УДК 517.95

НЕЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ[1]

© 2006 В.Б. Дмитриев[2]

В работе рассматривается задача для гиперболического уравнения с интегральным условием вместо стандартного граничного. Задача рассмотрена в пространстве произвольной размерности. Доказаны существование и единственность решения.

Введение

Математическое моделирование некоторых физических явлений и биологических процессов часто приводит к нелокальным задачам для уравнений в частных производных второго порядка. Весьма удобным способом описания налагаемых на искомое решение условий является задание их в интегральной форме как среднее значение решения на принадлежащих области, в которой ищется решение, многообразиях. Ранее краевые задачи для гиперболических уравнений на плоскости с интегральными условиями были исследованы Л.С. Пулькиной в работах [2, 5, 6], Д.Г. Гордезиани и Г.А. Авалишвили в работе [1]. В этих частных случаях решение поставленных задач сводилось к исследованию интегральных уравнений Вольтерра, к которым применима теория Фредгольма. В рассмотренном общем случае этого сделать нельзя. Исследования нелокальных задач с интегральными условиями показали, что стандартные методы для их изучения часто оказываются неприемлемыми без соответствующих модификаций. В настоящей работе доказана однозначная обобщенная разрешимость задачи с нелокальным условием, содержащим как интегральный оператор от искомого решения, так и значение производной от него на границе. Последний факт позволил ввести понятие обобщенного решения таким образом, что оказался применимым метод Галеркина.

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором С.П. Пулькиной.

[2]Дмитриев Виктор Борисович (dmitriev_v.b@mail.ru), кафедра высшей математики Самарской государственной академии путей сообщения, 443066, Россия, Самара, 1-й Безымянный переулок, 18.

1. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \triangle u = f(x,t) \tag{1.1}$$

в цилиндре $Q_T = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset R^n, 0 < \tau < T\}$, где Ω — ограниченная область в R^n с гладкой границей, и поставим для него задачу с начальными условиями Коши

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{1.2}$$

$$u_t(x,0) = \psi(x) \tag{1.3}$$

и нелокальным условием

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y,t)\,dy, \tag{1.4}$$

где $\varphi(x), \psi(x), K(x,y)$ заданы, а $S_T = \{(x,t) : x \in \partial\Omega, 0 < t < T\}$ — боковая поверхность цилиндра Q_T, S_T — гладкая поверхность.

Введем понятие обобщенного решения поставленной задачи. Для этого умножим (1.1) на $v \in W_2^1(Q_T)$ такую, что $v(x,T) = 0$, и, предполагая, что $u(x,t)$ решение задачи (1.1)–(1.4), проинтегрируем по Q_T:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} (u_{tt} - \Delta u)v\,dx\,dt = \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} fv\,dx\,dt;$$

интегрируя левую часть по частям, получаем

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v)\,dx\,dt + \int\limits_{\Omega} u_t v\Big|_0^T dx - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_i)\,ds\,dt =$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} fv\,dx\,dt;$$

заметим, что $u_t|_{t=0} = \psi$, $\sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(n,x_i) = \frac{\partial u}{\partial n}$, и в силу $\frac{\partial u}{\partial n}|_{S_T} = \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y,t)\,dy$ получим тождество, с помощью которого введем понятие обобщенного решения:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} (-u_t v_t + \nabla u \nabla v)\,dx\,dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v(x,t) \int\limits_{\Omega} K(x,y)u(y,t)\,dy\,ds\,dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega f(x,t)v(x,t)\,dx\,dt + \int_\Omega \psi(x)v(x,0)\,dx. \qquad (1.5)$$

Опредение. Назовем обобщенным решением из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1.1)–(1.4) функцию $u(x,t)$, принадлежащую $W_2^1(Q_T)$, равную $\varphi(x)$ при $t = 0$ и удовлетворяющую тождеству (1.5) $\forall v \in W_2^1(Q_T), v(x,T) = 0$.

