МАТЕМАТИКА

УДК 517.518.1, 517.987.1

ДИАГОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МЕР[1]

© 2006 В.А. Алякин, Д.Э. Клепнев[2]

Понятия сильной диагональности и диагональности последовательности мер были введены в работах [1–4] при изучении условий равностепенной абсолютной непрерывности (РАН) двух последовательностей мер[3]. В настоящей работе вводится новое более слабое определение диагональности последовательности мер, в связи с чем для нового понятия применяется термин "слабая диагональность".

Изучаются свойства диагональных и слабо диагональных последовательностей мер, в частности, показано, что (слабая) диагональность последовательности вещественных аддитивных мер равносильна (слабой) диагональности последовательности их полных вариаций, и получены достаточные условия для всех трех видов диагональности.

Понятие слабой диагональности применено к получению условий РАН двух последовательностей мер. Полученные результаты усиливают результаты работ [1–7] в двух направлениях: во-первых, в настоящей работе рассмотрен немонотонный случай, и, во-вторых, получены условия РАН для более слабого понятия диагональности.

1. Предварительные сведения

Пусть X — некоторое множество, $\mathfrak{R} \subset 2^X$ — кольцо его подмножеств, $\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, +\infty]$ и $\overline{\mathbb{R}}_+ = [0, +\infty]$. Всюду в работе рассматриваются функции множества $\varphi\colon \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, удовлетворяющие условию $\varphi(\varnothing) = 0$.

Функция множества $\mathrm{s}(\varphi)\colon \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$$\mathrm{s}(\varphi)(E) = \sup\{|\varphi(F)| : F \in \mathfrak{R}, F \subset E\},$$

---

[1]Представлена доктором физико-математических наук профессором С.В. Асташкиным.

[2]Алякин Владимир Алексеевич (aval@ssu.samara.ru), Клепнев Дмитрий Эдуардович (dekl@ssu.samara.ru), кафедра функционального анализа и теории функций Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

[3]Напомним, что свойство РАН применяется при изучении вопроса об условиях предельного перехода под знаком интеграла Лебега, когда меняется не только подынтегральная функция, но и мера. См. [8–10].

называется супремацией функции множества φ.

Функция множества $v(\varphi)\colon \mathfrak{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$

$$v(\varphi)(E) = \sup \sum_{k=1}^{n} |\varphi(F_k)|,$$

где супремум берется по всевозможным конечным дизъюнктным последовательностям множеств $(F_k)_{k=1}^n \subset \mathfrak{R}$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ $F_k \subset E$, называется полной вариацией функции множества φ.

Отметим, что для произвольной функции множества φ выполняются следующие свойства (см., например, [11]):

1. $s(\varphi)(\varnothing) = v(\varphi)(\varnothing) = 0$;

2. $\forall E \in \mathfrak{R}$ $|\varphi(E)| \leqslant s(\varphi)(E) \leqslant v(\varphi)(E)$.

Кроме того, если функция φ конечно аддитивна, то

3. $\forall E \in \mathfrak{R}$ $|\varphi(E)| \leqslant s(\varphi)(E) \leqslant v(\varphi)(E) \leqslant 2\, s(\varphi)(E)$. (1)

Определение 1. Функция множества μ называются абсолютно непрерывной относительно функции множества φ (обозначение: $\mu \ll \varphi$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathfrak{R}\ (s(\varphi)(E) < \delta \Rightarrow |\mu(E)| < \varepsilon).$$

Определение 2. Функции множества последовательности $(\mu_k)_k$ называются равностепенно абсолютно непрерывными (РАН) относительно функций множества последовательности $(\varphi_k)_k$ (обозначение: $(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k$), если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall E \in \mathfrak{R}\ \forall k \in \mathbb{N}\ (s(\varphi_k)(E) < \delta \Rightarrow |\mu_k(E)| < \varepsilon).$$

Предложение 1. Функции множества последовательности $(\mu_k)_k$ называются РАН относительно функций множества последовательности $(\varphi_k)_k$, если для любой (не обязательно возрастающей) последовательности номеров $(p_k)_k$ и любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ из условия

$$\lim_{k\to\infty} s(\varphi_{p_k})(E_k) = 0$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{p_k}(E_k) = 0.$$

Доказательство ввиду простоты опускаем.

