

УДК 539.374

О ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ СВЯЗАННЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

© 2005 Ю.Н. Радаев, Н.А. Курнышева¹

Рассматривается напряженно-деформированное состояние жестко-пластического тела с рассеянным анизотропным полем микроповреждений. Поврежденность представляется симметричным тензором поврежденности второго ранга, главные оси которого совпадают с главными осями тензора напряжений. Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений, что наиболее удобно для представления и анализа уравнений связанной задачи. Рассмотрен случай плоской пластической деформации и показано, что система основных соотношений относится к гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случай связанных состояний.

1. Математическая модель анизотропного распределения поврежденности

В представляемой работе рассматривается связанная задача математической теории пластичности. Связанная постановка задач необходима в механике деформируемого твердого тела для того, чтобы учесть искажение пластического течения полем повреждений, и одновременно возрастание повреждений в процессе накопления пластических деформаций. Эта задача значительно сложнее с точки зрения общих свойств уравнений, возможных постановок задач и возможных подходов к их интегрированию по сравнению с традиционными уравнениями теории идеальной пластичности. Актуальным также представляется учет анизотропии распределения поврежденности в основных уравнениях математической теории пластичности. Цель работы состоит в том, чтобы дать вывод основных соотношений связанной

¹Радаев Юрий Николаевич (radayev@ssu.samara.ru), Курнышева Наталья Александровна (knatalyasamgu@mail.ru), кафедра механики сплошных сред Самарского государственного университета, 443011, Россия, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

задачи² и указать случаи их гиперболичности, обобщив тем самым понятие поля скольжения на случай связанных состояний. Математическое моделирование пластического течения, сопровождающегося накоплением повреждений, подразумевает описание разупрочнения и соответствующую нетривиальную модификацию инкрементальных соотношений теории пластичности.

Математическое моделирование анизотропной поврежденности являлось предметом интенсивных исследований на протяжении последних десятилетий [1, 7].

Под поврежденностью, следуя [8], понимается сокращение обратимого отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием рассеянного поля микроповреждений, которые при пластическом течении проявляются в форме распределения дислокаций. В рамках математической модели поврежденность, как правило, представляется специальной тензорной переменной — тензором поврежденности. Тензорная мера анизотропной поврежденности является мерой сокращения, вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку площади двумерного элемента тела в зависимости от его ориентации (см. рис. 1, 2).

В [2, 3] с самого начала тензорная мера анизотропной поврежденности вводится как симметричный тензор второго ранга. Это позволяет преодолеть трудности, связанные с несимметричностью введенных ранее тензорных мер анизотропной поврежденности, а также дать ясную геометрическую и механическую интерпретацию собственных значений и главных направлений тензора поврежденности.

Будучи симметричным тензором второго ранга, тензор поврежденности **D** имеет три взаимно ортогональных главных направления (главные оси поврежденности) и три соответствующих собственных значения (главные поврежденности). Векторы ортонормированного базиса из собственных векторов тензора **D** будем обозначать через **d**_α, а собственные значения — через *D*_α. В дальнейшем будет предполагаться, что базис **d**₁, **d**₂, **d**₃ ориентирован точно так же, как и базис из собственных векторов тензора напряжений **l**, **m**, **n**. Это положение нуждается в обосновании, поскольку, вообще говоря, оно может и не выполняться.

Тензор поврежденности удобно представлять в форме спектрального разложения

$$\mathbf{D} = \sum_{\alpha=1}^3 D_{\alpha} \mathbf{d}_{\alpha} \otimes \mathbf{d}_{\alpha}. \quad (1.1)$$

²Используя для этого преимущества изостатической системы координат.

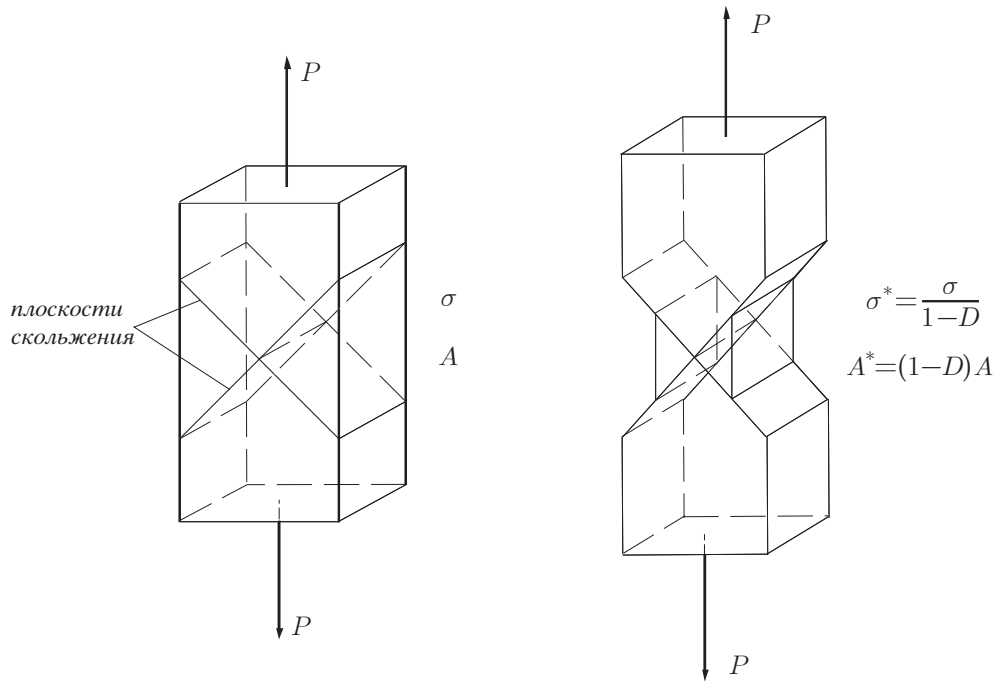


Рис. 1. Математическая модель сокращения эффективной площади вследствие скольжения при одноосном растяжении жесткопластического образца (схема Оната—Прагера [9]). Скольжение происходит вдоль двух изолированных плоскостей