Определим также $L_{2,1}(Q_T)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых по Лебегу на Q_T функций $u(x,t)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,1} = \int_0^T \left(\int_\Omega u^2(x,t)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Тогда для

$$Q_t = \{(x,\tau) : x \in \Omega \subset R^n, 0 < \tau < t\}$$

$L_{2,1}(Q_t)$ — банахово пространство, состоящее из всех определенных и измеримых по Лебегу на Q_t функций $u(x,t)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{2,1,Q_t} = \int_0^t \left(\int_\Omega u^2(x,\tau)\,dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Нам понадобится ещё одно обозначение: S_t — боковая поверхность Q_t.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. Задача (1.1)–(1.4) имеет единственное обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ для $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi \in W_2^1(\Omega)$, $K \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\psi \in L_2(\Omega)$ при выполнении условия

$$\int_\Omega \int_\Omega (K^2(x,y) + |\nabla_x K(x,y)|^2)\,dx\,dy = L < \infty.$$

2. Доказательство

1. Доказательство единственности решения. Пусть задача (1.1)–(1.4) имеет два обобщенных решения u' и u'' из $W_2^1(Q_T)$. Тогда их разность $u = u' - u'' \in W_2^1(Q_T)$ удовлетворяет тождеству (1.5) с $f = 0, \psi = 0$ и при $t = 0$ обращается в нуль. Возьмем в этом тождестве

$$v(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{при } b \leqslant t \leqslant T, \\ \int_b^t u(x,\tau)\,d\tau, & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant b. \end{cases} \qquad (2.1)$$

Заметим, что v, v_{x_i} и u являются элементами $L_2(\Omega)$, непрерывно зависящими от $t \in [0,T]$. Подставим v из (2.1) в (1.5) с $f = 0$, $\psi = 0$ и выразим u, u_t u_{x_i} через v и их производные. Это даст после изменения знака в (1.5)

$$\int_0^b \int_\Omega \Big[v_t v_{tt} - \sum_{i=1}^n v_{tx_i} v_{x_i} \Big] dx\, dt = -\int_0^b \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega K v_t\, dy\, ds\, dt.$$

Так как $v_t|_{t=0} = u|_{t=0} = 0, v_{x_i}|_{t=b} = 0$, то

$$\int_\Omega \Big[v_t^2(x,b) + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} \Big] dx = -2 \int_0^b \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega K v_t\, dy\, ds\, dt. \tag{2.2}$$

Используя неравенство

$$\int_{\partial\Omega} |u|\, ds \leqslant c \int_\Omega \Big(|\nabla u| + |u| \Big) dx, \tag{2.3}$$

справедливое $\forall u \in W_1^1(\Omega)$ и области Ω с гладкой границей [3, с. 77], а затем неравенство Коши–Буняковского, получаем

$$\Big| \int_{\partial\Omega} v \int_\Omega K v_t\, dy\, ds \Big| \leqslant c \int_\Omega \Big(\Big| v \int_\Omega K v_t\, dy \Big| + \Big| \nabla v \int_\Omega K v_t\, dy + v \int_\Omega \nabla_x K v_t\, dy \Big| \Big) dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{2} \int_\Omega \Big(v^2 + \int_\Omega K^2\, dy \cdot \int_\Omega v_t^2\, dy + |\nabla v|^2 + \int_\Omega K^2\, dy \cdot \int_\Omega v_t^2\, dy + v^2 +$$

$$+ \int_\Omega |\nabla_x K|^2\, dy \cdot \int_\Omega v_t^2 dy \Big) dx \leqslant c \int_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2)\, dx + cL \int_\Omega v_t^2\, dx \leqslant$$

$$\leqslant M \int_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2 + v_t^2)\, dx.$$

Здесь $M = \max(c, cL)$. Тогда из (2.2) мы получаем

$$\int_\Omega \Big[v_t^2(x,b) + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} \Big] dx \leqslant 2M \int_{Q_b} (v^2 + |\nabla v|^2 + v_t^2)\, dx\, dt. \tag{2.4}$$

Кроме того, для почти всех $x \in \Omega$

$$\int_0^b v^2 dt = \int_0^b \Big(\int_b^t u\, d\tau \Big)^2 dt \leqslant \int_0^b (b-t) \int_t^b u^2 d\tau dt \leqslant \frac{b^2}{2} \int_0^b u^2 d\tau.$$