Также легко видеть, что

$$\mu \ll \varphi \Leftrightarrow s(\mu) \ll s(\varphi)$$

и, кроме того,

$$(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k \Leftrightarrow (s(\mu_k))_k \lll (s(\varphi_k))_k.$$

2. Сильная диагональность и диагональность последовательности мер

Следующие два определения введены в работах [1–4].

Определение 3. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ называется сильно диагональной, если для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ из условия

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(E_k) = 0$$

для всех $m \in \mathbb{N}$.

Определение 4. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ называется диагональной, если для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ из условия

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(E_k) = 0$$

для всех достаточно больших $m \in \mathbb{N}$.

Примером сильно диагональной последовательности является возрастающая последовательность неотрицательных мер. Убывающая последовательность мер также может быть сильно диагональной. Такова, например, последовательность мер $\varphi_k = (1+\frac{1}{k})\lambda$ $(k \in \mathbb{N})$, где λ — мера Лебега на отрезке $[0, 1]$.

Ясно, что из сильной диагональности следует диагональность. Обратное неверно. В самом деле, если $\varphi_1 = \lambda$ и $\varphi_2 = \varphi_3 = \cdots = 0$, то последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ является диагональной, но не сильно диагональной.

Предложение 2. Всякая подпоследовательность (сильно) диагональной последовательности функций множества является (сильно) диагональной.

Доказательство. Пусть $(\varphi_k)_k$ — (сильно) диагональная последовательность функций множества, $(p_k)_k$ — возрастающая последовательность номеров, и пусть $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ — такая последовательность множеств, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_{p_k})(E_k) = 0.$$

Положим $\forall k \in \mathbb{N}\ D_{p_k} = E_k$ и $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{p_k : k \in \mathbb{N}\}\ D_j = \varnothing$. Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(D_k) = 0,$$

следовательно, существует такой номер m ($m = 1$ в случае сильной диагональности), что

$$\forall k \geqslant m\ \lim_{j\to\infty} \varphi_k D_j = 0.$$

Тем более
$$\forall k \geqslant m \ \lim_{j\to\infty} \varphi_{p_k} D_{p_j} = \lim_{j\to\infty} \varphi_{p_k} E_j = 0,$$
что и требовалось.

Заметим, что в работах [3, 5–7] под диагональностью понималась диагональность супремаций, а в работе [4] диагональность супремаций неявно подразумевалась. Тем самым результаты работ [3–7] фактически справедливы только для неотрицательных монотонных функций множества. В связи с этим представляют интерес следующие утверждения.

Теорема 1. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ сильно диагональна тогда и только тогда, когда сильно диагональна последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_k))_k$.

Доказательство ввиду простоты опускаем.

Теорема 2. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ диагональна тогда и только тогда, когда диагональна последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_k))_k$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

Пусть последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ такова, что последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_k))_k$ не является диагональной. Тогда существуют последовательность множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$, возрастающая последовательность номеров $(p_k)_k$ и последовательность $(\varepsilon_k)_k \subset (0, +\infty)$ такие, что
$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0,$$
но
$$\forall k \in \mathbb{N} \ \limsup_{j\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_{p_k})(E_j) > \varepsilon_k.$$

Пусть $(q_k)_k$ — такая последовательность натуральных чисел, что $\forall k \in \mathbb{N}\ q^{-1}(k)$ бесконечно; например, можно взять
$$(q_k)_k = (\underline{1}, \underline{1,2}, \underline{1,2,3}, \underline{1,2,3,4}, \ldots).$$

Найдется такой номер r_1, что $\mathrm{s}(\varphi_{p_{q_1}})(E_{r_1}) > \varepsilon_{q_1}$; тогда существует такое множество $F_{r_1} \in \mathfrak{R}$, что $F_{r_1} \subset E_{r_1}$ и $|\varphi_{p_{q_1}}(F_{r_1})| > \varepsilon_{q_1}$.

