

ЭКСТРАПОЛЯЦИЯ В ШКАЛЕ L_p -ПРОСТРАНСТВ И СХОДИМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ В ПРОСТРАНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА¹

© 2006 К.В. Лыков²

Работа является продолжением исследований, начатых в [1–4], и посвящена теории экстраполяции в шкале L_p -пространств. Доказаны некоторые новые соотношения между нормами в классе симметричных пространств. Рассмотрены приложения к вопросу сходимости ортогональных рядов.

Введение

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $\{A_\theta\}$ и $\{B_\theta\}$ — два семейства банаховых пространств ($\theta \in \Theta$ — параметр), а T — линейный оператор такой, что

$$T : A_\theta \rightarrow B_\theta, \|T\|_{A_\theta \rightarrow B_\theta} \leq C_\theta.$$

Возникает вопрос, для каких пространств A и B можно сделать заключение

$$T : A \rightarrow B.$$

Одним из первых результатов, относящихся к этой проблематике, является следующее, ставшее классическим, утверждение.

Теорема (Яно, см. [5] или [6, гл. 12]). Пусть T — линейный оператор, определенный на некотором подмножестве $L_1[0, 1]$.

1. Если T действует в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in (1, p_0]$ и

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O((p-1)^{-\alpha}) \text{ при } p \rightarrow 1 \text{ и некотором } \alpha > 0,$$

то T можно доопределить до оператора на пространстве Лоренца $L(\log L)^\alpha$, действующего ограниченно в L_1 :

$$\|Tx\|_{L_1} \leq C \|x\|_{L(\log L)^\alpha}, \text{ где } \|x\|_{L(\log L)^\alpha} := \int_0^1 \ln^\alpha(e/t) x^*(t) dt,$$

¹Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

²Лыков Константин Владимирович (alkv@list.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

где $x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$.

2. Если T действует в пространствах $L_p[0, 1]$ при $p \in [p_0, \infty)$ и

$$\|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = O(p^\alpha) \text{ при } p \rightarrow \infty \text{ и некотором } \alpha > 0,$$

то T действует из L_∞ в пространство Орлиха $\text{Exp } L^{1/\alpha}$:

$$\|Tx\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} \leq C \|x\|_{L_\infty}, \text{ где } \|x\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} := \sup_{0 < t \leq 1} \ln^{-\alpha}(e/t) x^*(t).$$

В конце 80-х — начале 90-х годов прошлого века началась разработка общих подходов теории экстраполяции, связанная прежде всего с именами Яверса и Мильмана [7-9]. В частности, используя введенные ими функторы пересечения Δ и суммы Σ , они получили экстраполяционное описание пространств, фигурирующих в теореме Яно (см., например, [9, с. 22-23]):

$$\Delta_{p_0 < p < \infty} (p^{-\alpha} L_p) = \text{Exp } L^{1/\alpha} \text{ и } \Sigma_{1 < p < p_0} ((p-1)^{-\alpha} L_p) = L(\log L)^\alpha.$$

Рассмотрим подробнее функтор пересечения Δ . Если $\{A_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ — семейство банаховых пространств, непрерывно вложенных в одно и то же банахово пространство $\mathcal{A}$, то

$$\Delta_{\theta \in \Theta} (A_\theta) = \left\{ a \in \mathcal{A} : \|a\|_\Delta = \sup_{\theta \in \Theta} \|a\|_{A_\theta} < \infty \right\},$$

т.е.

$$\|a\|_\Delta = \left\| \|a\|_{A_\theta} \right\|_{L_\infty}, \quad (*)$$

где L_∞ — пространство ограниченных функций на Θ . Согласно описанию Мильмана и Яверса

$$\|x\|_{\text{Exp } L^{1/\alpha}} = \left\| \frac{\|x\|_p}{p^\alpha} \right\|_{L_\infty(p_0, \infty)},$$

откуда, с учетом простого соотношения

$$\|x\|_{L_\infty} = \left\| \|x\|_p \right\|_{L_\infty(p_0, \infty)},$$

вторая часть теоремы Яно следует тривиальным образом. Еще больше возможностей для получения утверждений экстраполяционного типа возникает, если в (*) заменить L_∞ произвольным банаховым пространством. Конструкции такого вида были предложены С.В. Асташкиным [3-4]. Настоящая работа посвящена описанию с помощью подобных конструкций некоторых классов симметричных пространств. В последнем параграфе продемонстрированы возможности приложений теории экстраполяции к классическим вопросам анализа.

1. Предварительные сведения

Всюду далее вложение одного банахова пространства в другое понимается как непрерывное, т.е. $X_1 \subset X_0$ означает, что из $x \in X_1$ следует: $x \in X_0$ и $\|x\|_{X_0} \leq C \|x\|_{X_1}$ для некоторого $C > 0$. Под равенством $X_1 = X_0$ для банаховых пространств будем подразумевать их совпадение с эквивалентностью

норм. Выражение вида $F_1 \asymp F_2$ означает, что $cF_1 \leq F_2 \leq CF_1$ для некоторых $c > 0$ и $C > 0$, причем эти константы не зависят от всех или части аргументов F_1 и F_2 .