Ввиду этого из (2.4) следует неравенство

$$\int_\Omega \Big[u^2(x,b) + \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2|_{t=0} \Big] dx \leqslant 2M \int_{Q_b} \Big(|\nabla v|^2 + (b^2+1) u^2 \Big)\, dx\, dt. \tag{2.5}$$

Введем функции $g_i(x,t) = \int\limits_t^0 u_{x_i}(x,\tau)\,d\tau$. В силу (2.1) находим

$$v_{x_i} = \int\limits_b^t u_{x_i}(x,\tau)\,d\tau = g_i(x,b) - g_i(x,t), \quad t \leqslant b.$$

Подставляя в (2.5), мы получаем

$$\int\limits_\Omega \Big[u^2(x,b) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b)\Big]\,dx \leqslant$$

$$\leqslant 2M \int\limits_{Q_b} \left(\sum_{i=1}^n (g_i(x,b) - g_i(x,t))^2 + (b^2+1)u^2 \right) dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant 4Mb \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b)\,dx + 2M \int\limits_{Q_b} \left[2\sum_{i=1}^n g_i^2(x,t) + (b^2+1)u^2 \right] dx\,dt.$$

Далее имеем

$$\int\limits_\Omega u^2(x,b)\,dx + (1-4Mb)\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b)\,dx \leqslant c_1 \int\limits_{Q_b} \left(\sum_{i=1}^n g_i^2 + u^2 \right) dx\,dt, \qquad (2.6)$$

где $c_1 = 2M(2+b^2)$. Воспользуемся теперь произволом в выборе b. Для $b \in [0, 1/(8M)]$ коэффициент $1 - 4Mb \geqslant 1/2$, а $u(x,b)$ и $g_i(x,b)$ при $b = 0$ равны нулю. В результате приходим к неравенству

$$\int\limits_\Omega \left(u^2(x,b) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b) \right) dx \leqslant 2c_1 \int\limits_0^b \int\limits_\Omega \left(u^2(x,\tau) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,\tau) \right) dx\,d\tau.$$

Это в силу неравенства Гронуолла [7, с. 23] означает, что

$$\int\limits_\Omega \left(u^2(x,b) + \sum_{i=1}^n g_i^2(x,b) \right) dx = 0$$

и тогда $u(x,b) = 0$ и $g_i(x,b) = 0$ при $b \in [0, 1/(8M)]$. Повторяя рассуждение для $t \in [1/(8M), 1/(4M)]$, убедимся, что $u(x,t) = 0$ на этом промежутке. И так в конечное число шагов докажем обращение $u(x,t)$ в нуль для всех $t \in [0,T]$. Единственность доказана.

2. Доказательство существования решения. Воспользуемся методом Галеркина. Пусть $\{\varphi_k(x)\}$ есть фундаментальная система в $W_2^1(\Omega)$ (то есть замыкание линейной оболочки этой системы в норме $W_2^1(\Omega)$ совпадает с пространством $W_2^1(\Omega)$) и выполняется свойство ортонормированности:

$$(\varphi_k, \varphi_l) = \int\limits_\Omega \varphi_k \varphi_l dx = \delta_k^l.$$

Приближенное решение $u^N(x,t)$ ищем в виде

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_k(x) \tag{2.7}$$

из соотношений

$$(u_{tt}^N, \varphi_l) + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^N \varphi_{lx_i}\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_l \int\limits_{\Omega} K(x,y)u^N(y,t)\, dy\, ds = (f, \varphi_l), \tag{2.8}$$

$$l = 1, 2, \ldots, N,$$

$$c_k^N(0) = \alpha_k^N, \tag{2.9}$$

$$\frac{d}{dt} c_k^N(t)|_{t=0} = (\psi, \varphi_k). \tag{2.10}$$

Здесь α_k^N — коэффициенты сумм $\varphi^N(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k^N \varphi_k(x)$, аппроксимирующих при $N \to \infty$ функцию $\varphi(x)$ в норме $W_2^1(\Omega)$.