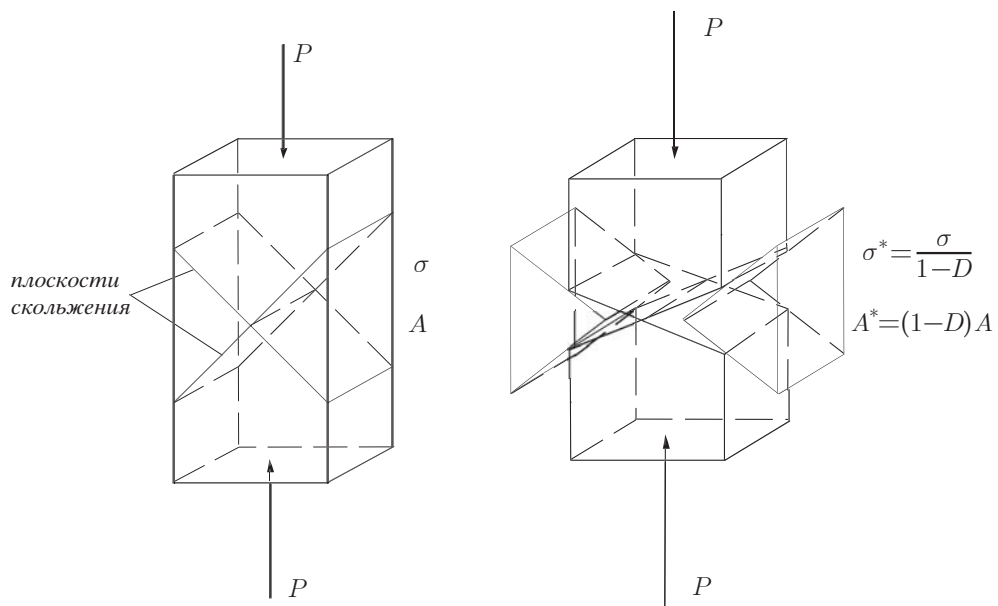


Рис. 2. Математическая модель сокращения эффективной площади вследствие скольжения при одноосном сжатии

Главные поврежденности выражают сокращение несущей нагрузку площади элементов, нормальных главным осям поврежденности (см. [3]):

$$dA_{\beta}^* = (1 - D_{\beta})dA_{\beta} \quad (\text{по } \beta \text{ не суммировать}). \quad (1.2)$$

2. Основные соотношения связанной задачи

2.1. Уравнения равновесия в криволинейной сетке изостат

Рассмотрим уравнения равновесия в ортогональной криволинейной сетке изостат, известные как уравнения Ламе (см., например, [10, р. 91], [11, с. 42, 43], [12, с. 230–232]).

Спектральное разложение тензора напряжений Коши имеет вид:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \sigma_2 \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \sigma_3 \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (2.1)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные нормальные напряжения; $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ — базисные орты, направленные вдоль главных осей напряжений.

Уравнение равновесия в инвариантной форме есть

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Обозначим через d_k производную по направлению изостатической траектории с номером k

$$d_k \equiv \frac{1}{\sqrt{g_{kk}}} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \quad (\text{по } k \text{ не суммировать } (k = 1, 2, 3)), \quad (2.3)$$

где ξ^k — ортогональные криволинейные изостатические координаты; g_{ij} — компоненты метрического тензора.

Вводя кривизны κ_{ij} (где κ_{ij} есть кривизна проекции изостаты с номером i , причем проектирование осуществляется параллельно главному направлению j на плоскость, ортогональную этому направлению)

$$\begin{cases} \kappa_{23} = -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}], & \kappa_{32} = -\mathbf{l} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}], \\ \kappa_{13} = -\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}], & \kappa_{31} = -\mathbf{m} \cdot [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{n}], \\ \kappa_{12} = -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{l}], & \kappa_{21} = -\mathbf{n} \cdot [(\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{m}], \end{cases} \quad (2.4)$$

приведем уравнения Ламе (2.2) к виду (ср. [11, с. 43, уравнение 20])

$$\begin{cases} d_1 \sigma_1 + \kappa_{23} (\sigma_1 - \sigma_2) + \kappa_{32} (\sigma_1 - \sigma_3) = 0, \\ d_2 \sigma_2 + \kappa_{31} (\sigma_2 - \sigma_3) + \kappa_{13} (\sigma_2 - \sigma_1) = 0, \\ d_3 \sigma_3 + \kappa_{12} (\sigma_3 - \sigma_1) + \kappa_{21} (\sigma_3 - \sigma_2) = 0, \end{cases} \quad (2.5)$$

где значения кривизн κ_{ij} вдоль изостат можно, пользуясь деривационными формулами [13], связать уравнениями

$$\begin{aligned} d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{32}^2 + \kappa_{12}^2 + \kappa_{13} \kappa_{31} &= 0, \\ d_1 \kappa_{23} + d_2 \kappa_{13} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{21} \kappa_{12} &= 0, \\ d_2 \kappa_{31} + d_3 \kappa_{21} + \kappa_{31}^2 + \kappa_{21}^2 + \kappa_{32} \kappa_{23} &= 0, \\ d_2 \kappa_{12} &= \kappa_{13} (\kappa_{21} - \kappa_{12}), \\ d_3 \kappa_{23} &= \kappa_{21} (\kappa_{32} - \kappa_{23}), \\ d_1 \kappa_{31} &= \kappa_{32} (\kappa_{13} - \kappa_{31}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

или, что эквивалентно, — уравнениями

$$\begin{aligned}
 d_1 \kappa_{32} + d_3 \kappa_{12} + \kappa_{32}^2 + \kappa_{12}^2 + \kappa_{13} \kappa_{31} &= 0, \\
 d_1 \kappa_{23} + d_2 \kappa_{13} + \kappa_{23}^2 + \kappa_{13}^2 + \kappa_{21} \kappa_{12} &= 0, \\
 d_2 \kappa_{31} + d_3 \kappa_{21} + \kappa_{31}^2 + \kappa_{21}^2 + \kappa_{32} \kappa_{23} &= 0, \\
 d_3 \kappa_{13} &= \kappa_{12} (\kappa_{31} - \kappa_{13}), \\
 d_1 \kappa_{21} &= \kappa_{23} (\kappa_{12} - \kappa_{21}), \\
 d_2 \kappa_{32} &= \kappa_{31} (\kappa_{23} - \kappa_{32}).
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Чаше всего оказывается удобнее использовать формулировку уравнений относительно приращений. Уравнения равновесия в приращениях имеют вид

$$\nabla \cdot (d\sigma) = 0. \tag{2.8}$$

При дифференцировании спектрального разложения тензора напряжений (2.1) вдоль процесса нагружения необходимо дифференцировать также и базисные векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$, поскольку, вообще говоря, они будут поворачиваться при нагружении. С целью описания поворота главных осей напряжений $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ при малом догружении введем вектор $d\omega$ такой, что

$$d\mathbf{l} = d\omega \times \mathbf{l}, \quad d\mathbf{m} = d\omega \times \mathbf{m}, \quad d\mathbf{n} = d\omega \times \mathbf{n}. \tag{2.9}$$

Здесь $d\omega$ следует рассматривать как единый символ, обозначающий вектор, определяемый согласно (2.9), а не приращение вектора, стоящего под знаком дифференциала³.