Пусть $n \geqslant 1$ и уже найдены номера $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ и множества $\{F_{r_1}, F_{r_2}, \ldots, F_{r_n}\} \subset \mathfrak{R}$ такие, что
$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}\ (F_{r_k} \subset E_{r_k} \wedge |\varphi_{p_{q_k}}(F_{r_k})| > \varepsilon_{q_k}).$$

Тогда найдется такой номер $r_{n+1} > r_n$, что $\mathrm{s}(\varphi_{p_{q_{n+1}}})(E_{r_{n+1}}) > \varepsilon_{q_{n+1}}$; следовательно, существует такое множество $F_{r_{n+1}} \in \mathfrak{R}$, что $F_{r_{n+1}} \subset E_{r_{n+1}}$ и $|\varphi_{p_{q_{n+1}}}(F_{r_{n+1}})| > \varepsilon_{q_{n+1}}$.

В результате получаем определенные по индукции возрастающую последовательность номеров $(r_k)_k$ и последовательность множеств $(F_{r_k})_k \subset \mathfrak{R}$ такие, что
$$\forall k \in \mathbb{N}\ (F_{r_k} \subset E_{r_k} \wedge |\varphi_{p_{q_k}}(F_{r_k})| > \varepsilon_{q_k}).$$

Положим $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ $F_j = \varnothing$. Тогда $\forall j \in \mathbb{N}$ $F_j \subset E_j$, откуда $\forall j \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathrm{s}(\varphi_k)(F_j) \leqslant \mathrm{s}(\varphi_k)(E_j)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(F_k) = 0.$$

Возьмем произвольно номер m. Так как $q^{-1}(m)$ бесконечно, найдется такая возрастающая последовательность номеров $(t_k)_k$, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $q_{t_k} = m$. Тогда $\forall k \in \mathbb{N}$ $|\varphi_{p_{q_{t_k}}}(F_{r_{t_k}})| > \varepsilon_{q_{t_k}}$, то есть $\forall k \in \mathbb{N}$ $|\varphi_{p_m}(F_{r_{t_k}})| > \varepsilon_m$.

Таким образом

$$\limsup_{k\to\infty} |\varphi_{p_m}(F_k)| \geqslant \varepsilon_m,$$

следовательно, в силу произвольности m и бесконечности последовательности номеров $(p_k)_k$, последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ не является диагональной. Теорема доказана.

Следствие. Последовательность конечно аддитивных мер $(\varphi_k)_k$ диагональна тогда и только тогда, когда диагональна последовательность их полных вариаций $(\mathrm{v}(\varphi_k))_k$.

Доказательство. Утверждение справедливо в силу неравенств (1).

Доказательство следующих четырех предложений ввиду простоты опускаем.

Предложение 3. Если $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_k \lll (\varphi_j : j > k)$, то последовательность $(\varphi_k)_k$ сильно диагональна.

Предложение 4 (критерий сильной диагональности). Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_k \ll \varphi_{k+1}$. Последовательность $(\varphi_k)_k$ сильно диагональна тогда и только тогда, когда $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_k \lll (\varphi_j : j > k)$.

Предложение 5. Если $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall k \geqslant m$ $\varphi_k \lll (\varphi_j : j > k)$, то последовательность $(\varphi_k)_k$ диагональна.

Предложение 6 (критерий диагональности). Пусть $\forall k \in \mathbb{N}$ $\varphi_k \ll \varphi_{k+1}$. Последовательность $(\varphi_k)_k$ диагональна тогда и только тогда, когда $\exists m \in \mathbb{N}$ $\forall k \geqslant m$ $\varphi_k \lll (\varphi_j : j > k)$.

3. Слабая диагональность последовательности мер

Определение 5. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ называется преддиагональной, если для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ из того, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0,$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_m(E_k) = 0$$

для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ называется слабо диагональной, если всякая ее подпоследовательность преддиагональна.

Предложение 7. Всякая подпоследовательность слабо диагональной последовательности функций множества является слабо диагональной.

Доказательство. Следует непосредственно из определения.

