

ПОСТРОЕНИЕ И РЕАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПЛАСТИН (МОДЕЛЬ ТИМОШЕНКО)¹

© 2006 Л.И. Фридман, К.С. Моргачев²

Для пластины, деформируемой в соответствии с гипотезой Тимошенко, в произвольных криволинейных ортогональных координатах на плоскости приводится решение нестационарной динамической задачи. Решение строится в рядах по собственным формам на основе полученных в работе условий ортогональности собственных форм и справедливо при любой комбинации следующих условий на контурах пластины: свободный край, шарнирное опирание и жесткая заделка. Показаны некоторые результаты вычислений при импульсном нагружении свободной кольцевой пластины.

Введение

Преимущества применения уточненной модели Тимошенко, учитывающей при изгибных колебаниях пластины инерцию поворота и деформации сдвига ее поперечных сечений, перед классической моделью Кирхгофа–Лява при описании динамики пластин известны и подтверждаются как сравнением с расчетами на основе теории упругости, так и экспериментально [1–3].

В настоящей работе в произвольных криволинейных ортогональных координатах на плоскости рассматривается динамика пластины, деформируемой в соответствии с гипотезой Тимошенко, в предположении, что контуры пластины совпадают с координатными линиями. Для такой пластины дается вывод условий ортогональности собственных форм, позволяющих получить решение нестационарной динамической задачи в рядах по собственным формам для нагрузок, заданных как произвольные функции координат и времени, при любой комбинации следующих условий на контурах пластины: свободный край, шарнирное опирание и жесткая заделка.

В качестве примера решения нестационарной динамической задачи с применением гипотезы Тимошенко рассматривается случай воздействия на

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором Ю.Н. Радаевым.

²Фридман Лев Израилевич, Моргачев Кирилл Сергеевич, кафедра сопротивления материалов и строительной механики Самарского государственного архитектурно-строительного университета, 443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, 194.

свободную кольцевую пластину самоуравновешенной импульсной нагрузки, реализованный с использованием средств системы компьютерной математики Mathematica 5.

1. Основные зависимости для пластины (модель Тимошенко) в произвольных криволинейных ортогональных координатах на плоскости

Уравнения равновесия (движения) колеблющейся пластины с учетом инерции поворота и деформаций сдвига в произвольных криволинейных ортогональных координатах α_1 и α_2 на плоскости записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 Q_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 Q_2) \right] &= -\frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - qR; \\ RQ_1 - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 M_1) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 M_{12}) + M_{12} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - M_2 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right] &= -\frac{D}{R} \frac{\partial^2 \vartheta_1}{\partial t^2}; \\ RQ_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 M_2) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 M_{12}) + M_{12} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - M_1 \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right] &= -\frac{D}{R} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где H_1, H_2 — коэффициенты Ляме; Q_1, M_1, M_{12} — погонные перерезывающая сила, изгибающий и крутящий моменты на линии $\alpha_2 = \text{const}$; Q_2, M_2, M_{12} — то же самое на линии $\alpha_1 = \text{const}$; ϑ_1, ϑ_2 — проекции осредненного поворота на плоскости, образованные нормалью к срединной плоскости и касательной соответственно к линиям $\alpha_2 = \text{const}$ и $\alpha_1 = \text{const}$; u — поперечное перемещение; R — характерный линейный размер; h — толщина пластины; t — безразмерное время, отнесенное к $R/c\sqrt{1-\nu^2}$; $c = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука в материале пластины; $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ — цилиндрическая жесткость; E, ν, ρ — модуль упругости, коэффициент Пуассона и массовая плотность материала пластины.

Погонные изгибающие и крутящий моменты определяются зависимостями:

$$M_1 = \frac{D}{R}(\chi_1 + \nu\chi_2); \quad M_2 = \frac{D}{R}(\chi_2 + \nu\chi_1); \quad M_{12} = \frac{D}{R}(1-\nu)\chi_{12}, \quad (1.2)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \vartheta_2; \quad \chi_2 = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \vartheta_1; \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\vartheta_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\vartheta_2}{H_2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Погонные перерезывающие силы определяются зависимостями:

$$Q_1 = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\vartheta_1 - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} \right); \quad Q_2 = \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left(\vartheta_2 - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} \right). \quad (1.4)$$

Коэффициент сдвига k определяется согласно [4] из уравнения:

$$16 \left(1 - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k \right) (1-k) - (2-k)^4 = 0. \quad (1.5)$$