В работе речь будет идти о симметричных (перестановочно инвариантных) функциональных пространствах, подробное изложение теории которых можно найти в монографиях [10, 11]. Напомним, что банахово пространство X измеримых функций, определенных на $[0, 1]$, называется симметричным, если выполнены следующие условия:

а) из того, что $y = y(t) \in X$ и $|x(t)| \leq |y(t)|$, следует, что $x = x(t) \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$;

б) если $y = y(t) \in X$ и $x^*(t) = y^*(t)$, то $x \in X$ и $\|x\| = \|y\|$ (через $x^*(t)$ обозначена перестановка функции $|x(t)|$, т.е. равноизмеримая с $|x(t)|$ невозрастающая функция).

Важным и наиболее простым примером симметричных пространств являются L_p -пространства ($1 \leq p \leq \infty$) с обычной нормой:

$$\|x\|_p = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \quad \text{и} \quad \|x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$$

При этом при $p > q$ имеет место вложение (с константой 1) $L_p \subset L_q$. Кроме того, L_∞ является самым узким из всех симметричных пространств на $[0, 1]$, а L_1 — самым широким [11, с. 124].

Другие примеры симметричных пространств — пространства Лоренца и Марцинкевича. Пусть $\varphi(t)$ — квазивогнутая функция на $[0, 1]$ (т.е. положительная непрерывная функция на $(0, 1]$ такая, что $\varphi(t)$ и $t/\varphi(t)$ возрастают). Кроме того, будем считать, что $\varphi(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$. Пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций $x(t)$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{M(\varphi)} = \sup_{0 < s \leq 1} \frac{\varphi(s)}{s} \cdot \int_0^s x^*(t) dt.$$

Если, кроме прочего, $\varphi(t)$ вогнута, то можно определить пространство Лоренца $\Lambda_p(\varphi)$ ($1 \leq p < \infty$) с нормой

$$\|x\|_{\Lambda_p(\varphi)} = \left(\int_0^1 (x^*(t))^p d\varphi(t) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Важной характеристикой симметричного пространства E является его фундаментальная функция $\phi_E(t) = \|\chi_{(0,t)}\|_E$, где через $\chi_{(0,t)}$ обозначена характеристическая функция (индикатор) интервала $(0, t)$. В частности, $\phi_{M(\varphi)}(t) = \varphi(t)$, $\phi_{\Lambda_p(\varphi)}(t) = (\varphi(t))^{\frac{1}{p}}$. Кроме того, пространство $\Lambda(\varphi) := \Lambda_1(\varphi)$ — самое узкое, а пространство $M(\varphi)$ — самое широкое из всех симметричных пространств с фундаментальной функцией $\varphi(t)$ [11, с. 160, 162].

Функция растяжения положительной функции $\varphi(t)$, $t \in (0, 1]$, определяется соотношением

$$\mathcal{M}_\varphi(s) = \sup_{0 < t \leq \min(1, 1/s)} \frac{\varphi(st)}{\varphi(t)}, \quad 0 < s < \infty.$$

При этом числа

$$\gamma_\varphi = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln \mathcal{M}_\varphi(s)}{\ln s} \quad \text{и} \quad \delta_\varphi = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathcal{M}_\varphi(s)}{\ln s}$$

называются нижним и верхним показателями растяжения функции $\varphi(t)$.

Важную роль в теории симметричных пространств играют операторы растяжения [11, с. 131]

$$\sigma_\tau x(t) = x(t/\tau) \cdot \chi_{(0, \min\{1, 1/\tau\})}(t), \quad \tau > 0.$$

Эти операторы действуют ограниченно в любом симметричном пространстве. Числа

$$\alpha_E = \lim_{\tau \rightarrow 0+} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau} \quad \text{и} \quad \beta_E = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\sigma_\tau\|_E}{\ln \tau}$$

называются нижним и верхним индексами Бойда пространства E . Всегда

$$0 \leq \alpha_E \leq \gamma_{\Phi_E} \leq \delta_{\Phi_E} \leq \beta_E \leq 1.$$

Если F — банахово идеальное пространство функций на некотором множестве Ω , а v — положительная функция (вес) на Ω , то через $F(v)$ будем обозначать банахово пространство с нормой

$$\|x\|_{F(v)} = \|x \cdot v\|_F.$$

Пусть $\bar{A} = (A_0, A_1)$ — банахова пара, т.е. пара банаховых пространств, вложенных в одно и то же линейное топологическое отделимое пространство. $\mathcal{K}$ -функционалом элемента $a \in A_0 + A_1$ называется следующее семейство норм:

$$\mathcal{K}(t, a, \bar{A}) = \inf_{a = a_0 + a_1} \{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}\}, \quad t > 0.$$

Если F — банахова решетка функций на $(0, \infty)$ такая, что

$$F \supset L_\infty \cap L_\infty(1/t),$$

то отображение

$$\bar{A} \rightarrow (A_0, A_1)_F^{\mathcal{K}},$$

где $(A_0, A_1)_F^{\mathcal{K}}$ — банахово пространство с нормой

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_F^{\mathcal{K}}} = \|\mathcal{K}(t, a, \bar{A})\|_F < \infty,$$

определяет точный интерполяционный функтор на множестве всех банаховых пар [12].

2. Пространства $\mathcal{L}_F$ и их свойства

В этом параграфе мы опишем некоторую общую конструкцию, позволяющую получать целые серии симметричных пространств с экстраполяционными свойствами по отношению к шкале L_p -пространств.

Пусть F — идеальное банахово пространство функций, определенных на $[1, +\infty)$ (банахова решетка), $L_\infty \subset F$. Рассмотрим множество $\mathcal{L}_F$ функций $x(t)$ на $[0, 1]$ таких, что $\xi = \xi(p) := \|x\|_p \in F$. Как обычно, функции, совпадающие почти всюду, будем отождествлять.

