) = \mathcal{F}_{\alpha+\beta}[f](t)$.

Если обобщить дробное преобразование Фурье на случай двух переменных:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f(\xi,\eta)](x,y) = \frac{\exp(\frac{1}{2}i(\alpha+\beta) - \frac{1}{4}\pi i(\operatorname{sgn}\sin\alpha + \operatorname{sgn}\sin\beta))}{2\pi\sqrt{|\sin\alpha\,\sin\beta|}}\times\\
&\times\iint_{\mathbb{R}^2}\exp\Big(-\frac{ix\xi}{\sin\alpha} - \frac{iy\eta}{\sin\beta} + \frac{i\operatorname{ctg}\alpha}{2}\,(x^2+\xi^2) + \frac{i\operatorname{ctg}\beta}{2}\,(y^2+\eta^2)\Big)f(\xi,\eta)d\xi\,d\eta,
\end{aligned}$$

то собственными функциями такого дробного преобразования Фурье будут двумерные моды Эрмита–Гаусса:

$$\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[\mathscr{H}_{n,m}(\boldsymbol{\rho})](\mathbf{r}) = e^{-i(n\alpha+m\beta)}\mathscr{H}_{n,m}(\mathbf{r}).$$

Следующие равенства показывают взаимосвязь между одномерным и двумерным дробными преобразованиями Фурье:

1) $\mathcal{F}_{\alpha,0}[f(\xi,\eta)] = \mathcal{F}_\alpha[f(\xi,y)]$;
2) $\mathcal{F}_{0,\beta}[f(\xi,\eta)] = \mathcal{F}_\beta[f(x,\eta)]$;

3) $\mathcal{F}_{\alpha,\beta}[f(\xi,\eta)] = \mathcal{F}_\alpha[\mathcal{F}_\beta[f(\xi,\eta)](\xi,y)] = \mathcal{F}_\beta[\mathcal{F}_\alpha[f(\xi,\eta)](x,\eta)]$.

Таким образом, формула (37) может быть представлена в следующем виде:

$$\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathcal{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\mathbf{r}\,\middle|\,\theta\right) = \mathcal{F}_{-\theta,\theta}\left[\mathcal{G}_{n,m}\left(\mathcal{R}\left(\frac{\pi}{4}\right)\boldsymbol{\rho}\,\middle|\,0\right)\right], \qquad (37')$$

что позволяет трактовать интегральные преобразования мод Эрмита–Лагерра–Гаусса в терминах дробного преобразования Фурье.

Данная работа была поддержана грантами РФФИ (04-02-96508-r2004) и CRDF (RUP1-2623-SA-04), программой «Полупроводниковые лазеры» Департамента физических наук РАН и программой «Исследования в приоритетных областях науки и технологии» Министерства науки и технологии РФ.

Литература

[1] Ананьев Ю.А. Оптические резонаторы и гауссовы пучки / Ю.А. Ананьев М.: Наука, 1990. 264 с.

[2] Виноградова, М.Б. Теория волн / М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков. М.: Наука, 1979. 384 с.

[3] Kogelnik, H. Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li. // Proceedings of IEEE. 1966. V. 54. P. 1312–1329.

[4] Kogelnik, H. Laser beams and resonators / H. Kogelnik, T. Li. // Applied Optics. 1966. V. 5. P. 1550–1567.

[5] Arnaud, J. Gaussian beams with general astigmatism / J. Arnaud, H. Kogelnik // Applied Optics. 1969. V. 25. P. 2908–2911.

[6] Абрамочкин, Е.Г. Функции Эрмита–Лагерра–Гаусса / Е.Г. Абрамочкин // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2001. №4. С. 19–41.
`http://www.ssu.samara.ru/~vestnik/est/2001web4/math/200140003.pdf`

[7] Abramochkin, E. Generalized Gaussian beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Journal of Optics A: Pure and Appl. Optics. 2004. V. 6. No. 5. P. S157–S161.
`http://www.iop.org/EJ/article/1464-4258/6/5/001/joa4_5_001.pdf`

[8] Nemes, G. Measurement of all ten second-order moments of an astigmatic beam by use of rotating simple astigmatic (anamorphic) optics / G. Nemes, A.E. Siegman // Journal of Opt. Soc. Am. A. 1994. V. 11. No. 8. P. 2257–2264.

[9] Ананьев, Ю.А. Еще раз о критериях "качества" лазерных пучков / Ю.А. Ананьев // Оптика и спектроскопия. 1999. Т. 86. №3. С. 499–502.

[10] Bélanger, P.A. Beam propagation and the *ABCD* ray matrices / P.A. Bélanger. // Optics Letters. 1991. V. 16. No. 4. P. 196–198.

[11] Варшалович, Д.А. Квантовая теория углового момента / Д.А. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. Л.: Наука, 1975. 439 с.

[12] Abramochkin, E. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // Optics Communications. 1991. V. 83. P. 123–135.

[13] Ozaktas, H.M. The fractional Fourier transform with applications in optics and signal processing / H.M. Ozaktas, M.A. Kutay, Z. Zalevsky. John Wiley, NY, 2000.

[14] Namias, V. The fractional order Fourier transform and its applications to quantum mechanics / V. Namias // Journ. Inst. Math. Appl. 1980. V. 25. P. 241–265.

Поступила в редакцию 7/*II*/2006.
в окончательном варианте — 7/*II*/2006.

GENERALIZED GAUSSIAN BEAMS AND ITS TRANSFORMATION IN ASTIGMATIC OPTICAL SYSTEMS[6]

© 2006 E.G. Abramochkin, E.V. Razueva, V.G. Volostnikov[7]

A transformation of a higher Gaussian beam in general astigmatic optical systems is described in terms of rotations in 3D space. This way is simpler than the direct Fourier integral evaluation and preferable for numerical simulations. The two examples of optical systems and corresponding transformations, connecting with mode converter and fractional Fourier transform, are discussed.

Paper received 7/*II*/2006.
Paper accepted 7/*II*/2006.

[6]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof. Y.N. Radayev.

[7]Abramochkin Eugeny Grigor'evich (`ega@fian.smr.ru`), Razueva Evgenia Vadimovna (`dev@fian.smr.ru`), Volostnikov Vladimir Gennadievich(`coherent@fian.smr.ru`), Coherent Optics Laboratory, Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute, Novo-Sadovaya St. 221, Samara, 443011, Russia.