2. Собственные формы и условия их ортогональности

При колебаниях по j -й собственной форме перемещения, осредненные повороты, моменты и перерезывающие силы определяются зависимостями:

$$\begin{aligned} u &= u_j e^{-i\lambda_j t}; \quad \vartheta_1 = \vartheta_{1j} e^{-i\lambda_j t}; \quad \vartheta_2 = \vartheta_{2j} e^{-i\lambda_j t}; \\ M_1 &= M_{1j} e^{-i\lambda_j t}; \quad M_2 = M_{2j} e^{-i\lambda_j t}; \quad M_{12} = M_{12j} e^{-i\lambda_j t}; \\ Q_1 &= Q_{1j} e^{-i\lambda_j t}; \quad Q_2 = Q_{2j} e^{-i\lambda_j t}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где u_j , ϑ_{1j} , ϑ_{2j} — перемещения и осредненные повороты j -й формы; M_{1j} , M_{2j} , M_{12j} — погонные изгибающие и крутящий моменты j -й формы; Q_{1j} , Q_{2j} — погонные перерезывающие силы j -й формы; $e^{-i\lambda_j t}$ — множитель, характеризующий изменение во времени перечисленных выше величин по гармоническому закону; i — мнимая единица; λ_j — безразмерная частота колебаний, отнесенная к $\sqrt{1 - \nu^2}/2\pi R$.

С учетом (2.1) уравнения движения колеблющейся пластины (1.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \lambda_j^2 u_j &= \frac{1 - \nu^2}{Eh} \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 Q_{1j}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 Q_{2j}) \right], \\ \lambda_j^2 \vartheta_{1j} &= \frac{R^2}{D} \left\{ Q_{1j} - \frac{1}{R} \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_2 M_{1j})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial (H_1 M_{12j})}{\partial \alpha_2} + M_{12j} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - M_{2j} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right] \right\}, \\ \lambda_j^2 \vartheta_{2j} &= \frac{R^2}{D} \left\{ Q_{2j} - \frac{1}{R} \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (H_1 M_{2j})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial (H_2 M_{12j})}{\partial \alpha_1} + M_{12j} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - M_{1j} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Умножим первое уравнение (2.2) на $u_n H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, второе — на $\frac{\varepsilon^2}{12} \vartheta_{1n} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2$ ($\varepsilon = \frac{h}{R}$ — относительная толщина пластины), третье — на $\frac{\varepsilon^2}{12} \vartheta_{2n} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, проинтегрируем по α_1 от α_1^* до α_1^{**} и по α_2 от α_1^* до α_1^{**} , после чего сложим их.

При этом следующие интегралы вычисляются интегрированием по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 Q_{1j}) u_n d\alpha_1 d\alpha_2 &= \\ &= \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} (H_2 Q_{1j} u_n) \Big|_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} d\alpha_2 - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} Q_{1j} \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 Q_{2j}) u_n d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 = \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} d\alpha_1 (H_1 Q_{2j} u_n) \Big|_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} Q_{2j} \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_2} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 M_{1j}) \vartheta_{1n} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 = \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} d\alpha_2 (H_2 M_{1j} \vartheta_{1n}) \Big|_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} M_{1j} \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_{1n}}{\partial \alpha_1} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 M_{12j}) \vartheta_{1n} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 = \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} d\alpha_1 (H_1 M_{12j} \vartheta_{1n}) \Big|_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} M_{12j} \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_{1n}}{\partial \alpha_2} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 M_{2j}) \vartheta_{2n} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 = \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} d\alpha_1 (H_1 M_{2j} \vartheta_{2n}) \Big|_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} M_{2j} \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \alpha_2} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2,
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 M_{12j}) \vartheta_{2n} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 = \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} d\alpha_2 (H_2 M_{12j} \vartheta_{2n}) \Big|_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} - \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} M_{12j} \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \alpha_1} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2.
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