Разложим вектор $d\omega$ по ортонормированному собственному локальному базису тензора напряжений $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$:

$$d\omega = \mathbf{l} d\omega_{<1>} + \mathbf{m} d\omega_{<2>} + \mathbf{n} d\omega_{<3>}. \tag{2.10}$$

Заметим, что $d\omega_{<j>}$ есть физические компоненты вектора $d\omega$ по отношению к изостатической координатной сетке. Они не являются приращениями. Поэтому $d\omega_{<j>}$ следует трактовать как единый символ. Для простоты мы в дальнейшем будем использовать более короткое обозначение $d\omega_j$, опуская треугольные скобки.

Изменение ориентаций базисных векторов на основании (2.9) и (2.10) вычисляется как

$$d\mathbf{l} = -\mathbf{n} d\omega_2 + \mathbf{m} d\omega_3, \quad d\mathbf{m} = \mathbf{n} d\omega_1 - \mathbf{l} d\omega_3, \quad d\mathbf{n} = -\mathbf{m} d\omega_1 + \mathbf{l} d\omega_2. \tag{2.11}$$

Дифференцируя спектральное разложение тензора напряжений (2.1) вдоль процесса нагружения и учитывая (2.11), получим

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\sigma_1 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\sigma_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\sigma_3 + \\
 &\quad + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} (\sigma_1 - \sigma_2) d\omega_3 + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} (\sigma_3 - \sigma_1) d\omega_2 + \\
 &\quad + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} (\sigma_1 - \sigma_2) d\omega_3 + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} (\sigma_2 - \sigma_3) d\omega_1 + \\
 &\quad + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} (\sigma_3 - \sigma_1) d\omega_2 + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} (\sigma_2 - \sigma_3) d\omega_1.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

³Это обстоятельство мы не отражаем в нашей системе обозначений, чтобы не усложнять запись уравнений. Ясно, что при этом мы создаем ряд неудобств, затрудняющих понимание работы. Так, например, $d\sigma$ является действительным приращением тензора напряжений при догружении, в то время как $d\omega$ приращением не является.

В дальнейшем будут необходимы следующие соотношения:

$$\nabla \cdot (\mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{n}, \quad (2.13)$$

а также

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{l} \otimes \mathbf{n}) = \mathbf{n}(\mathbf{l} \cdot \nabla) \varphi + \varphi \mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{l}) + \varphi (\mathbf{l} \cdot \nabla) \mathbf{n}. \quad (2.14)$$

Учитывая (2.12)–(2.14), находим уравнения равновесия в приращениях (2.8) относительно линий главных напряжений:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 d\sigma_1 + \kappa_{23} (d\sigma_1 - d\sigma_2) + \kappa_{32} (d\sigma_1 - \sigma_3) + \\ \quad + (2\kappa_{13} + \kappa_{31} + d_2) [(\sigma_1 - \sigma_2) d\omega_3] + \\ \quad + (2\kappa_{12} + \kappa_{21} + d_3) [(\sigma_3 - \sigma_1) d\omega_2] = 0, \\ d_2 d\sigma_2 + \kappa_{31} (d\sigma_2 - d\sigma_3) + \kappa_{13} (d\sigma_2 - \sigma_1) + \\ \quad + (2\kappa_{23} + \kappa_{32} + d_1) [(\sigma_1 - \sigma_2) d\omega_3] + \\ \quad + (2\kappa_{21} + \kappa_{12} + d_3) [(\sigma_2 - \sigma_3) d\omega_1] = 0, \\ d_3 d\sigma_3 + \kappa_{12} (d\sigma_3 - d\sigma_1) + \kappa_{21} (d\sigma_3 - \sigma_2) + \\ \quad + (2\kappa_{32} + \kappa_{23} + d_1) [(\sigma_3 - \sigma_1) d\omega_2] + \\ \quad + (\kappa_{13} + 2\kappa_{31} + d_2) [(\sigma_2 - \sigma_3) d\omega_1] = 0, \end{array} \right. \quad (2.15)$$

где $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ — приращения главных напряжений⁴.

Заметим, что второе и третье уравнения в системе (2.15) получаются из первого циклической перестановкой индексов.

2.2. Уравнения совместности приращений малых деформаций в криволинейной сетке изостат

Сформулируем далее уравнения совместности приращений малых деформаций в ортогональной криволинейной сетке ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Уравнение совместности малых деформаций в приращениях, как известно, имеет вид [12]

$$d\mathbf{S} = \nabla \times d\mathbf{P} = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

где тензор второго ранга $d\mathbf{P}$ есть транспонированный вихрь тензора приращений полных деформаций

$$d\mathbf{P} = (\nabla \times d\boldsymbol{\epsilon})^T. \quad (2.17)$$

Тензор несовместности $d\mathbf{S}$ симметричен:

$$d\mathbf{S} = (d\mathbf{S})^T. \quad (2.18)$$

Тензор $d\mathbf{P}$ антисимметричен, поскольку:

$$(\nabla \times d\boldsymbol{\epsilon})^T = -(d\boldsymbol{\epsilon} \times \nabla). \quad (2.19)$$

⁴Эти величины представляют собой действительные приращения главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ при малом догружении.

Физические компоненты тензора несовместности $d\mathbf{S}$ вычисляются в форме [13]:

$$\begin{aligned}
 dS_{<11>} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{h_2} \left[\frac{\partial (h_2 d\epsilon_{<32>})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\epsilon_{<33>})}{\partial \xi^2} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{d\epsilon_{<12>}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} + \frac{d\epsilon_{<23>}}{h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\epsilon_{<22>}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \right\} - \\
 & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{1}{h_3} \left[\frac{\partial (h_2 d\epsilon_{<22>})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\epsilon_{<23>})}{\partial \xi^2} \right] - \right. \\
 & - \frac{d\epsilon_{<32>}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\epsilon_{<13>}}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} - \frac{d\epsilon_{<33>}}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_1 d\epsilon_{<21>})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\epsilon_{<22>})}{\partial \xi^1} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\epsilon_{<31>}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\epsilon_{<12>}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} + \frac{d\epsilon_{<11>}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \right] - \\
 & - \frac{1}{h_1^2 h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_3 d\epsilon_{<33>})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\epsilon_{<31>})}{\partial \xi^3} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\epsilon_{<21>}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} + \frac{d\epsilon_{<13>}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} + \frac{d\epsilon_{<11>}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \right], \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 dS_{<12>} = & \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left\{ \frac{1}{h_1} \left[\frac{\partial (h_3 d\epsilon_{<33>})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\epsilon_{<31>})}{\partial \xi^3} \right] - \right. \\
 & - \frac{d\epsilon_{<21>}}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\epsilon_{<13>}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} - \frac{d\epsilon_{<11>}}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \left. \right\} - \\
 & - \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left\{ \frac{h_2}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial (h_3 d\epsilon_{<23>})}{\partial \xi^1} - \frac{\partial (h_1 d\epsilon_{<21>})}{\partial \xi^3} \right] + \right. \\
 & + \frac{d\epsilon_{<31>}}{h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} - \frac{d\epsilon_{<13>}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \left. \right\} + \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{\partial (h_2 d\epsilon_{<23>})}{\partial \xi^3} - \frac{\partial (h_3 d\epsilon_{<33>})}{\partial \xi^2} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \left[\frac{d\epsilon_{<12>}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} + \frac{d\epsilon_{<23>}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\epsilon_{<22>}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \left[\frac{\partial (h_1 d\epsilon_{<21>})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\epsilon_{<22>})}{\partial \xi^1} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \left[\frac{d\epsilon_{<31>}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} + \frac{d\epsilon_{<12>}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} + \frac{d\epsilon_{<11>}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_1 h_2^2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left[\frac{\partial (h_1 d\epsilon_{<31>})}{\partial \xi^2} - \frac{\partial (h_2 d\epsilon_{<32>})}{\partial \xi^1} \right] + \\
 & + \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \left[\frac{d\epsilon_{<12>}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} - \frac{d\epsilon_{<21>}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \right], \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

где $h_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}}$ (по α не суммировать) — параметры Ламе; $d\epsilon_{<ij>}$ — физические компоненты тензора $d\epsilon$ в изостатической системе координат:

$$\begin{aligned}
 d\epsilon = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} d\epsilon_{<11>} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} d\epsilon_{<12>} + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} d\epsilon_{<13>} + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} d\epsilon_{<22>} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} d\epsilon_{<21>} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} d\epsilon_{<23>} + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} d\epsilon_{<33>} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} d\epsilon_{<31>} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} d\epsilon_{<32>}. \tag{2.22}
 \end{aligned}$$

Компоненты $dS_{<22>}$, $dS_{<33>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.20). Компоненты $dS_{<23>}$, $dS_{<31>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.21).

Здесь представляется уместным еще раз упомянуть о том, что ни $d\mathbf{\epsilon}_{<ij>}$, ни $d\epsilon_{<ij>}$ не являются приращениями величин, находящихся под знаком дифференциала.

Опираясь на приведенные формулы, запишем уравнение совместности для приращений пластических деформаций в изостатической сетке. Мы будем пренебрегать упругими деформациями: $d\mathbf{\epsilon} = d\mathbf{\epsilon}^P$. Поскольку тензоры $\boldsymbol{\sigma}$ и $d\mathbf{\epsilon}^P$ соосны, то в сетке изостат матрица тензора $d\mathbf{\epsilon}^P$ диагональна, и в физических компонентах имеем

$$\begin{aligned} dS_{<11>} = & -d_2d_2d\epsilon_3 - d_3d_3d\epsilon_2 + (\kappa_{21}^2 - \kappa_{31}^2)(d\epsilon_3 - d\epsilon_2) + \\ & + d_3(\kappa_{21}(d\epsilon_3 - d\epsilon_2)) - d_2(\kappa_{31}(d\epsilon_3 - d\epsilon_2)) - \\ & - \kappa_{23}\kappa_{32}(d\epsilon_2 + d\epsilon_3 - 2d\epsilon_1) - \kappa_{31}d_2d\epsilon_3 - \\ & - \kappa_{21}d_3d\epsilon_2 - \kappa_{32}d_1d\epsilon_2 - \kappa_{23}d_1d\epsilon_3, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} dS_{<12>} = & d_2d_1d\epsilon_3 + d_2[\kappa_{32}(d\epsilon_3 - d\epsilon_1)] + \kappa_{31}d_1(d\epsilon_3 - d\epsilon_2) - \\ & - \kappa_{23}d_2d\epsilon_3 + \kappa_{31}(d\epsilon_3 - d\epsilon_1)(\kappa_{32} - \kappa_{23}), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $d\mathbf{\epsilon} = \mathbf{l} \otimes l d\epsilon_1 + \mathbf{m} \otimes m d\epsilon_2 + \mathbf{n} \otimes n d\epsilon_3$.

Как и прежде, компоненты $dS_{<22>}$, $dS_{<33>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.23). Компоненты $dS_{<23>}$, $dS_{<31>}$ получаются циклической перестановкой индексов в (2.24).

В случае плоской сжимаемой пластической деформации имеется всего одно соотношение

$$dS_{<33>} = 0 \quad (2.25)$$

или

$$\begin{aligned} -dS_{<33>} = & d_1d_1d\epsilon_2 + d_2d_2d\epsilon_1 + \\ & + (d\epsilon_2 - d\epsilon_1)(d_1\kappa_2 - d_2\kappa_1 + \kappa_2^2 - \kappa_1^2) + \\ & + \kappa_{21}d_1(2d\epsilon_2 - d\epsilon_1) + \kappa_{12}d_2(2d\epsilon_1 - d\epsilon_2) = 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

2.3. Условие совместности для приращений поворотов

Сформулируем далее уравнения совместности для приращений поворотов в криволинейной сетке ξ^1, ξ^2, ξ^3 .

Вектор поворота $d\boldsymbol{\Omega}$ определяется как половина вихря вектора приращений перемещений

$$2d\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times d\mathbf{u}. \quad (2.27)$$

Из данного определения следует уравнение совместности для поворотов в приращениях

$$\nabla \cdot d\boldsymbol{\Omega} = 0. \quad (2.28)$$

В изостатической системе координат уравнение совместности для приращений поворотов (2.28) примет вид

$$(\kappa_{23} + \kappa_{32})d\Omega_1 + (\kappa_{13} + \kappa_{31})d\Omega_2 + (\kappa_{12} + \kappa_{21})d\Omega_3 + d_1d\Omega_1 + d_2d\Omega_2 + d_3d\Omega_3 = 0, \quad (2.29)$$

где $d\Omega_j$ — физические компоненты вектора $d\mathbf{\Omega}$ в изостатической системе координат и, следовательно, они не являются действительными приращениями.