Подставим (2.7) в (2.8), получим:

$$c_l^{N\prime\prime} + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t)\varphi_{kx_i}(x)\varphi_{lx_i}(x)\, dx -$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_l(x) \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \int\limits_{\Omega} K(x,y)\varphi_k(y)\, dy\, ds = (f, \varphi_l)$$

с начальными условиями (2.9), (2.10). После изменения порядка суммирования

$$c_l^{N\prime\prime} + \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \varphi_{kx_i}(x)\varphi_{lx_i}(x)\, dx -$$

$$- \sum_{k=1}^{N} c_k^N(t) \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_l(x) \int\limits_{\Omega} K(x,y)\varphi_k(y)\, dy\, ds = (f, \varphi_l), l = 1, \ldots, N. \tag{2.11}$$

Применяя неравенство (2.3) и затем неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\Big| \int\limits_{\partial\Omega} \varphi_l(x) \int\limits_{\Omega} K(x,y)\varphi_k(y)\, dy\, ds \Big| \leqslant c \int\limits_{\Omega} \Big\{ \Big| \varphi_l \int\limits_{\Omega} K\varphi_k dy \Big| +$$

$$+ \Big| \nabla\varphi_l \int\limits_{\Omega} K\varphi_k dy + \varphi_l \int\limits_{\Omega} \nabla_x K\varphi_k dy \Big| \Big\}\, dx \leqslant \frac{c}{2} \int\limits_{\Omega} \Big[\varphi_l^2 + \Big(\int\limits_{\Omega} K\varphi_k dy \Big)^2 + |\nabla\varphi_l|^2 +$$

$$+\Big(\int\limits_\Omega K\varphi_k dy\Big)^2+\varphi_l^2+\Big|\int\limits_\Omega \nabla_x K\varphi_k dy\Big|^2\Big]dx\leqslant\frac{c}{2}\int\limits_\Omega 2\varphi_l^2dx+\frac{c}{2}\int\limits_\Omega|\nabla\varphi_l^2|dx+$$

$$+\frac{c}{2}\int\limits_\Omega\Big\{\int\limits_\Omega K^2dy\cdot\int\limits_\Omega\varphi_k^2dy+\int\limits_\Omega K^2dy\cdot\int\limits_\Omega\varphi_k^2dy+\int\limits_\Omega|\nabla_xK|^2dy\cdot\int\limits_\Omega\varphi_k^2dy\Big\}dx=$$

$$=c+\frac{c}{2}\int\limits_\Omega|\nabla\varphi_l^2|dx+\frac{c}{2}\int\limits_\Omega\Big\{2\int\limits_\Omega K^2dy+\int\limits_\Omega|\nabla_xK|^2dy\Big\}dx\leqslant c+\frac{c}{2}\int\limits_\Omega|\nabla\varphi_l^2|dx+$$

$$+\frac{c}{2}\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega\Big(2K^2+2|\nabla_xK|^2\Big)\,dx\,dy.$$

В силу условий теоремы стоящее в правой части выражение — конечное число. Получаем, что система (2.11) — система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка по t для неизвестных $c_k^N(t)$, $k=1,\dots,N$ с постоянными коэффициентами, разрешенная относительно $\frac{d^2c_k^N(t)}{dt^2}$; ее свободные члены $f_l\equiv(f,\varphi_l)\in L_2(0,T)$, если $f\in L_{2,1}(Q_T)$, $\varphi\in W_2^1(\Omega)$ и $\psi\in L_2(\Omega)$. Таким образом, система (2.11) $\forall N$ однозначно разрешима при начальных условиях (2.9) [4, с. 27], причем $\frac{d^2c_k^N}{dt^2}\in L_2(0,T)$.

Мы построили последовательность $\{u^N\}_{N=1}^\infty$. Для доказательства сходимости этой последовательности рассмотрим уравнение

$$Lw=f(x,t).\tag{2.12}$$

Пусть $w(x,t)\in W_2^2(Q_T)$ — решение этого уравнения, удовлетворяющее нелокальному условию

$$\frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{S_T}=\int\limits_\Omega K(x,y)w(y,t)\,dy.\tag{2.13}$$

Функция w, конечно, может не являться решением задачи (1.1)–(1.4), однако нам понадобится энергетическая оценка этой функции. Мы здесь не задаем начальных условий Коши, поскольку хотим получить результат общего вида, который мы применим для функций u^N.