После описанных действий, с учетом (2.3)-(2.8), получим:

$$\begin{aligned}
 \lambda_j^2 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \left[u_j u_n + \frac{\varepsilon^2}{12} (\vartheta_{1j} \vartheta_{1n} + \vartheta_{2j} \vartheta_{2n}) \right] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 = \frac{1 - \nu^2}{Eh} \left\{ \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} d\alpha_2 \left[H_2 Q_{1j} u_n - \frac{1}{R} (H_2 M_{1j} \vartheta_{1n} + H_2 M_{12j} \vartheta_{2n}) \right] \Big|_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} d\alpha_1 \left[H_1 Q_{2j} u_n - \frac{1}{R} (H_1 M_{12j} \vartheta_{1n} + H_1 M_{2j} \vartheta_{2n}) \right] \Big|_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} + \\
& + \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \left[Q_{1j} \left(\vartheta_{1n} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} \right) + Q_{2j} \left(\vartheta_{2n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_2} \right) + \right. \\
& + \frac{M_{1j}}{R} \left(\frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_{1n}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \vartheta_{2n} \right) + \frac{M_{2j}}{R} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \vartheta_{1n} \right) + \\
& \left. + \frac{M_{12j}}{R} \left(\frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_{1n}}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \vartheta_{1n} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \vartheta_{2n} \right) \right] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \Big\}. \quad (2.9)
\end{aligned}$$

При любом сочетании рассматриваемых вариантов граничных условий (см. табл. 1) первые два интеграла в правой части (2.9) равны нулю.

Таблица 1

Условия на границах пластины (модель Тимошенко)

$\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$

Наименование	Условия на границе	
	$\alpha_1 = \text{const}$	$\alpha_2 = \text{const}$
Свободный край	$M_1 = 0, Q_1 = 0, M_{12} = 0;$	$M_2 = 0, Q_2 = 0, M_{12} = 0;$
Шарнирное опирание	$M_1 = 0, u = 0, \vartheta_2 = 0;$	$M_2 = 0, u = 0, \vartheta_1 = 0;$
Жесткая заделка	$u = 0, \vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 0;$	$u = 0, \vartheta_1 = 0, \vartheta_2 = 0$

Записывая (1.2) для n -й формы колебаний, получим:

$$\chi_{1n} = \frac{R}{D} \frac{M_{1n} - \nu M_{2n}}{1 - \nu^2}; \quad \chi_{2n} = \frac{R}{D} \frac{M_{2n} - \nu M_{1n}}{1 - \nu^2}; \quad \chi_{12n} = \frac{R}{D} \frac{M_{12n}}{1 - \nu}. \quad (2.10)$$

Запись (1.3) для n -й формы дает:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H_1} \frac{\partial \vartheta_{1n}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \vartheta_{2n} &= \chi_{1n}; \quad \frac{1}{H_2} \frac{\partial \vartheta_{2n}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \vartheta_{1n} = \chi_{2n}; \\
\frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\vartheta_{1n}}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\vartheta_{2n}}{H_2} \right) &= 2\chi_{12n}. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Кроме того, записывая (1.4) для n -й формы, получим:

$$\left(\vartheta_{1n} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{2(1 + \nu)}{kEh} Q_{1n}; \quad \left(\vartheta_{2n} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_n}{\partial \alpha_2} \right) = \frac{2(1 + \nu)}{kEh} Q_{2n}. \quad (2.12)$$

Учитывая (2.10)–(2.12), запишем (2.9) в виде:

$$\begin{aligned}
 & \lambda_j^2 \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \left[u_j u_n + \frac{\varepsilon^2}{12} (\vartheta_{1j} \vartheta_{1n} + \vartheta_{2j} \vartheta_{2n}) \right] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \\
 & = \frac{1-\nu^2}{Eh} \left\{ \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \left[\frac{2(1+\nu)}{Ekh} (Q_{1j} Q_{1n} + Q_{2j} Q_{2n}) + \right. \right. \\
 & + \frac{12}{Eh^3} (M_{1j} M_{1n} + M_{2j} M_{2n} - \nu M_{1j} M_{2n} - \nu M_{1n} M_{2j}) + \\
 & \left. \left. + \frac{24(1+\nu)}{Eh^3} M_{12j} M_{12n} \right] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \right\}. \quad (2.13)
 \end{aligned}$$

Так как правая часть (2.13) симметрична относительно индексов j и n , то, записывая аналогичное выражение для n -ой формы, вычитая его из (2.13) и учитывая, что $\lambda_j^2 \neq \lambda_n^2$, получим условия ортогональности собственных форм (для $j \neq n$):

$$\int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \left[u_j u_n + \frac{\varepsilon^2}{12} (\vartheta_{1j} \vartheta_{1n} + \vartheta_{2j} \vartheta_{2n}) \right] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0. \quad (2.14)$$

Метод вычисления собственных частот λ_j и собственных форм u_j , ϑ_{1j} и ϑ_{2j} зависит от вида конкретной системы координат.