2.4. Соотношения Коши для плоской задачи в изостатической сетке координат

Соотношения Коши в приращениях есть

$$2d\mathbf{\epsilon} = (\nabla \otimes d\mathbf{u}) + (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (2.30)$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса на плоскости $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$:

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{<1>} + \mathbf{m}du_{<2>}. \quad (2.31)$$

Заметим, что величины $du_{<j>}$ не являются действительными приращениями, а представляют собой компоненты разложения вектора $d\mathbf{u}$ по базису $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$. Тем не менее о величинах $du_{<j>}$ мы будем говорить как о приращениях перемещений.

Оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, имеет форму

$$\nabla = h_1^{-1}\mathbf{l}\frac{\partial}{\partial\xi^1} + h_2^{-1}\mathbf{m}\frac{\partial}{\partial\xi^2}. \quad (2.32)$$

Оператор $\nabla \otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\nabla \otimes d\mathbf{u} = \mathbf{l} \otimes \nabla du_{<1>} + \mathbf{m} \otimes \nabla du_{<2>} + (du_{<1>}) \nabla \otimes \mathbf{l} + (du_{<2>}) \nabla \otimes \mathbf{m}. \quad (2.33)$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \nabla du_{<1>} &= h_1^{-1}\mathbf{l}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^1} + h_2^{-1}\mathbf{m}\frac{\partial du_{<1>}}{\partial\xi^2}, \\ \nabla du_{<2>} &= h_1^{-1}\mathbf{l}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^1} + h_2^{-1}\mathbf{m}\frac{\partial du_{<2>}}{\partial\xi^2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial\xi^1} &= -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}\mathbf{m}, & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial\xi^1} &= \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial\xi^2}\mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial\xi^2} &= \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\mathbf{m}, & \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial\xi^2} &= -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial\xi^1}\mathbf{l}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

приходим к формулам

$$\begin{aligned} \nabla \otimes \mathbf{l} &= -h_1^{-1}(d_2h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + h_2^{-1}(d_1h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \\ \nabla \otimes \mathbf{m} &= h_1^{-1}(d_2h_1)\mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - h_2^{-1}(d_1h_2)\mathbf{m} \otimes \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Используя (2.34) и (2.36), градиент приращений перемещений (2.33) можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} \nabla \otimes d\mathbf{u} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<2>} + (d_1 du_{<1>}) \right] + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<1>} + (d_2 du_{<2>}) \right] + \\ & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<1>} + (d_2 du_{<1>}) \right] + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<2>} + (d_1 du_{<2>}) \right]. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Транспонировав уравнение (2.37), получаем

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes d\mathbf{u})^T = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<2>} + (d_1 du_{<1>}) \right] + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<1>} + (d_2 du_{<2>}) \right] + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<1>} + (d_2 du_{<1>}) \right] + \\ & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<2>} + (d_1 du_{<2>}) \right]. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Подставляя выражения (2.37) и (2.38) в соотношение Коши (2.30), приходим к

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\varepsilon} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<2>} + (d_1 du_{<1>}) \right] + \\ & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<1>} + (d_2 du_{<2>}) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left[-h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<1>} + (d_2 du_{<1>}) - \right. \\ & \quad \left. - h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<2>} + (d_1 du_{<2>}) \right] \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} + \\ & + \frac{1}{2} \left[-h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<1>} + (d_2 du_{<1>}) - \right. \\ & \quad \left. - h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<2>} + (d_1 du_{<2>}) \right] \mathbf{m} \otimes \mathbf{l}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

В силу того, что $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, а также ассоциированного закона течения, из которого следует соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, из формулы Коши (2.39) вытекают три соотношения

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_1^P = h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<2>} + d_1 du_{<1>}, \quad (2.40)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_2^P = h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<1>} + d_2 du_{<2>}, \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} -h_1^{-1} (d_2 h_1) du_{<1>} + d_2 du_{<1>} - \\ -h_2^{-1} (d_1 h_2) du_{<2>} + d_1 du_{<2>} = 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Вводя кривизны изостатических траекторий κ_1 , κ_2 согласно

$$\begin{aligned} d_2 h_1 &= h_1 \kappa_1, \\ d_1 h_2 &= h_2 \kappa_2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

в соотношения (2.40)–(2.42), получим

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_1^P = \kappa_1 du_{<2>} + d_1 du_{<1>}, \quad (2.44)$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_2^P = \kappa_2 du_{<1>} + d_2 du_{<2>}, \quad (2.45)$$

$$d_1 du_{<2>} - \kappa_1 du_{<1>} + d_2 du_{<1>} - \kappa_2 du_{<2>} = 0. \quad (2.46)$$

Приведем также матричную форму двумерных соотношений Коши:

$$\begin{pmatrix} d\epsilon_1^P \\ d\epsilon_2^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_1 \\ \kappa_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Трехмерные соотношения Коши в изостатической системе координат выводятся в приложении.

2.5. Эффективные напряжения

Рассмотрим призматический образец, растягиваемый силой P . Обозначим через A и A^* соответственно площадь поперечного сечения образца в начальном неповрежденном и текущем поврежденном состояниях соответственно (см. рис. 1, 2). В силу того, что параметр поврежденности D представляет собой относительное сокращение эффективной площади, то для параметра D имеет место следующее простое соотношение:

$$1 - D = \frac{A^*}{A}. \quad (2.48)$$

Вызванное внутренним распределением повреждений сокращение эффективной площади сразу же приводит к важнейшему представлению об эффекте возрастания внутренних напряжений в теле с распределенными повреждениями. Действительно, наряду с напряжениями

$$\sigma = \frac{P}{A}, \quad (2.49)$$

очевидно, следует рассмотреть эффективные напряжения

$$\sigma^{\circ} = \frac{P}{A^*}, \quad (2.50)$$

которые в силу формулы (2.48) можно также представить в виде

$$\sigma^{\circ} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.51)$$

или в общем случае, учитывая соосность тензора напряжений и тензора поврежденности,

$$\sigma_j^{\circ} = \frac{\sigma_j}{1 - D_j} \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}). \quad (2.52)$$

Ясно, что $\sigma_j^{\circ} > \sigma_j$, если поврежденность ненулевая.

2.6. Обобщенное условие текучести Треска для микроповрежденного тела

Понятие эффективного напряжения позволяет весьма просто произвести обобщение критериев текучести изотропных тел так, чтобы учесть возможную их повреждаемость. Действительно, рассматривая условие текучести изотропного тела в наиболее общей форме

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0,$$

мы переформулируем его в терминах эквивалентных напряжений

$$f(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = 0.$$

В пространстве главных напряжений классическое условие текучести Треска изображается поверхностью шестигранной призмы с ребрами

$$\sigma_1 \pm 2k = \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 \pm 2k = \sigma_3, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k, \quad (2.53)$$

где k — предел текучести при чистом сдвиге.