Умножим уравнение (2.12) на $2w_t$ и результат проинтегрируем по Q_t, где $t\leqslant T$:

$$2\int\limits_{Q_t}Lw\cdot w_t\,dx\,dt=2\int\limits_{Q_t}fw_t\,dx\,dt.\tag{2.14}$$

Левую часть (2.14) преобразуем с помощью интегрирования по частям (используя (2.13)) следующим образом:

$$2\int\limits_{Q_t} Lw\cdot w_t\,dx\,dt=\int\limits_{Q_t}\Big(\frac{\partial w_t^2}{\partial t}+2\sum_{i=1}^n w_{x_i}w_{tx_i}\Big)dx\,dt-$$

$$-\int\limits_{S_t}2\sum_{i=1}^n w_{x_i}w_t\cos(n,x_i)\,ds\,dt=\int\limits_{\Omega}\Big(w_t^2+\sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\Big)dx|_{t=0}^{t=t}-2\int\limits_{S_t}w_t\frac{\partial w}{\partial n}\,ds\,dt=$$

$$=\int\limits_{\Omega}\Big(w_t^2+\sum_{i=1}^n w_{x_i}^2\Big)dx|_{t=0}^{t=t}-2\int\limits_{S_t}w_t\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,t)\,dy\,ds\,dt.$$

Далее, полагая $y(t)=\int\limits_{\Omega}\Big(w_t^2+\sum\limits_{i=1}^n w_{x_i}^2\Big)dx$, получаем

$$y(t)=y(0)+2\int\limits_{S_t}w_t\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,t)\,dy\,ds\,dt+2\int\limits_{Q_t}fw_t\,dx\,dt. \qquad (2.15)$$

Преобразуем интеграл по боковой поверхности следующим образом:

$$\int\limits_{S_t}w_t\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,t)\,dy\,ds\,dt=\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}w_t\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,t)\,dy\,ds\,dt=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^t w_t(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,t)\,dy\,dt\,ds=$$

$$=-\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_0^t w(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w_t(y,t)\,dy\,dt\,ds+\int\limits_{\partial\Omega}w(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,t)\,dy\,ds-$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega}w(x,0)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w(y,0)\,dy\,ds=i_1+i_2+i_3.$$

Пользуясь неравенством (2.3) и затем неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$|i_1|=\Big|\int\limits_0^t\int\limits_{\partial\Omega}w(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w_t(y,t)\,dy\,ds\,dt\Big|\leqslant$$

$$\leqslant c\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big(\Big|w(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w_t(y,t)\,dy\Big|+\Big|\nabla w(x,t)\int\limits_{\Omega}K(x,y)w_t(y,t)\,dy+$$

$$+w(x,t)\int\limits_{\Omega}\nabla_xK(x,y)w_t(y,t)\,dy\Big|\Big)dx\,dt\leqslant\frac{c}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big(w^2(x,t)+$$

$$+\Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y)w_t(y,t)\,dy\Big)^2 + |\nabla w(x,t)|^2 + \Big(\int\limits_{\Omega} K(x,y)w_t(y,t)\,dy\Big)^2 +$$

$$+w^2(x,t) + |\int\limits_{\Omega} \nabla_x K(x,y)w_t(y,t)\,dy|^2\Big)\,dx\,dt \leqslant \frac{c}{2}\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big(2w^2(x,t)+$$

$$+2\int\limits_{\Omega} K^2(x,y)\,dy\int\limits_{\Omega} w_t^2(y,t)\,dy + |\nabla w(x,t)|^2 +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big|\nabla_x K(x,y)\Big|^2 dy\int\limits_{\Omega} w_t^2(y,t)\,dy\Big)\,dx\,dt \leqslant c\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega}\Big(w^2(x,t) + |\nabla w(x,t)|^2 +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\Big(K^2(x,y) + |\nabla_x K(x,y)|^2\Big)\,dy\int\limits_{\Omega} w_t^2(y,t)\,dy\Big)\,dx\,dt =$$