Условия ортогональности (2.14) в частном случае прямоугольных координат совпадают с полученными в [5].

3. Решение нестационарной задачи для произвольной нагрузки

По известным собственным частотам и формам в произвольных криволинейных ортогональных координатах на плоскости можно построить решение задачи о нестационарных колебаниях пластины при заданной нагрузке $q(\alpha_1, \alpha_2, t)$ и представить его в рядах по собственным формам:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t) u_j; \quad \vartheta_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t) \vartheta_{1j}; \quad \vartheta_2 = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t) \vartheta_{2j}, \quad (3.1)$$

где $\varphi_j(t)$ — подлежащая определению функция времени.

Подставляя (3.1) в зависимости (1.2) и (1.4), а полученные моменты M_{1j} , M_{2j} , M_{12j} и перерезывающие силы Q_{1j} , Q_{2j} j -й формы колебаний в

уравнения (1.1), получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 Q_{1j}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 Q_{2j}) \right] \varphi_j + \frac{Eh}{1 - \nu^2} \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} u_j \right\} &= -qR; \\
\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[R Q_{1j} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 M_{1j}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 M_{12j}) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + M_{12j} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} - M_{2j} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} \right) \right] \varphi_j + \frac{D}{R} \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} \vartheta_{1j} \right\} = 0; \\
\sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \left[R Q_{2j} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_2} (H_1 M_{2j}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (H_2 M_{12j}) + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + M_{12j} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} - M_{1j} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} \right) \right] \varphi_j + \frac{D}{R} \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} \vartheta_{2j} \right\} = 0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) с учетом (2.2) примет вид:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + \lambda_j^2 \varphi_j \right) u_j &= -\frac{1 - \nu^2}{Eh} qR; \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + \lambda_j^2 \varphi_j \right) \vartheta_{1j} = 0; \\
\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + \lambda_j^2 \varphi_j \right) \vartheta_{2j} &= 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Умножая первое уравнение (3.3) на $u_j H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, второе — на $\frac{\varepsilon^2}{12} \vartheta_{1j} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, третье — на $\frac{\varepsilon^2}{12} \vartheta_{2j} H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2$, складывая их и интегрируя по срединной плоскости пластины, с учетом условий ортогональности (2.14), получим

$$\frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} + \lambda_j^2 \varphi_j = \frac{1 - \nu^2}{E\varepsilon} f_j(t), \tag{3.4}$$

где

$$f_j(t) = -\frac{1}{C_j} \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} q(\alpha_1, \alpha_2, t) u_j H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{3.5}$$

$$C_j = \int_{\alpha_1^*}^{\alpha_1^{**}} \int_{\alpha_2^*}^{\alpha_2^{**}} \left[u_j^2 + \frac{\varepsilon^2}{12} (\vartheta_{1j}^2 + \vartheta_{2j}^2) \right] H_1 H_2 d\alpha_1 d\alpha_2. \tag{3.6}$$

Решение уравнения (3.4) для нулевых начальных условий записывается в виде:

$$\varphi_j(t) = \frac{1 - \nu^2}{E\varepsilon} \frac{1}{\lambda_j} \int_0^t f_j(\tau) \sin \lambda_j(t - \tau) d\tau \tag{3.7}$$

где τ — переменная интегрирования.

Таким образом, зависимости (3.1) и (3.7) дают решение задачи о нестационарных колебаниях пластины (модель Тимошенко) в произвольных кри-

волинейных ортогональных координатах на плоскости и позволяют вычислять характеристики напряженно-деформированного состояния в любой точке пластины для нагрузок, заданных как произвольные функции координат и времени.

4. Импульсное воздействие на свободную кольцевую пластину

Рассмотрим кольцевую пластину в безразмерных полярных координатах: $\alpha_1 = r$ — полярный радиус, отнесенный к внешнему радиусу R пластины, $\alpha_2 = \theta$ — полярный угол.