Теорема 2.1. $\mathcal{L}_F$ — симметричное пространство с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{L}_F} := \|\xi\|_F.$$

Доказательство. Линейность $\mathcal{L}_F$ и свойства нормы проверяются элементарно. Докажем полноту.

Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в $\mathcal{L}_F$. Тогда для любого $r \geq 1$

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m\|_{\mathcal{L}_F} &= \left\| \|x_n - x_m\|_p \right\|_F \geq \left\| \|x_n - x_m\|_p \cdot \chi_{[r, r+1]}(p) \right\|_F \geq \\ &\geq \left\| \|x_n - x_m\|_r \cdot \chi_{[r, r+1]}(p) \right\|_F = \|x_n - x_m\|_r \cdot \left\| \chi_{[r, r+1]}(p) \right\|_F \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\|x_n - x_m\|_r \rightarrow 0 \text{ для всех } r \in [1, +\infty).$$

Так как пространства L_r полны и $L_{r_1} \subset L_{r_2}$ при $r_1 > r_2$, то существует функция $x = x(t)$ такая, что

$$x_n \rightarrow x \text{ в } L_r \text{ для всех } r \in [1, +\infty).$$

Выберем из последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ такую, что

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_{\mathcal{L}_F} < 2^{-k}.$$

Достаточно доказать, что

$$\|x_{n_k} - x\|_{\mathcal{L}_F} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ и $p \in [1, \infty)$ существует $j_0 = j_0(p)$ такое, что при $j \geq j_0$

$$\|x_{n_j} - x\|_p < \varepsilon.$$

Для каждого натурального k положим $m = m(p) = \max(j_0(p), k)$. Тогда

$$\begin{aligned} \|x_{n_k} - x\|_{\mathcal{L}_F} &= \left\| \|x_{n_k} - x\|_p \right\|_F = \left\| \left\| \sum_{i=k}^{m-1} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) + (x_{n_m} - x) \right\|_p \right\|_F \leq \\ &\leq \left\| \left\| \sum_{i=k}^{m-1} (x_{n_i} - x_{n_{i+1}}) \right\|_p \right\|_F + \left\| \|x_{n_m} - x\|_p \right\|_F \leq \\ &\leq \left\| \sum_{i=k}^{m-1} \|x_{n_i} - x_{n_{i+1}}\|_p \right\|_F + \varepsilon \|\chi_{[1, +\infty)}(p)\|_F \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left\| \sum_{i=k}^{\infty} \|(x_{n_i} - x_{n_{i+1}})\|_p \right\|_F + \varepsilon C \|\chi_{[1,+\infty)}(p)\|_{L_{\infty}} \leq \\ &\leq \sum_{i=k}^{\infty} \left\| \|(x_{n_i} - x_{n_{i+1}})\|_p \right\|_F + \varepsilon C_1 \leq \sum_{i=k}^{\infty} 2^{-i} + \varepsilon C_1 = 2^{-k+1} + \varepsilon C_1 = \varepsilon_1, \end{aligned}$$

где ε_1 может быть сделано сколь угодно малыми за счет выбора k и ε . Поэтому $x_{n_k} \rightarrow x$ в $\mathcal{L}_F$, и, следовательно, $x_n \rightarrow x$ в $\mathcal{L}_F$.

Так как $L_{\infty} \subset F$, то $F \neq \emptyset$ ($y = \chi_{[0,1]}(t) \in F$). Симметричность $\mathcal{L}_F$ очевидна.

Замечание 2.1. Вместо решетки F на $[1, +\infty)$ можно рассматривать решетку F_1 на $[p_0, +\infty)$, определяя норму в $\mathcal{L}_{F_1}$ аналогично. Более того, если нормы в F и F_1 связаны следующим образом:

$$\|f\|_{F_1} = \|f \cdot \chi_{[p_0, +\infty)}\|_F,$$

то пространства $\mathcal{L}_F$ и $\mathcal{L}_{F_1}$ совпадают, и нормы в них эквивалентны (т.е. имеет место изоморфизм банаховых пространств). Это следует из того, что тождественный оператор

$$I : \mathcal{L}_F \rightarrow \mathcal{L}_{F_1}, \quad Ix = x$$

ограничен и биективен. Поэтому он обратим по теореме Банаха об обратном операторе.

Определение 2.1. Будем говорить, что симметричное пространство E экстраполяционно и писать $E \in \mathcal{E}$, если

$$E = \mathcal{L}_F$$

для некоторой решетки $F \supset L_{\infty}$. При этом F будем называть параметром экстраполяции (или просто параметром).

Лемма 2.1. Если симметричное пространство $E \in \mathcal{E}$, то верхний индекс Бойда пространства E

$$\beta_E = 0.$$

Доказательство. Для изоморфных пространств индексы Бойда равны. Поэтому, согласно замечанию 2.1, $\beta_E = \beta_{E_1}$, где E_1 определяется нормой

$$\|x\|_{E_1} = \left\| \|x\|_p \cdot \chi_{[p_0, +\infty)} \right\|_F.$$

Пусть σ_{τ} — оператор растяжения. Так как $\|\sigma_{\tau}x\|_p \leq \tau^{1/p} \|x\|_p$, то при $\tau \geq 1$

$$\|\sigma_{\tau}x\|_{E_1} \leq \tau^{1/p_0} \|x\|_{E_1}.$$

Поэтому

$$\|\sigma_{\tau}\|_{E_1 \rightarrow E_1} \leq \tau^{1/p_0}$$

и, следовательно,

$$\beta_E = \beta_{E_1} \leq 1/p_0.$$

Доказательство леммы завершается устремлением p_0 к бесконечности.