Пример 1. Пусть λ — мера Лебега на отрезке $[0,1]$. Определим последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ следующим образом:

$$(\varphi_k)_k = (0, \lambda, 0, \lambda, 0, \lambda, \dots).$$

Тогда последовательность $(\varphi_k)_k$ является слабо диагональной, но не является диагональной. В последнем легко убедиться, рассмотрев последовательность множеств,

$$(E_k)_k = ([0,1], \varnothing, [0,1], \varnothing, [0,1], \varnothing, \dots).$$

Предложение 8. Свойство слабой диагональности последовательности функций множества строго слабее, чем свойство диагональности.

Доказательство. В силу примера 1 достаточно показать, что из диагональности последовательности функций множества следует слабая диагональность. Но это сразу следует из предложения 1, поскольку диагональная последовательность функций множества является преддиагональной.

Следующая теорема является аналогом теоремы 2.

Теорема 3. Последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ слабо диагональна тогда и только тогда, когда слабо диагональна последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_k))_k$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

Пусть сначала последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ такова, что последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_k))_k$ не является преддиагональной. То есть существуют последовательность множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$, номер m и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0,$$

но

$$\limsup_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_m)(E_k) > \varepsilon.$$

Тогда существует такая возрастающая последовательность номеров $(p_k)_k$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \ \mathrm{s}(\varphi_m)(E_{p_k}) > \varepsilon.$$

Найдется такая последовательность множеств $(F_{p_k})_k \subset \mathfrak{R}$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \ (F_{p_k} \subset E_{p_k} \wedge |\varphi_m(F_{p_k})| > \varepsilon). \tag{2}$$

Положим $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{p_k : k \in \mathbb{N}\} \ F_j = \varnothing$. Тогда $\forall j \in \mathbb{N} \ F_j \subset E_j$, откуда $\forall j \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N}\ \mathrm{s}(\varphi_k)(F_j) \leqslant \mathrm{s}(\varphi_k)(E_j)$. Отсюда, в частности, следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(F_k) = 0.$$

Но при этом в силу (2) имеем

$$\limsup_{k\to\infty} |\varphi_m(F_k)| > \varepsilon,$$

следовательно, последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ не является преддиагональной.

Пусть теперь последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ такова, что последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_k))_k$ не является слабо диагональной. Тогда существует такая возрастающая последовательность номеров $(p_k)_k$, что последовательность супремаций $(\mathrm{s}(\varphi_{p_k}))_k$ не является преддиагональной. В силу только что доказанного не будет преддиагональной и последовательность функций множества $(\varphi_{p_k})_k$, и, следовательно, последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ не является слабо диагональной. Теорема доказана.

Следствие. Последовательность конечно аддитивных мер $(\varphi_k)_k$ слабо диагональна тогда и только тогда, когда слабо диагональна последовательность их полных вариаций $(\mathrm{v}(\varphi_k))_k$.

Следующее предложение доставляет еще один пример слабо диагональной последовательности мер.

Предложение 9. Если для любой возрастающей последовательности номеров $(p_k)_k$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall k \geqslant m \ \varphi_{p_k} \lll (\varphi_{p_j} : j > k)$, то последовательность $(\varphi_k)_k$ слабо диагональна.

Доказательство. Непосредственно следует из предложения 1.

Предложение 10. (критерий слабой диагональности). Пусть $\forall k \in \mathbb{N} \ \varphi_k \ll \varphi_{k+1}$. Последовательность $(\varphi_k)_k$ слабо диагональна тогда и только тогда, когда для любой возрастающей последовательности номеров $(p_k)_k$ найдется $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\forall k \geqslant m \ \varphi_{p_k} \lll (\varphi_{p_j} : j > k)$.

Доказательство. Следует из предложения 9 и леммы 1 параграфа 4.

4. Равностепенная абсолютная непрерывность двух последовательностей мер

Приводимое ниже понятие трансдиагональности (введенное в работе [3]) двойственно понятию диагональности.