$$= c\int\limits_{Q_t}(w^2 + |\nabla w|^2)\,dx\,dt + c\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} w_t^2(y,t)\,dy\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega}\Big(K^2(x,y)+$$

$$+|\nabla_x K(x,y)|^2\Big)\,dy\,dx\,dt = c\int\limits_{Q_t}(w^2 + |\nabla w|^2)\,dx\,dt + cL\int\limits_{Q_t} w_t^2(y,t)\,dy\,dt.$$

Далее имеем цепочку неравенств

$$|i_2| = \Big|\int\limits_{\partial\Omega} w(x,t)\int\limits_{\Omega} K(x,y)w(y,t)\,dy\,ds\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\partial\Omega}|w(x,t)|\Big(\int\limits_{\Omega} K^2(x,y)\,dy\int\limits_{\Omega} w^2(y,t)\,dy\Big)^{\frac12} ds \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\partial\Omega} w^2(x,t)\,ds\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(x,y)\,dy\int\limits_{\Omega} w^2(y,t)\,dy\,ds\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant c^{\frac12}\left(\int\limits_{\Omega}(w|\nabla w| + w^2)\,dx\right)^{\frac12} M_1^{\frac12}\left(\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12} \leqslant$$

$$\leqslant c_2\left(\int\limits_{\Omega}(|\nabla w|^2 + w^2)\,dx\right)^{\frac12}\left(\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\,dx\right)^{\frac12}.$$

Здесь обозначили $M_1 = \int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(x,y)\,dy\,ds \leqslant 2cL$ (в силу неравенства (2.3)), $c_2 = c\sqrt{2L}$. Итак, справедливо неравенство

$$|i_2| \leqslant c_2 \left(\int\limits_{\Omega} (|\nabla w|^2 + w^2)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.16}$$

Введем обозначение

$$z(t) \equiv \int\limits_{\Omega} (w^2 + w_t^2 + |\nabla w|^2)\, dx.$$

Воспользуемся неравенством [3, с. 204]

$$\int\limits_{\Omega} w^2(x,t)\, dx \leqslant 2 \int\limits_{\Omega} w^2(x,0)\, dx + 2t \int\limits_0^t y(t)\, dt. \tag{2.17}$$

Тогда из (2.16) получим

$$|i_2| \leqslant c_2 z^{\frac{1}{2}}(t) \Big[2z(0) + 2t \int\limits_0^t z(t)\, dt \Big]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.18}$$

Заметим, что с помощью (2.18) можно оценить и $|i_3|$:

$$|i_3| \leqslant c_2 (z(0))^{\frac{1}{2}} (z(0))^{\frac{1}{2}} = c_2 z(0).$$

Теперь, складывая (2.15) и (2.17), получаем с учетом оценок на $|i_1|, |i_2|, |i_3|$:

$$z(t) \leqslant 2z(0) + 2t \int\limits_0^t z(t)\, dt + c_1 \int\limits_0^t z(t)\, dt +$$

$$+ c_2 z(0) + c_2 z^{\frac{1}{2}}(t) \Big[2z(0) + 2t \int\limits_0^t z(t)\, dt \Big]^{\frac{1}{2}} + 2 \int\limits_0^t \|f\|_{2,\Omega} z^{\frac{1}{2}}(t)\, dt.$$

Обозначим $\max\limits_{0 \leqslant \xi \leqslant t} z(\xi) = \hat{z}$, тогда

$$\hat{z}(t) \leqslant dz(0) + (c_1 + 2t) t \hat{z}(t) + 2\|f\|_{2,1,Q_t} \hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) + c_2 \hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) (2z(0) + 2t^2 \hat{z}(t))^{\frac{1}{2}},$$

где $d = 2 + c_2$. При $t \leqslant \min(t_1, T)$, где $t_1 > 0$, определяется из условия $(c_1 + 2t_1) t_1 = 1/2$, получим

$$\hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant 2d z^{\frac{1}{2}}(0) + 4\|f\|_{2,1,Q_t} + 2c_2 [2z(0) + 2t^2 \hat{z}(t)]^{\frac{1}{2}}.$$