Рассмотрим теперь следующую конструкцию. Пусть E — произвольное симметричное пространство на $[0, 1]$, x^* — перестановка функции $x \in E$. Положим для произвольного $p \in [1, +\infty]$

$$\eta(p) = \left\| x^* \chi_{[e^{-p+1}, e^{-p+2}]} \right\|_p. \quad (2.1)$$

Тогда

$$x^*(e^{-p+2}) \leq e\eta(p) \leq ex^*(e^{-p+1}). \quad (2.2)$$

Рассмотрим теперь банахово идеальное пространство $\tilde{E}$ функций $f(p)$ на $[1, +\infty)$ с нормой

$$\|f\|_{\tilde{E}} = \|f(\ln e/t)\|_E.$$

Имеет место эквивалентность

$$\|x\|_E \asymp \|\eta\|_{\tilde{E}}, \quad (2.3)$$

где функция $\eta = \eta(p)$ определена в (2.1). Действительно,

$$\|\eta\|_{\tilde{E}} = \|\eta(\ln e/t)\|_E,$$

и, учитывая (2.2), имеем

$$\|x^*(et)\|_E \leq e \|\eta\|_{\tilde{E}} \leq e \|x^*(t)\|_E. \quad (2.4)$$

Так как оператор растяжения σ_e ограничен в любом симметричном пространстве, и $\sigma_e x^*(et) = x^*(t)$, то

$$\|x^*(t)\|_E \leq \|\sigma_e\|_{E \rightarrow E} \cdot \|x^*(et)\|_E.$$

Из последнего неравенства и (2.4) получаем (2.3).

Замечание 2.2. Если положить

$$\eta(p) = \|x^* \cdot \chi_{[Ac^{-p}, Bc^{-p}]}\|_p$$

с произвольными $B > A > 0$, $c > 1$, то и в этом случае (2.3) будет выполняться.

Конструкция, участвующая в правой части соотношения (2.3), напоминает конструкцию пространств $\mathcal{L}_F$. Очевидно, что всегда имеет место вложение

$$\mathcal{L}_{\tilde{E}} \subset E.$$

Естественно возникает вопрос, когда

$$\mathcal{L}_{\tilde{E}} = E. \quad (2.5)$$

Определение 2.2. Если для симметричного пространства E выполняется соотношение (2.5), то будем говорить, что E — сильно экстраполяционно, и писать $E \in \tilde{\mathcal{E}}$.

Определение 2.3. Пусть $\varphi(t)$ — фундаментальная функция симметричного пространства E . Будем говорить, что φ удовлетворяет Δ^2 -условию ($\varphi \in \Delta^2$), если для некоторого α выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leq \alpha \varphi(t^2), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2.6)$$

Теорема 2.2. Если E — пространство Марцинкевича $M(\varphi)$ или E — пространство Лоренца $\Lambda_r(\varphi)$, то соотношение (2.5) имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Delta^2$.

Доказательство. Пусть $E = M(\varphi)$. В случае (2.5), равно как и в случае (2.6), верхний индекс Бойда $\beta_E = 0$ (если выполнено (2.6), то верхний показатель растяжения функции $\varphi(t)$ $\delta_\varphi = 0$, но для пространств Марцинкевича

$\delta_\varphi = \beta_E$ [11, с.138]). Поэтому для нормы в пространстве $M(\varphi)$ справедливо соотношение [11, с.156]:

$$\|x\|_{M(\varphi)} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} \varphi(t)x^*(t).$$

Следовательно,

$$\|f\|_{\tilde{E}} \asymp \sup_{0 < t \leq 1} \varphi(t)f(\ln e/t) \asymp \sup_{1 \leq p < \infty} \varphi(e^{-p})f(p),$$

и утверждение доказываемой теоремы следует из теоремы 2 работы [4].

Случай пространств Лоренца следует из теоремы 3 той же работы.

Замечание 2.3. Из теорем 2 и 3 работы [4] следует, в частности, что если $\varphi \in \Delta^2$, то

$$M(\varphi) = \mathcal{L}_{F_\varphi}, \quad \Lambda_r(\varphi) = \mathcal{L}_{G_{r,\varphi}}, \quad (2.7)$$

где

$$F_\varphi = L_\infty(\varphi(e^{-p})), \quad G_{r,\varphi} = L_r(e^{-p/r}\varphi'(e^{-p})^{1/r}).$$

Покажем, что Δ^2 -условие является общим свойством фундаментальных функций сильно экстраполяционных пространств.

Лемма 2.2. Пусть E — симметричное пространство, для которого справедливо (2.5). Тогда для фундаментальной функции $\varphi(t)$ пространства E выполняется соотношение (2.6).

Доказательство. Достаточно доказать (2.6) для $t = e^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$. Если выполнено (2.5), то

$$\varphi(e^{-2k}) \asymp \left\| \left\| \chi_{[0, e^{-2k}]} \right\|_p \right\|_{\tilde{E}} = \|e^{-2k/p}\|_{\tilde{E}},$$

и, так как при $p \geq k$ выполняется $e^{-2k/p} \geq e^{-2}$, то

$$\varphi(e^{-2k}) \geq c \left\| \chi_{[k, +\infty)} \right\|_{\tilde{E}} \asymp \left\| \chi_{[0, e^{-k}]} \right\|_E = \varphi(e^{-k}),$$

откуда

$$\varphi(e^{-k}) \leq \alpha \cdot \varphi(e^{-2k}), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Возникает вопрос: верно ли обратное заключение, т.е. следует ли из Δ^2 -условия равенство (2.5)? Покажем, что для довольно широкого класса пространств это справедливо. Через $(A, B)_F^{\mathcal{K}}$ будем обозначать пространство, полученное $\mathcal{K}$ -методом с параметром F , примененным к паре (A, B) .