Для напряженного состояния, соответствующего грани призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы главные напряжения были связаны соотношением

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2k. \quad (2.54)$$

Для напряженного состояния, соответствующего ребру призмы Треска, всегда можно перенумеровать главные оси тензора напряжений так, чтобы выполнялось равенство

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \pm 2k. \quad (2.55)$$

Последнее условие означает, что главное напряжение σ_3 является либо наименьшим, либо наибольшим главным нормальным напряжением.

Перепишем классическое условие Треска для грани (2.54) и ребра (2.55) с учетом соотношений (2.52), выражающих увеличение внутренних напряжений вследствие повреждений, заменяя главные напряжения на эквивалентные, и получим обобщенное условие текучести Треска для тела с микрорповреждениями.

Обобщенное условие текучести для грани призмы Треска (2.54) имеет форму:

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 2k \quad (2.56)$$

или

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_2}{1 - D_2} = 2k. \quad (2.57)$$

Обобщенное условие текучести для ребра призмы Треска (2.55) примет вид:

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 \pm 2k \quad (2.58)$$

или (ограничиваясь выбором положительного знака)

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_3}{1 - D_3} = 2k, \quad \frac{\sigma_2}{1 - D_2} - \frac{\sigma_3}{1 - D_3} = 2k. \quad (2.59)$$

2.7. Закон накопления повреждений

Закон накопления повреждений, принимая во внимание соосность тензора напряжений и тензора поврежденности, примем в простейшей форме:

$$dD_j = K_j \operatorname{sgn}(d\varepsilon_j^P) d\varepsilon_j^P \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}), \quad (2.60)$$

где K_j — определяющие функции ($K_j > 0$). Здесь dD_j представляют собой действительные приращения главных поврежденностей D_j , а $d\epsilon_j^P$ действительными приращениями не являются.

Закон накопления повреждений также можно представлять в виде степенной зависимости

$$dD_j = K_j \left(\operatorname{sgn}(d\epsilon_j^P) d\epsilon_j^P \right)^\alpha \quad (\text{по } j \text{ не суммировать}), \quad (2.61)$$

или в общей линейной форме

$$dD_j = K_{js} \operatorname{sgn}(d\epsilon_s^P) d\epsilon_s^P, \quad (2.62)$$

где α — постоянный показатель; определяющие функции K_j и K_{js} не зависят от приращений $d\sigma_j$, $d\epsilon_j^P$, dD_j .

Следует также заметить, что в соответствии с представлениями, положенными в основу рассматриваемой математической модели связанного состояния, поврежденность возрастает в процессе деформации сжатия, поэтому в соотношениях (2.60)–(2.62), определяющих закон накопления повреждений, используется модуль главных приращений пластических деформаций $\operatorname{sgn}(d\epsilon_j^P) d\epsilon_j^P$. Это означает, что независимо от процесса всегда $dD_j \geq 0$. Закон накопления повреждений, в том случае, когда при деформации сжатия не происходит рост поврежденности, очевидно, имеет следующий вид (по j не суммировать):

$$dD_j = \begin{cases} K_{js} \operatorname{sgn}(d\epsilon_j^P) d\epsilon_j^P, & d\epsilon_j^P > 0, \\ 0, & d\epsilon_j^P \leq 0. \end{cases}$$

2.8. Обобщенный ассоциированный закон течения тела с микроповреждениями

Мы сохраним традиционную форму ассоциированного с условием пластичности

$$f(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = 0.$$

закона течения тела с микроповреждениями, приняв соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, и три соотношения

$$d\epsilon_j^P = d\Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_j}.$$

Рассмотрим соотношения ассоциированного с условием пластичности Треска закона течения. Нас будет интересовать определяющая зависимость главных приращений пластической деформации от приращений главных напряжений в поврежденной среде.

1. Предположим, что напряженное состояние соответствует грани призмы Треска (2.57). Согласно ассоциированному закону течения, определяющие зависимости для грани (2.57) есть

$$d\epsilon_1^P = \frac{d\Lambda}{1 - D_1}, \quad d\epsilon_2^P = -\frac{d\Lambda}{1 - D_2}, \quad d\epsilon_3^P = 0. \quad (2.63)$$

Множитель $d\Lambda$ без труда исключается с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения:

$$d\left(\frac{\sigma_1}{1-D_1} - \frac{\sigma_2}{1-D_2}\right) = 0. \quad (2.64)$$

Учитывая, что приращения главных поврежденностей и главные приращения пластических деформаций связаны определяющими зависимостями вида

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P) d\varepsilon_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P) d\varepsilon_2^P, \quad dD_3 = 0, \quad (2.65)$$

где определяющие функции⁵ не зависят от приращений главных напряжений и главных приращений пластических деформаций, находим

$$d\Lambda = \frac{(1-D_1)^2 [(\beta-1)d\sigma_2 - d\sigma_1]}{K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P) \sigma_1 + (\beta-1)^3 K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P) \sigma_2}, \quad (2.66)$$

$$\beta - 1 = \frac{1-D_1}{1-D_2},$$

и, таким образом,

$$\frac{d\varepsilon_1^P}{F} = (\beta-1)d\sigma_2 - d\sigma_1. \quad (2.67)$$

Здесь F не зависит от приращений и определяется как

$$F = \frac{1-D_1}{K_1 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P) \sigma_1 + (\beta-1)^3 K_2 \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P) \sigma_2}. \quad (2.68)$$

Заметим, что на основании $\sigma_j d\varepsilon_j^P \geq 0$ вдоль всего процесса нагружения $d\Lambda \geq 0$, следовательно, при течении на грани призмы Треска

$$\operatorname{sgn}(d\varepsilon_1^P) = +1, \quad \operatorname{sgn}(d\varepsilon_2^P) = -1.$$

В силу ассоциированного закона течения на грани (2.63) выполняется соотношение

$$d\varepsilon_2^P = -(\beta-1)d\varepsilon_1^P, \quad (2.69)$$

поэтому

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_1^P}{F} = (\beta-1)d\sigma_2 - d\sigma_1, \\ \frac{d\varepsilon_2^P}{F} = -(\beta-1)^2 d\sigma_2 + (\beta-1)d\sigma_1. \end{cases} \quad (2.70)$$

Заметим также, что условие разупрочнения при накоплении повреждений

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\sigma_j < 0$$

⁵В первом приближении их можно считать постоянными. В случае течения на грани призмы Треска главное приращение $d\varepsilon_2^P$ не может быть положительным. Накопление поврежденности D_2 при этом не может быть значительным, и с хорошим приближением можно полагать, что $K_2 = 0$.