Для кольцевой пластины зависимости (3.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{jm}(t) u_{jm}(r) \cos(m\theta), \\ \vartheta_r &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{jm}(t) \vartheta_{r,jm}(r) \cos(m\theta), \\ \vartheta_{\theta} &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_{jm}(t) \vartheta_{\theta,jm}(r) \sin(m\theta), \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $u_{jm}(r)$, $\vartheta_{r,jm}(r)$, $\vartheta_{\theta,jm}(r)$ — безразмерные формы, которые могут быть вычислены по формулам (6) известного решения [6] стационарной динамической задачи для кольцевой пластины.

Для кольцевых пластин условие периодичности по угловой координате θ упрощает собственные формы, которые характеризуются индексами j и m (m — число узловых диаметров, j — порядковый номер формы колебаний с фиксированным числом узловых диаметров). По этой причине для параметров, характеризующих нестационарные колебания кольцевых пластин, одинарный индекс j заменен на двойной индекс jm .

Зависимость (3.5) в полярных координатах позволяет строить решение нестационарной задачи для широкого класса нагрузок. Например, если в точке пластины с координатами $r = r_0$ и $\theta = \theta_0$ действует сосредоточенная сила $P(t)$, заданная как функция времени, то ее следует заменить распределенной нагрузкой

$$q(t) = \frac{2P(t)}{R^2(r_0^2 - r_*^2)(\theta_0 - \theta_*)}, \quad (4.2)$$

приложенной в кольцевом секторе, ограниченном линиями $r = r_*$, $r = r_0$, $\theta = \theta_*$ и $\theta = \theta_0$.

Подстановка (4.2) в (3.5) и переход к пределу при $r_* \rightarrow r_0$ и $\theta_* \rightarrow \theta_0$ дают решение для сосредоточенной силы:

$$f_{jm}(t) = -\frac{1}{C_{jm}} \frac{P(t)}{R^2} u_{jm}(r_0) \cos(m\theta_0). \quad (4.3)$$

Если на линии $r = r_0$ действует распределенная по ней самоуравновешенная нагрузка $P(t) \cos(m_0\theta)$, то замена ее распределенной нагрузкой

$$q(t) = \frac{P(t) \cos(m_0\theta)}{R(r_0 - r_*)}, \quad (4.4)$$

действующей в кольце $r_* \leq r \leq r_0$, и подстановка (4.4) в (3.5) с последующим переходом к пределу при $r_* \rightarrow r_0$ дают

$$f_{jm_0}(t) = -\frac{\pi}{C_{jm_0}} \frac{P(t)}{R} r_0 u_{jm_0}(r_0). \quad (4.5)$$

Здесь, в отличие от нагружения сосредоточенной силой, функция $f_{jm_0}(t)$ отлична от нуля только при $m = m_0$, поэтому двойные суммы в (4.1) переходят в одинарные.

Зависимость (3.6) для кольцевых пластин после вычисления интегралов по θ принимает вид

$$C_{jm} = \pi \int_{r_1}^{r_2} [u_{jm}^2 + \frac{\varepsilon^2}{12} (\vartheta_{r,jm}^2 + \vartheta_{\theta,jm}^2)] r dr, \quad (4.6)$$

где r_1, r_2 — радиусы соответственно внутреннего и внешнего контуров кольцевой пластины.

На рис. 1 приведены результаты вычислений безразмерных перемещений u , отнесенных к $(1 - \nu^2)P_0/E\varepsilon$, точек срединной плоскости свободной кольцевой пластины для случая действия самоуравновешенной импульсной нагрузки, заданной выражением:

$$P(t) = \begin{cases} P_0 \sin\left(\pi \frac{t}{t_0}\right), & \text{при } 0 < t < t_0; \\ P(t) = 0, & \text{при } t \geq t_0; \end{cases} \quad (4.7)$$

где t_0 и P_0 — соответственно продолжительность и максимальное (амплитудное) значение импульсного воздействия.

Вычисления проводились с использованием средств системы компьютерной математики Mathematica 5. В расчете принималось: $r_1 = 0.3$, $r_2 = 1$, $\varepsilon = 0.5$, $\nu = 0.3$, $t_0 = 2\pi/\lambda_{13}$, $t = 20$.

Таким образом, при действии импульсной нагрузки (4.7) на внешнем контуре кольцевой пластины (см. рисунок, позиция *a*) перемещения u точек срединной плоскости на внешнем контуре значительно превосходят перемещения соответствующих точек на внутреннем контуре пластины. При импульсном воздействии на внутреннем контуре пластины (см. рисунок, позиция *b*) перемещения точек срединной плоскости на обоих контурах имеют близкие значения.