Лемма 2.3. Пусть

$$E_1 \subset \mathcal{L}_{A_1}, \quad E_2 \subset \mathcal{L}_{A_2}, \quad E = (E_1, E_2)_F^{\mathcal{K}}, \quad A = (A_1, A_2)_F^{\mathcal{K}}.$$

Тогда

$$E \subset \mathcal{L}_A.$$

Доказательство. Рассмотрим следующий (нелинейный) оператор:

$$T : x = x(t) \rightarrow \xi = \xi(p) = \|x\|_p.$$

По условию

$$\|Tx\|_{A_i} \leq C \|x\|_{E_i}, \quad i = 1, 2,$$

и нужно показать, что

$$\|Tx\|_A \leq C_1 \|x\|_E.$$

Можно считать, что $x = x(t) \geq 0$. Оценим

$$\mathcal{K}(t, Tx, A_1, A_2) = \inf_{Tx=a_1+a_2} \{\|a_1\|_{A_1} + t\|a_2\|_{A_2}\}.$$

Так как при $x = x_1 + x_2$, $x_1, x_2 \geq 0$,

$$Tx(p) = \|x\|_p = \lambda(x_1, x_2, p) \cdot (\|x_1\|_p + \|x_2\|_p),$$

где $\lambda(x_1, x_2, p)$ — непрерывная функция по p и такая, что $\lambda(x_1, x_2, p) \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t, Tx, A_1, A_2) &\leq \inf_{\substack{x = x_1 + x_2, \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{\|\lambda Tx_1\|_{A_1} + t\|\lambda Tx_2\|_{A_2}\} \leq \\ &\leq C \inf_{\substack{x = x_1 + x_2, \\ x_1, x_2 \geq 0}} \{\|x_1\|_{E_1} + t\|x_2\|_{E_2}\} = C\mathcal{K}(t, x, E_1, E_2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|Tx\|_A = \|\mathcal{K}(t, Tx, A_1, A_2)\|_F \leq C\|\mathcal{K}(t, x, E_1, E_2)\|_F = C\|x\|_E.$$

Лемма доказана.

Очевидно, что если $E = (E_1, E_2)_F^K$, то $\tilde{E} = (\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)_F^K$. Поэтому, если

$$E_1 = \mathcal{L}_{\tilde{E}_1}, \quad E_2 = \mathcal{L}_{\tilde{E}_2},$$

то по лемме 2.3

$$E \subset \mathcal{L}_{\tilde{E}}.$$

Так как противоположное неравенство справедливо всегда, то в этом случае выполняется (2.5). В частности, справедлива следующая

Теорема 2.3. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет Δ^2 -условию, $E = (\Lambda(\varphi), M(\varphi))_F^K$ или $E = (L_\infty, M(\varphi))_F^K$. Тогда $E \in \tilde{\mathcal{E}}$.

Пусть $M^0(\varphi)$ — сепарабельная часть пространства Марцинкевича $M(\varphi)$, т.е. замыкание в $M(\varphi)$ множества ограниченных функций. Из теоремы 2.3 и леммы 2.2 получаем

Следствие 2.1. $M^0(\varphi)$ сильно экстраполяционно тогда и только тогда, когда $\varphi \in \Delta^2$.

Как будет видно из результатов следующего параграфа, пространство E может оказаться экстраполяционным и при нарушении (2.5). В этом случае

$$E = \mathcal{L}_F$$

с $F \neq \tilde{E}$. Т.е. условие сильной экстраполяционности действительно более сильное, чем условие экстраполяционности, и терминология оправдана.

3. Экстраполяционное описание пространств Марцинкевича

Теорема 3.1. Пусть $M(\varphi)$ — пространство Марцинкевича, $M^0(\varphi)$ — его сепарабельная часть. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $M(\varphi) \in \mathcal{E}$;
- 2) $M(\varphi) = \mathcal{L}_{F^\varphi}$, где $F^\varphi = L_\infty(\|1/\varphi\|_p^{-1})$;
- 3) $M^0(\varphi) \in \mathcal{E}$;
- 4) $M^0(\varphi) = \mathcal{L}_{F_0^\varphi}$, где F_0^φ — подпространство F^φ функций $f(p)$, для которых $f(p) \rightarrow 0$ при $p \rightarrow \infty$;
- 5) существует C такое, что

$$\varphi(t) \leq C \cdot \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{t^{1/p}}{\|1/\varphi\|_p}, \quad 0 < t \leq 1.$$

Доказательство. Равносильность условий 1), 2) и 5) — следствие теоремы 1 работы [4], неравенства $\tilde{\varphi}'(t) \leq 1/\varphi(t)$, где $\tilde{\varphi}(t) = t/\varphi(t)$, и леммы 2.1 (в [4] вместо величины $\|1/\varphi\|_p$ пунктов 2) и 5) фигурирует величина $\|\tilde{\varphi}'\|_p$).

Докажем импликации $2) \Rightarrow 4) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) \Rightarrow 5)$.