Возьмем t_2 так, чтобы выполнялось равенство $2\sqrt{2} t_2 c_2 = 1/2$. Поскольку

$$[2z(0) + 2t^2 \hat{z}(t)]^{\frac{1}{2}} \leqslant (2z(0))^{\frac{1}{2}} + t\sqrt{2} \hat{z}^{\frac{1}{2}}(t),$$

то при $t \leqslant \min(t_1, t_2, T)$ получим

$$\hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant (2d + \sqrt{2} \cdot 2c_2) \cdot 2z^{\frac{1}{2}}(0) + 8\|f\|_{2,1,Q_t}.$$

Если $h \equiv \min(t_1, t_2) \leqslant T$, то, беря в качестве начального момента $t = h$, мы в силу проведенных рассуждений можем утверждать справедливость неравенства

$$\hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant (2d + \sqrt{2} \cdot 2c_2) \cdot 2z^{\frac{1}{2}}(h) + 8\|f\|_{2,1,Q_t}$$

для $t \leqslant \min(2h; T)$. И данное неравенство справедливо для любых h и $t \geqslant h$ из $[0, T]$, лишь бы $t - h$ удовлетворяло условиям $(c_1 + 2(t-h))(t-h) = 1/2$ и $2\sqrt{2}(t-h)c_2 = 1/2$. Благодаря этому $\forall t \in [0, T]$

$$\hat{z}^{\frac{1}{2}}(t) \leqslant c_2(t)z^{\frac{1}{2}}(0) + c_3(t)\|f\|_{2,1,Q_t}, \tag{2.19}$$

где $c_2(t)$ и $c_3(t)$ определяются постоянными c и L и величиной t. Это энергетическое неравенство, позволяющее оценить энергетическую норму решения $w(x,t)$ через начальные данные Коши и $f(x,t)$.

Возвращаясь к построенной выше последовательности $\{u^N\}_{N=1}^{\infty}$, отметим, что для u^N справедлива оценка (2.19).

Действительно, умножая каждое из равенств (2.8) на свое $\frac{d}{dt}c_l^N$ и суммируя по l от 0 до N, придем к равенству

$$(\frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}, \frac{\partial u^N}{\partial t}) + \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} u^N_{x_i} u^N_{tx_i}\, dx - \int\limits_{\partial\Omega} u^N_t \int\limits_{\Omega} K(x,y)u^N(y,t)\, dy\, ds = (f, u^N_t).$$

Интегрируя его по t от 0 до t и умножая обе части на 2, получаем равенство

$$\int\limits_{Q_t} \Big(\frac{\partial (u^N_t)^2}{\partial t} + 2\sum_{i=1}^{n} u^N_{x_i} u^N_{tx_i}\Big) dx\, dt - 2\int\limits_{S_t} u^N_t \int\limits_{\Omega} K(x,y)u^N(y,t)\, dy\, ds\, dt =$$

$$= 2\int\limits_{Q_t} f u^N_t\, dx\, dt,$$

из которого и было выведено (2.19), только здесь у нас u^N вместо w.

Правая часть (2.19) мажорируется постоянной, не зависящей от N и $t \in [0, T]$, так что

$$\int\limits_{\Omega} \Big[(u^N)^2 + |\nabla u^N|^2 + (u^N_t)^2\Big] dx \leqslant c_4, \quad t \in [0, T] \tag{2.20}$$

и тогда

$$\|u^N\|_{W^1_2(Q_T)} \leqslant c_4(T). \tag{2.21}$$

Благодаря (2.21) из последовательности $\{u^N\}, N = 1, 2, \ldots,$ можно выбрать последовательность (за которой сохраним то же наименование), сходящуюся слабо в $W^1_2(Q_T)$ к некоторому элементу $u_1 \in W^1_2(Q_T)$. Поскольку, согласно условию (2.20), имеет место равномерная по t ограниченность полученной последовательности $\{u^N\}, N = 1, 2, \dots,$ в норме

$$\|u\| = \left(\int\limits_{\Omega} \left[(u^N)^2 + |\nabla u^N|^2 \right] dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

(здесь t считается параметром), то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность (за которой вновь сохраним то же обозначение), которая будет сходиться равномерно по $t \in [0, T]$ в норме $L_2(\Omega)$ к элементу $u \in L_2(\Omega)\, \forall t \in [0, T]$, при этом в силу (2.21) $u \in W_2^1(Q_T)$ [3, с. 214].