в случае течения на грани призмы Треска эквивалентно неравенству

$$(\beta - 1)d\sigma_2 - d\sigma_1 > 0,$$

которое гарантирует выполнение неравенства диссипации $d\Lambda > 0$.

Упрочнение

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_j} d\sigma_j > 0$$

при накоплении повреждений никогда не реализуется, поэтому условие

$$(\beta - 1)d\sigma_2 - d\sigma_1 < 0$$

вдоль действительного процесса никогда не выполняется.

Процессы, характеризуемые условием

$$(\beta - 1)d\sigma_2 - d\sigma_1 = 0,$$

происходят, как это следует из соотношений ассоциированного закона течения на грани, при нулевых главных скоростях пластических деформаций и не сопровождаются ростом главных поврежденностей⁶.

2. Рассмотрим далее соотношения между главными приращениями пластических деформаций и приращениями главных напряжений при течении на ребре призмы Треска.

Ребро образовано пересечением граней, и всегда можно считать, что ребро задается уравнениями (2.59). Согласно ассоциированному закону течения, определяющие зависимости для ребра (2.59) есть

$$d\epsilon_1^P = \frac{d\Lambda_1}{1 - D_1}, \quad d\epsilon_2^P = \frac{d\Lambda_2}{1 - D_2}, \quad d\epsilon_3^P = -\frac{d\Lambda_1}{1 - D_3} - \frac{d\Lambda_2}{1 - D_3}. \quad (2.71)$$

Неравенство диссипации

$$\sigma_j d\epsilon_j^P = 2k(d\Lambda_1 + d\Lambda_2) \geq 0$$

должно выполняться вдоль всего процесса нагружения.

Множители $d\Lambda_1$, $d\Lambda_2$ без труда исключаются с помощью уравнения, устанавливающего непрерывность нагружения, и закона накопления повреждений

$$dD_1 = K_1 \operatorname{sgn}(d\epsilon_1^P) d\epsilon_1^P, \quad dD_2 = K_2 \operatorname{sgn}(d\epsilon_2^P) d\epsilon_2^P, \quad dD_3 = K_3 \operatorname{sgn}(d\epsilon_3^P) d\epsilon_3^P.$$

Мы приводим соответствующие формулы для случая $d\epsilon_1^P \geq 0$, $d\epsilon_2^P \geq 0$, $d\epsilon_3^P \leq 0$:

$$\begin{aligned} d\Lambda_1 &= \left[(1 - D_1)^2 \left[\sigma_2 K_2 - (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right] [(\beta_1 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_1] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - D_2)^2 (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3 [(\beta_2 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_2] \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3 \right]^{-1}, \\ d\Lambda_2 &= \left[(1 - D_2)^2 \left[\sigma_1 K_1 - (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right] [(\beta_2 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_2] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - D_1)^2 (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3 [(\beta_1 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_1] \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3 \right]^{-1}, \end{aligned}$$

⁶При таких процессах, однако, может происходить поворот триэдра $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$.

где

$$\beta_1 - 1 = \frac{1 - D_1}{1 - D_3}, \quad \beta_2 - 1 = \frac{1 - D_2}{1 - D_3}.$$

Главные приращения пластических деформаций $d\varepsilon_1^P$ и $d\varepsilon_2^P$ выражаются через приращения главных напряжений определяющими зависимостями вида

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon_1^P}{S_1} &= d\sigma_3 - E_{12}d\sigma_2 - E_{11}d\sigma_1, \\ \frac{d\varepsilon_2^P}{S_2} &= d\sigma_3 - E_{22}d\sigma_2 - E_{21}d\sigma_1, \end{aligned} \quad (2.72)$$

в которых

$$\begin{aligned} S_1 &= \left[(1 - D_1)(\beta_1 - 1) \left[\sigma_2 K_2 - (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - D_2)^2 (1 - D_1)^{-1} (\beta_1 - 1)^3 (\beta_2 - 1) \sigma_3 K_3 \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3 \right]^{-1}, \\ S_2 &= \left[(1 - D_2)(\beta_2 - 1) \left[\sigma_1 K_1 - (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right] + \right. \\ &\quad \left. + (1 - D_1)^2 (1 - D_2)^{-1} (\beta_2 - 1)^3 (\beta_1 - 1) \sigma_3 K_3 \right] \times \\ &\quad \times \left[\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3 \right]^{-1}, \\ S_1 E_{11} &= \frac{(1 - D_1) \left[\sigma_2 K_2 - (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right]}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ S_2 E_{22} &= \frac{(1 - D_2) \left[\sigma_1 K_1 - (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3 \right]}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ S_1 E_{12} &= \frac{(1 - D_2)^2 (1 - D_1)^{-1} (\beta_1 - 1)^3 \sigma_3 K_3}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}, \\ S_2 E_{21} &= \frac{(1 - D_1)^2 (1 - D_2)^{-1} (\beta_2 - 1)^3 \sigma_3 K_3}{\sigma_1 \sigma_2 K_1 K_2 - \sigma_1 \sigma_3 K_1 K_3 (\beta_2 - 1)^3 - \sigma_2 \sigma_3 K_2 K_3 (\beta_1 - 1)^3}. \end{aligned}$$

Для главного приращения $d\varepsilon_3^P$ имеем формулу

$$-d\varepsilon_3^P = (\beta_1 - 1)d\varepsilon_1^P + (\beta_2 - 1)d\varepsilon_2^P \quad (2.73)$$

или

$$\begin{aligned} -\frac{d\varepsilon_3^P}{S_1 S_2} &= \left[\frac{\beta_1 - 1}{S_2} + \frac{\beta_2 - 1}{S_1} \right] d\sigma_3 - \\ &\quad - \left[\frac{\beta_1 - 1}{S_2} E_{12} + \frac{\beta_2 - 1}{S_1} E_{22} \right] d\sigma_2 - \left[\frac{\beta_1 - 1}{S_2} E_{11} + \frac{\beta_2 - 1}{S_1} E_{21} \right] d\sigma_1. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Соотношения ассоциированного закона течения для ребра (2.72), (2.74) справедливы, лишь когда наблюдается активное разупрочнение:

$$\begin{aligned} (\beta_1 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_1 &\geq 0, \\ (\beta_2 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Режим нагружения

$$\begin{aligned} (\beta_1 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_1 &= 0, \\ (\beta_2 - 1)d\sigma_3 - d\sigma_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

характеризуется тем, что $d\epsilon_j^P = 0$ и $dD_j = 0$. При таких режимах течения, однако, может происходить поворот главных осей напряжений, т.е. поворот триэдра $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$.

Уравнения ассоциированного закона течения для грани (2.70) и ребра (2.72), (2.74) не позволяют, в силу линейной зависимости правых частей, найти обратные соотношения, т. е. выразить приращения главных напряжений через главные приращения пластических деформаций.