Вложение $\mathcal{L}_{F_0^\varphi}$ в $\mathcal{L}_{F^\varphi}$ изометрично. Более того, $\mathcal{L}_{F_0^\varphi}$ — сепарабельная часть $\mathcal{L}_{F^\varphi}$. Действительно, $\mathcal{L}_{F_0^\varphi}$ — замкнутое подпространство $\mathcal{L}_{F^\varphi}$, и, если $x \in \mathcal{L}_{F_0^\varphi}$, то верхние срезки

$$x^N(t) = x(t) \cdot \chi_{\{t: |x(t)| \leq N\}}$$

плотны в $\mathcal{L}_{F_0^\varphi}$. Для доказательства заметим, что если $x \in \mathcal{L}_{F_0^\varphi}$, то существуют p_0 и N такие, что

$$\max \left\{ \sup_{p_0 \leq p < \infty} \frac{\|x\|_p}{\|1/\varphi\|_p}, \frac{\|x - x^N\|_{p_0}}{\|1/\varphi\|_{p_0}} \right\} < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|x - x^N\|_{\mathcal{L}_{F_0^\varphi}} &= \sup_{1 \leq p < \infty} \frac{\|x - x^N\|_p}{\|1/\varphi\|_p} \leq \\ &\leq \max \left\{ \sup_{1 \leq p \leq p_0} \frac{\|x - x^N\|_p}{\|1/\varphi\|_p}, \sup_{p_0 \leq p < \infty} \frac{\|x\|_p}{\|1/\varphi\|_p} \right\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому, если $M(\varphi) = \mathcal{L}_{F^\varphi}$, то $M^0(\varphi) = \mathcal{L}_{F_0^\varphi}$, т.е. $2) \Rightarrow 4)$.

Импликация $4) \Rightarrow 3)$ очевидна.

Далее, всегда $M(\varphi) \subset \mathcal{L}_{F^\varphi}$ [4]. Поэтому

$$M^0(\varphi) \subset \mathcal{L}_{F_0^\varphi}.$$

Покажем, что если $M^0(\varphi) \in \mathcal{E}$, т.е. если $M^0(\varphi) = \mathcal{L}_F$ для некоторого F , то справедливо и обратное включение. Пусть $\xi = \xi(p) \in F_0^\varphi$. Тогда существуют последовательности $\{N_k\}_{k=0}^\infty$ и $\{p_k\}_{k=0}^\infty$ такие, что $p_0 = 1$, $p_k \rightarrow \infty$ и

$$\xi(p) \leq 2^{-k+1} \cdot \|\xi\|_{F_0^\varphi} \cdot \left\| \left(\frac{1}{\varphi} \right)^{N_k} \right\|_p, \quad \text{если } p_k \leq p \leq p_{k+1}.$$

Так как верхние срезки

$$\left(\frac{1}{\varphi} \right)^N \in M^0(\varphi) \quad \text{и} \quad \left\| \left(\frac{1}{\varphi} \right)^N \right\|_{M^0(\varphi)} \leq \left\| \left(\frac{1}{\varphi} \right) \right\|_{M(\varphi)} < C,$$

(если $M^0(\varphi) \in \mathcal{E}$, то $1/\varphi \in M(\varphi)$ согласно лемме 2.1), то

$$\eta_N = \eta_N(p) = \left\| \left(\frac{1}{\varphi} \right)^N \right\|_p \in F \quad \text{и} \quad \|\eta_N\|_F \leq C_1.$$

Поэтому

$$\|\xi \cdot \chi_{[p_k, p_{k+1}]}\|_F \leq 2^{-k+1} C_1 \|\xi\|_{F_0^\varphi},$$

откуда, так как F — банахово пространство,

$$\xi \in F \quad \text{и} \quad \|\xi\|_F \leq 4C_1 \|\xi\|_{F_0^\varphi}.$$

Итак, $F_0^\varphi \subset F$. Следовательно,

$$\mathcal{L}_{F_0^\varphi} \subset \mathcal{L}_F = M^0(\varphi),$$

и импликация 3) $\Rightarrow$ 4) доказана.

Если же $M^0(\varphi) = \mathcal{L}_{F_0^\varphi}$, то, сравнивая фундаментальные функции этих пространств, получаем 5). Теорема доказана.

В качестве примеров экстраполяционных пространств, не являющихся сильно экстраполяционными, можно привести пространства Марцинкевича, построенные по функциям [4, пример 1]:

$$\varphi_1(t) \asymp \exp\left(-\frac{\ln e/t}{\ln(\ln 10/t)}\right) \quad \text{и} \quad \varphi_2(t) \asymp \exp(-\ln^\theta e/t), \quad \theta \in (0, 1).$$

4. Сходимость рядов в экстраполяционных пространствах

С терминологией и основными фактами теории ортогональных рядов можно познакомиться по книге [13].

Пусть T — линейный оператор такой, что при $p \geq p_0 \geq 1$

$$T : L_p \rightarrow L_p \quad \text{и} \quad \|T\|_{L_p \rightarrow L_p} = \|T\|_p \leq \gamma(p).$$

Доопределим γ на $[1, p_0)$ единицей. Из конструкции пространств $\mathcal{L}_F$ и замечания 2.1 следует, что для любого параметра экстраполяции F

$$T : \mathcal{L}_F \rightarrow \mathcal{L}_{F(1/\gamma)} \quad \text{и} \quad \|T\|_{\mathcal{L}_F \rightarrow \mathcal{L}_{F(1/\gamma)}} \leq C, \quad (4.1)$$

где C зависит от γ и F , но не зависит от оператора T .