Покажем, что $u(x, t)$ есть обобщенное решение задачи (1.1)-(1.4). Начальное условие будет выполнено в силу отмеченной сходимости $u^N(x, t)$ к $u(x, t)$ в $L_2(\Omega)$ и того, что $u^N(x, 0) \to \varphi(x)$ в $L_2(\Omega)$. Теперь умножим (2.8) на свою функцию $d_l(t) \in W_2^1(0, T)$, $d_l(T) = 0$, полученные равенства просуммируем по всем l от 1 до N и проинтегрируем по t от 0 до T. После этого в первом члене проведем интегрирование по частям, перенося $\frac{\partial}{\partial t}$ с u^N на $v \equiv \sum\limits_{i=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x)$. Это даст тождество

$$\int\limits_{Q_T} (-u_t^N v_t + \nabla u^N \nabla v)\, dx\, dt - \int\limits_0^T \int\limits_{\partial\Omega} v \int\limits_{\Omega} K u^N\, dy\, ds\, dt = \int\limits_{Q_T} f v\, dx\, dt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega} u_t^N v|_{t=0}\, dx, \tag{2.22}$$

справедливое $\forall v$ вида $\sum\limits_{i=1}^{N} d_l(t)\varphi_l(x)$. Совокупность таких v обозначим через $\mathfrak{M}_N$. В (2.22) можно перейти к пределу по выбранной выше подпоследовательности при закрепленном v из какого-либо $\mathfrak{M}_{N_i}$. Это приведет к тождеству (1.5) для предельной функции u при $\forall v \in \mathfrak{M}_{N_i}$. Но $\bigcup\limits_{N=1}^{\infty} \mathfrak{M}_N$ плотно в $\hat{W}_2^1(Q_T)$, а $u \in W_2^1(Q_T)$, следовательно, (1.5) будет выполняться для $u(x, t)$ при $\forall v \in \hat{W}_2^1(Q_T)$. Тем самым доказано, что предельная функция $u(x, t)$ есть обобщенное решение из $W_2^1(Q_T)$ задачи (1.1)–(1.4).

Литература

[1] Гордезиани, Д.Г. Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды / Д.Г. Гордезиани, Г.А. Авалишвили // Математическое моделирование, Т. 12. №1. 2000. С. 94–103.

[2] Пулькина, Л.С. Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Математические заметки. 2003. Т. 74. Вып. 3. С. 435–445.

[3] Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. М.: Наука, 1973. 408 с.

[4] Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник для ун-тов. 4-е изд. / К.С. Понтрягин. М.: Наука, 1974. 331 с.

[5] Пулькина, Л.С. Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40. №7. С. 887–892.

[6] Пулькина, Л.С. О разрешимости нелокальной задачи с интегральными условиями для гиперболического уравнения / Л.С. Пулькина // Вестник Самарского гос. университета. Естественнонаучная серия. 1998. №2(8). С. 63–67.

[7] Гординг, Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 122 с.

Поступила в редакцию 28/*IX*/2005;
в окончательном варианте — 28/*IX*/2005.

A NON-LOCAL PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR A WAVE EQUATION[3]

© 2006 V.B. Dmitriev[4]

Non-local problem with integral condition for the hyperbolic equation with n space variables is considered. The existence of the unique generalized solution is proved.

Paper received 28/*IX*/2005.
Paper accepted 28/*IX*/2005.

[3]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. L.S. Pulkina.

[4]Dmitriev Victor Borisovich (dmitriev_v.b@mail.ru), Dept. of Higher Mathematics, Samara State Academy of Railway Communications, Samara, 443066, Russia.