Определение 6. Последовательность функций множества $(\mu_k)_k$ называется трансдиагональной, если для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ и для любой возрастающей последовательности номеров $(p_k)_k$ из условия

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \lim_{j\to\infty} \mathrm{s}(\mu_{p_k})(E_j) = 0$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{p_k}(E_k) = 0.$$

Лемма 1. Пусть $(\mu_k)_k$ и $(\varphi_k)_k$ — последовательности функций множеств. Если $\forall k \in \mathbb{N} \ \mu_k \ll \varphi_k$, то $(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ из того, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0,$$

следует

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k(E_k) = 0.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что свойство РАН не имеет места. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \exists E \in \mathfrak{R}\ (\mathrm{s}(\varphi_k)(E) < \delta \wedge |\mu_k(E)| \geqslant \varepsilon).$$

Возьмем такое $\varepsilon > 0$. Тогда найдутся последовательность множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$ и последовательность номеров $(p_k)_k$ такие, что

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (\mathrm{s}(\varphi_{p_k})(E_k) < \frac{1}{k} \wedge |\mu_{p_k}(E_k)| \geqslant \varepsilon).$$

Если $p^{-1}(k)$ бесконечно для некоторого номера k, то $\mu_k \ll \varphi_k$ не имеет места, что противоречит условию. Следовательно, каждый номер встречается в последовательности $(p_k)_k$ лишь конечное число раз; поэтому существует такая возрастающая последовательность номеров $(r_k)_k$, что последовательность $(p_{r_k})_k$ также возрастает. Тогда

$$\forall k \in \mathbb{N}\ (\mathrm{s}(\varphi_{p_{r_k}})(E_{r_k}) < \frac{1}{r_k} \wedge |\mu_{p_{r_k}}(E_{r_k})| \geqslant \varepsilon).$$

Положим $\forall k \in \mathbb{N}\ t_k = p_{r_k}$, затем $\forall k \in \mathbb{N}$ положим $D_{t_k} = E_{r_k}$ и $\delta_{t_k} = \frac{1}{r_k}$, наконец $\forall j \in \mathbb{N} \setminus \{t_k : k \in \mathbb{N}\}$ положим $D_j = \varnothing$ и $\delta_j = 0$. Тем самым получим последовательность множеств $(D_k)_k \subset \mathfrak{R}$ и последовательность $(\delta_k)_k \subset [0, +\infty)$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k = 0$ и

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{s}(\varphi_k)(D_k) \leqslant \delta_k,$$

но при этом

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |\mu_{t_k}(D_{t_k})| \geqslant \varepsilon,$$

что противоречит условию. Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть трансдиагональная последовательность функций множества $(\mu_k)_k$ и слабо диагональная последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ таковы, что $\forall k \in \mathbb{N}\ \mu_k \ll \varphi_k$. Тогда $(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k$.

Доказательство. Предположим противное — что условия теоремы выполнены, но свойство РАН не имеет места. Тогда в силу леммы 1 существует такая последовательность множеств $(E_k)_k \subset \mathfrak{R}$, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_k)(E_k) = 0,$$

но при этом

$$\limsup_{k\to\infty} |\mu_k(E_k)| > 0.$$

Тогда существуют возрастающая последовательность номеров $(n_k)_k$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{s}(\varphi_{n_k})(E_{n_k}) = 0$$

и выполняется неравенство

$$\forall k \in \mathbb{N}\ |\mu_{n_k}(E_{n_k})| \geqslant \varepsilon.$$

Последовательность супремаций $(s(\varphi_{n_k}))_k$ в силу теоремы 3 слабо диагональна, поэтому существует такая возрастающая последовательность номеров $(p_k)_k$, что

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \lim_{j\to\infty} s(\varphi_{n_{p_k}})(E_{n_j}) = 0.$$

Следовательно, в силу условия $\forall k \in \mathbb{N}\ \mu_k \ll \varphi_k$ имеем

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \lim_{j\to\infty} s(\mu_{n_{p_k}})(E_{n_j}) = 0,$$

тем более

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \lim_{j\to\infty} s(\mu_{n_{p_k}})(E_{n_{p_j}}) = 0.$$

Тогда в силу трансдиагональности последовательности функций множества $(\mu_k)_k$ (и последовательности $(\mu_{n_{p_k}})_k$) получим

$$\lim_{k\to\infty} \mu_{n_{p_k}}(E_{n_{p_k}}) = 0,$$

что противоречит сделанному предположению. Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть последовательность полуаддитивных функций множества $(\mu_k)_k$ — равномерно исчерпывающая, последовательность функций множества $(\varphi_k)_k$ — слабо диагональная, причем $\forall k \in \mathbb{N}\ \mu_k \ll \varphi_k$. Тогда $(\mu_k)_k \lll (\varphi_k)_k$.