В приводимых ниже теоремах будем предполагать, что $p_0 \geq 1$ и $\gamma(p) = 1$ при $p \in [1, p_0)$.

Теорема 4.1. Пусть $E = \mathcal{L}_F$, а система $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — минимальна и полна в E . Тогда, если для всех $x \in E$ и натуральных N

$$\left\| \sum_{n=1}^N x_n^*(x) x_n \right\|_p \leq \gamma(p) \cdot \|x\|_p \quad \text{при} \quad p \geq p_0,$$

где $\{x_n^*\}$ — система, сопряженная к $\{x_n\}$, то для любого $x \in E$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

сходится к x в пространстве $E_1 = \mathcal{L}_{F(1/\gamma)}$.

Доказательство. Согласно (4.1), операторы частных сумм

$$S_N x = \sum_{n=1}^N x_n^*(x) x_n$$

действуют из E в E_1 , и

$$\|S_N x\|_{E_1} \leq C \|x\|_E.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и для $P = \sum_{n=1}^M a_n x_n$ выполняется

$$\|P - x\|_E \leq \varepsilon.$$

Тогда, если $N \geq M$,

$$S_N P = P$$

и

$$\begin{aligned} \|S_N x - x\|_{E_1} &\leq \|S_N x - P\|_{E_1} + \|P - x\|_{E_1} \leq \\ &\leq \|S_N(P - x)\|_{E_1} + \|P - x\|_E \leq (C + 1) \|P - x\|_E < (C + 1)\varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому

$$S_N(x) \rightarrow x \text{ в } E_1.$$

Пусть E — симметричное пространство, $\kappa = \kappa(t)$ — измеримая положительная функция на $[0, 1]$. Через E_κ будем обозначать симметричное пространство с нормой

$$\|x\|_{E_\kappa} = \|x^{**} \cdot \kappa\|_E,$$

где

$$x^{**} = \frac{1}{t} \int_0^t x^*(s) ds.$$

Пространства такого вида возникают в теории интерполяции операторов слабого типа (см., например [11, гл. II, § 6]).

Теорема 4.2. Пусть пространство E сильно экстраполяционно. Тогда, в условиях теоремы 4.1, для любого $x \in E$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$$

сходится к x в пространстве E_κ , где $\kappa(t) = 1/\gamma(\ln e/t)$.

Доказательство. В силу теоремы 4.1 достаточно показать, что

$$\mathcal{L}_{E_1} \subset E_\kappa,$$

где $E_1 = \tilde{E}(1/\gamma)$. Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$x^{**}(e^{-p+1}) \leq x^{**}(e^{-p}) = e^p \int_0^{e^{-p}} x^*(s) ds \leq e^p \|\chi_{[0, e^{-p}]}\|_{\frac{p}{p-1}} \|x^*\|_p = e \|x^*\|_p.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\|x\|_{E_\kappa} = \|x^{**}(e^{-p+1}) \cdot \kappa(e^{-p+1})\|_{\tilde{E}} \leq e \| \|x\|_p \cdot 1/\gamma(p) \|_{\tilde{E}} = e \|x\|_{\mathcal{L}_{E_1}}.$$

Лемма 4.1. Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — квазивогнутая функция на $[0, 1]$ и $\varphi \in \Delta^2$. Тогда существует вогнутая функция $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ такая, что

$$\varphi_1(t) \asymp \frac{\varphi(t)}{\ln e/t}.$$

Доказательство. Положим

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi(t)}{\ln e/t}.$$

Очевидно, что $\varphi_0(t)$ возрастает. Поэтому для доказательства леммы достаточно установить неравенство

$$\frac{\varphi_0(t_2)}{t_2} \leq K \cdot \frac{\varphi_0(t_1)}{t_1} \text{ при } 0 < t_1 < t_2 \quad (4.2)$$

с некоторой константой $K > 0$ [11, с. 69].

Из Δ^2 -условия для функции φ следует, что

$$\varphi_0(t) \leq C\varphi_0(t^2), \quad 0 < t \leq 1.$$

Пусть $t_2 < 1/C$. Тогда, если $t_1 \in [(t_2)^{2^k}, (t_2)^{2^{k-1}}]$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0(t_2)}{t_2} &\leq C^k \frac{\varphi_0((t_2)^{2^k})}{t_2} \leq \frac{t_1 C^k \varphi_0(t_1)}{t_2 t_1} \leq (t_2)^{2^{k-1}-1} C^k \frac{\varphi_0(t_1)}{t_1} \leq \\ &\leq C^{k+1-2^{k-1}} \frac{\varphi_0(t_1)}{t_1} \leq C \frac{\varphi_0(t_1)}{t_1}, \end{aligned}$$

и неравенство (4.2) выполнено для всех $0 < t_1 < t_2 < 1/C$. Легко видеть, что этого достаточно для выполнения (4.2) для всех $0 < t_1 < t_2$ с

$$K = \sup_{1/C \leq t, s \leq 1} \frac{\varphi_0(t)s}{\varphi_0(s)t} + \frac{C\varphi_0(1)}{\varphi_0(1/C)}.$$

Следствие 4.1. Пусть $\varphi \in \Delta^2$, $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированная система и для всех $x \in M^0(\varphi)$ и натуральных N

$$\left\| \sum_{n=1}^N c_n(x) \psi_n \right\|_p \leq Cp \cdot \|x\|_p \text{ при } p \geq p_0,$$

где $c_n(x)$ — коэффициенты Фурье функции x . Если система $\{\psi_n\}$ полна в $M^0(\varphi)$, то для любого $x \in M^0(\varphi)$ ряд

$$\sum_{n=1}^\infty c_n(x) \psi_n$$

сходится к x в пространстве $M^0(\varphi_1)$, где $\varphi_1(t) \asymp \varphi(t) \ln^{-1} e/t$.