Таблица 2

Проверка сходимости результатов вычислений

j	5	10	15	20	25	30
u	4.46709	4.48196	4.4863	4.48693	4.48647	4.48635

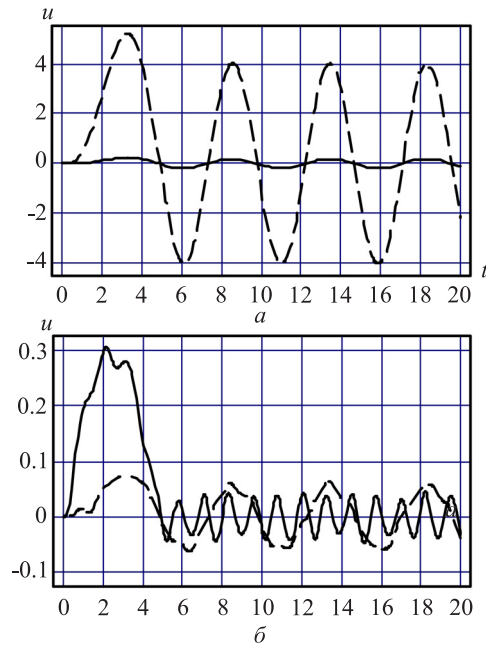


Рис. 1. Перемещения u точек срединной плоскости на внешнем (---) и внутреннем (—) контурах кольцевой пластины при импульсном воздействии на внешнем (а) и внутреннем (б) контурах

Результаты вычислений безразмерных перемещений u точек срединной плоскости на внешнем контуре свободной кольцевой пластины, полученные при изменении числа удерживаемых форм колебаний j в рядах (4.1) от 5 до 30, показывают быструю сходимость (см. табл. 2).

Заключение

Построение аналитических методов динамического расчета пластин, основанных на применении уточненных кинематических гипотез (модель Тимошенко), с их реализацией в современных системах компьютерной математики (Mathematica 5) расширяет возможности теории колебаний пластин при анализе напряженно-деформированного состояния в произвольной точке элементов сооружений и машин, схематизируемых пластинами различной конфигурации в плане.

Литература

- [1] Динамика упругих тел / В.Т.Головчан [и др.] Т. 5. Киев: Наукова думка, 1986. 286 с.
- [2] Кузнецов, Н.Д. Особенности низкочастотного спектра собственных колебаний цилиндрических тел / Н.Д.Кузнецов, Л.И.Фридман,

- Ю.Н. Шапошников // Доклады АН СССР. 1990. Т. 312. №1. С. 55–58.
- [3] Фридман, Л.И. Нестационарная динамическая задача теории упругости для конечного цилиндра / Л.И. Фридман // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 2003. №2(28). С. 113–121.
- [4] Скучик, Е. Простые и сложные колебательные системы / Е. Скучик. М.: Мир, 1971. 557 с.
- [5] Дубинкин, М.В. Колебания плит с учетом инерции вращения и сдвига / М.В. Дубинкин // Изв. АН СССР. ОТН мех. и машиностроения. 1958. №12. С. 131–135.
- [6] Фридман, Л.И. Решение стационарной динамической задачи для кольцевой пластины в рамках модели Тимошенко / Л.И. Фридман, К.С. Моргачев // Вестн. Самар. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2005. Вып. 34. С. 68–71.

Поступила в редакцию 27/II/2006;
в окончательном варианте — 27/II/2006.

CONSTRUCTION AND IMPLEMENTATION OF PLATE UNSTEADY OSCILLATIONS PROBLEM SOLUTION (THE TIMOSHENKO MODEL)³

© 2005 L.I. Fridman, K.S. Morgachev⁴

Unsteady oscillation dynamic analysis for plates strained according to the Timoshenko hypothesis is given in random curvilinear orthogonal planimetric coordinates. Analysis is developed by series according to characteristic modes on the basis of devised orthogonality conditions. It remains valid at any combination of the following conditions at plate contour: free edge, hinge support and anchorage. Numerical results for a free annular plate under impulsive loading are presented.

Paper received 27/II/2006.

Paper accepted 27/II/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. Y.N. Radayev.

⁴Fridman Lev Israilevich, Morgachev Kirill Sergeevich, Dept. of Strength of Materials and Structural Mechanics, Samara State Architecture Building University, Samara, 443001, Russia.