Заметим, что без предположения о слабой диагональности последовательности функций множества $(\varphi_k)_k$ теорема неверна. Это легко усмотреть из следующего примера.

Пример 2. Пусть λ — мера Лебега, $\forall k \in \mathbb{N}\ \mu_k = \lambda$, $\varphi_k = \frac{1}{k}\lambda$. Тогда все условия теоремы 5, кроме условия слабой диагональности последовательности функций множества $(\varphi_k)_k$, выполняются. При этом отсутствует и свойство РАН.

Литература

[1] Климкин, В.М. О равностепенной абсолютной непрерывности / В.М. Климкин // Матем. заметки, 1979. Т. 25. №2. С. 199–209.

[2] Алякин, В.А. Диагональные семейства функций множества и обобщенная теорема Витали–Хана–Сакса–Никодима / В.А. Алякин // Деп. в ВИНИТИ, №1215–79.

[3] Алякин, В.А. Об одном свойстве семейства неаддитивных функций множества / В.А. Алякин // Функциональный анализ. Ульяновск, 1979. Вып. 13. С. 39–48.

[4] Климкин, В.М. Введение в теорию функции множества: учеб. пособие / В.М. Климкин. Саратов: Изд-во Саратовского университета, Куйбышевский филиал, 1989.

[5] Алякин, В.А. Некоторые вопросы теории многозначных и полугрупповых мер: дис … канд. физ.-мат. наук. / В.А. Алякин Саратов, 1982.

[6] Алякин, В.А. Теорема Витали–Хана–Сакса для двух последовательностей мер / В.А. Алякин // Вопросы функционального анализа. Мера и интеграл. Куйбышев, 1984.

[7] Климкин, В.М. Избранные главы теории меры / В.М. Климкин. Самара: Издательство «Самарский университет», 2005. 143 с.

[8] Арешкин, Г.Я. О переходе к пределу под знаком интеграла Радона / Г.Я. Арешкин // Сообщ. АН Груз. ССР, 1949. Т. 10. №2, С. 69–76.

[9] Алексюк, В.Н. О переходе к пределу под знаком интеграла / В.Н. Алексюк // Изв. вузов. Математика. 1965. №5. С. 2–8.

[10] Арешкин, Г.Я. Об одном обобщении теоремы Витали о переходе к пределу под знаком интеграла / Г.Я. Арешкин, В.М. Климкин. // Ученые записки ЛГПИ им. А. И. Герцена. Л., 1968. Т. 387. С. 79–91.

[11] Богачев, В.И. Основы теории меры / В.И. Богачев. М.; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2003, Т. 1. 544 с.

Поступила в редакцию 24/*XII*/2005;
в окончательном варианте — 24/*XII*/2005.

THE DIAGONAL SEQUENCES OF MEASURES[4]

 V.A. Alyakin, D.E. Klepnev[5]

A new notion of diagonality of sequence of measures is introduced. It is shown that the diagonality of measures implies the diagonality of its full variations. The sufficient conditions of uniform absolute continuity for two sequences of measures are obtained.

Paper received 24/*XII*/2005.
Paper accepted 24/*XII*/2005.

---

[4]Communicated by Dr. Sci. (Phys. & Math.) Prof. S.V. Astashkin.

[5]Alyakin Vladimir Alekseevich (aval@ssu.samara.ru), Klepnev Dmitriy Eduardovich (dekl@ssu.samara.ru), Dept. of Functional Analysis and Theory of Functions, Samara State University, Samara, 443011, Russia.