Доказательство. Согласно следствию 2.1, пространство $M^0(\varphi)$ сильно экстраполяционно. При этом, если $\kappa(t) = \ln^{-1} e/t$, то

$$(M^0(\varphi))_{\kappa} = M^0(\varphi_1)$$

(в силу леммы 4.1 пространство $M^0(\varphi_1)$ определено корректно). Доказательство завершается использованием теоремы 4.2.

Условию следствия удовлетворяют, в частности, тригонометрическая система и система Уолша.

Следствие 4.2. Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированная система, состоящая из ограниченных функций, и для любых $x \in L_1$ и $\tau > 0$

$$\tau \cdot \mu\{t : |S_N(x, t)| > \tau\} \leq C \cdot \|x\|_1,$$

где C не зависит от x , N и τ , а через $S_N(x)$ обозначена частная сумма Фурье функции x . Тогда, если система $\{\psi_n\}$ полна в $M^0(\varphi)$ и $\varphi \in \Delta^2$, то для всех $x \in M^0(\varphi)$

$$S_N(x) \rightarrow x \text{ в } M^0(\varphi_1), \quad \varphi_1(t) \asymp \frac{\varphi(t)}{\ln e/t}.$$

Доказательство. В условиях следствия оператор частной суммы S_N действует из пространства L_1 в пространство L_1^w (так называемое "слабое" L_1). Поэтому к нему применима интерполяционная теорема Марцинкевича [10, с. 18], используя которую получаем:

$$\|S_N(x)\|_p \leq C_1 \left(\frac{1}{(p-1)(2-p)} \right)^{\frac{1}{p}} \|x\|_p, \quad p \in (1, 2).$$

Используя самосопряженность оператора S_N , получаем:

$$\|S_N(x)\|_p \leq C_2 p \|x\|_p \text{ для всех } 3 \leq p < \infty,$$

и доказательство завершается использованием предыдущего следствия.

Ближкие результаты для пространств Лоренца доказаны в работе [14].

Литература

- [1] Асташкин, С.В. Новые экстраполяционные соотношения в шкале L_p -пространств / С.В. Асташкин // Функцион. анализ и его прил. 2003. Т. 37. №3. С. 73–77.
- [2] Асташкин, С.В. Об экстраполяционных свойствах шкалы L_p -пространств / С.В. Асташкин // Матем. сб. 2003. Т. 194. №6. С. 23–42.
- [3] Асташкин, С.В. Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции / С.В. Асташкин // Сиб. матем. ж. 2005. Т. 46. №2. С. 264–289.
- [4] Асташкин, С.В. Экстраполяционное описание пространств Лоренца и Марцинкевича, близких к L_{∞} / С.В. Асташкин, К.В. Лыков // Сиб. матем. ж. (в печати).

- [5] Yano, S. An Extrapolation Theorem / S.Yano // J. Math. Soc. Japan. 1951. V. 3. P. 296–305.
- [6] Зигмунд, А. Тригонометрические ряды / А.Зигмунд. Т. 2. М.: Мир, 1965.
- [7] Jawerth, B. Extrapolation Spaces with Applications / B.Jawerth, M.Milman // Memoirs of the Amer. Math. Soc. 1991. V. 89, №44.
- [8] Jawerth, B. New Results and Applications of Extrapolation Theory / B.Jawerth, M.Milman // Israel Math. Conference Proc. 1992. V. 5. P. 81–105.
- [9] Milman, M. Extrapolation and Optimal Decompositions with Applications to Analysis / M.Milman // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag. 1994. V. 1580.
- [10] Берг, Й. Интерполяционные пространства. Введение. / Й.Берг, Й.Лефстрем. М.: Мир, 1980.
- [11] Крейн, С.Г. Интерполяция линейных операторов / С.Г.Крейн, Ю.И.Петунин, Е.М.Семенов. М.: Наука, 1978.
- [12] Brudnyi, Yu.A. Interpolation Functors and Interpolation Spaces / Yu.A.Brudnyi, N.Ya.Krugliak. North Holland Publish., 1991.
- [13] Кашин, Б.С. Ортогональные ряды / Б.С.Кашин, А.А.Саакян. М.: АФЦ, 1999.
- [14] Lukomskii, S.F. Convergence of Fourier Series in Lorentz Spaces / S.F.Lukomskii // East J. on Approx. 2003. V. 9. №2. P. 229–238.

Поступила в редакцию 17/II/2006;
в окончательном варианте — 17/II/2006.

**EXTRAPOLATION IN THE L_p SCALE
AND CONVERGENCE OF ORTHOGONAL SERIES
IN THE MARCINKIEWICH SPACES³**

© 2006 K.V. Lyckov⁴

In the paper the extrapolation in the L_p scale is considered. Some new relations between norms in the class of symmetric (rearrangement invariant) spaces are presented. Applications to convergence of orthogonal series are given.

Paper received 17/II/2006.

Paper accepted 17/II/2006.

³Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

⁴Lyckov Konstantin Vladimirovich (alkv@list.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.