3. Связанное плоское деформированное состояние

Плоское деформированное состояние характеризуется условием $d\epsilon_3 = 0$. В плоскости течения x_1, x_2 имеется два взаимно ортогональных семейства изостатических траекторий. Одно из семейств будем идентифицировать номером 1, другое — номером 2. Если считать, что σ_1 — наибольшее главное напряжение, то обобщенное условие пластичности Треска в состоянии плоской деформации выражается уравнением

$$\frac{\sigma_1}{1 - D_1} - \frac{\sigma_2}{1 - D_2} = 2k, \quad (3.1)$$

где k по-прежнему есть предел текучести при сдвиге.

Обозначая через θ угол наклона к оси x_1 изостаты первого семейства, получаем

$$\kappa_1 = \kappa_{13} = -d_1\theta, \quad \kappa_2 = \kappa_{23} = d_2\theta.$$

Единственное деривационное соотношение в этом случае имеет форму

$$d_1\kappa_2 + d_2\kappa_1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = 0.$$

Уравнения равновесия, сформулированные в изостатической координатной сетке, сводятся к двум соотношениям Ламе—Максвелла

$$\begin{aligned} d_1\sigma_1 + \kappa_2(\sigma_1 - \sigma_2) &= 0, \\ d_2\sigma_2 + \kappa_1(\sigma_2 - \sigma_1) &= 0. \end{aligned}$$

Пренебрегая упругими деформациями, приведем основные соотношения для приращений.

Уравнения равновесия в приращениях

$$\begin{cases} d_1d\sigma_1 + \kappa_2(d\sigma_1 - d\sigma_2) + (2\kappa_1 + d_2)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] = 0, \\ d_2d\sigma_2 + \kappa_1(d\sigma_2 - d\sigma_1) + (2\kappa_2 + d_1)[(\sigma_1 - \sigma_2)d\omega] = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $d\omega = d\omega_3$ определяет малый поворот главных осей напряжений в плоскости течения при догрузении.

Формулы Коши, связывающие главные приращения пластических деформаций с приращениями перемещений, в случае плоской деформации имеют следующий вид (см. (2.44), (2.45)):

$$\begin{aligned} d\epsilon_1^P &= \kappa_1 du_{<2>} + d_1 du_{<1>}, \\ d\epsilon_2^P &= \kappa_2 du_{<1>} + d_2 du_{<2>}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Условие соосности тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций (см. (2.46)) приводит к соотношению

$$d_1 du_{<2>} - \kappa_1 du_{<1>} + d_2 du_{<1>} - \kappa_2 du_{<2>} = 0. \quad (3.4)$$

Условие совместности для приращений поворотов (2.29) в случае плоской связанной задачи удовлетворяется тождественно.

Уравнение совместности (упругими деформациями пренебрегаем $d\epsilon_j = d\epsilon_j^P$)

$$\begin{aligned} d_2 d_2 d\epsilon_1 - (\beta - 1) d_1 d_1 d\epsilon_1 - ((1 + \beta) \kappa_2 + 2d_1 \beta) d_1 d\epsilon_1 + \\ + (1 + \beta) \kappa_1 d_2 d\epsilon_1 + (d_1 d_1 \beta + \kappa_2 d_1 \beta - \\ - \kappa_1 d_2 \beta - \beta d_1 \kappa_2 + \beta d_2 \kappa_1 - \beta \kappa_2^2 + \beta \kappa_1^2) d\epsilon_1 = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При плоском пластическом течении главные приращения пластических деформаций имеют разные знаки:

$$d\epsilon_1^P \geq 0, \quad d\epsilon_2^P \leq 0.$$

Ассоциированный закон течения

$$\begin{cases} (\beta - 1) d\epsilon_1 + d\epsilon_2 = 0, \\ \frac{d\epsilon_1}{F} = (\beta - 1) d\sigma_2 - d\sigma_1, \end{cases} \quad (3.6)$$

где F не зависит от приращений

$$\begin{aligned} F &= \frac{1 - D_1}{K_1 \sigma_1 - (\beta - 1)^3 K_2 \sigma_2}, \\ \beta - 1 &= \frac{1 - D_1}{1 - D_2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Закон накопления повреждений есть (K_1, K_2 — положительные постоянные)

$$\begin{cases} dD_1 = K_1 d\epsilon_1^P, \\ dD_2 = -K_2 d\epsilon_2^P. \end{cases} \quad (3.8)$$

Полученная система соотношений замкнута, например, относительно пяти приращений $d\sigma_1, d\sigma_2, d\omega, d\epsilon_1, d\epsilon_2$, поскольку для их определения имеется ровно пять уравнений.

Уравнение совместности (3.5) относительно главного приращения $d\epsilon_1$ можно формально рассматривать независимо от остальных соотношений плоской задачи. Главная часть этого уравнения есть:

$$\frac{1}{g_{22}} \partial_2 \partial_2 d\epsilon_1 - \frac{1}{g_{11}} (\beta - 1) \partial_1 \partial_1 d\epsilon_1 + \dots = 0. \quad (3.9)$$

Характеристическое уравнение, которое получается по главной части (3.9), указывает на его гиперболичность. Характеристики плоской связанной задачи

$$\frac{\sqrt{g_{11}} d\xi^1}{\sqrt{g_{22}} d\xi^2} = \pm \sqrt{\frac{1 - D_1}{1 - D_2}} \quad (3.10)$$

совпадают с линиями максимального касательного напряжения только в случае изотропного в плоскости течения распределения поврежденности $D_1 = D_2$.

Заключение

Получена замкнутая система статических и кинематических уравнений теории связанной пластичности и поврежденности в изостатической координатной системе относительно приращений главных напряжений, главных скоростей пластических деформаций и приращений перемещений, что наиболее удобно для представления и анализа основных соотношений связанной задачи. Рассмотрен случай плоской пластической деформации и показано, что система основных соотношений относится к гиперболическому типу, что позволяет обобщить понятие поля скольжения на случай связанных состояний. Линии скольжения для связанного состояния наклонены иначе, чем линии скольжения при идеально пластическом течении.

Литература

- [1] Murakami S. Mechanical modeling of material damage // J. Appl. Mech. 1988. V. 55. No. 2. P. 280–286.
- [2] Radayev Y.N., Murakami S., Hayakawa K. Mathematical Description of Anisotropic Damage State in Continuum Damage Mechanics // Trans. Japan Soc. Mech. Engn. V. 60. A. No. 580. 1994. P. 68–76.
- [3] Мураками С., Радаев Ю.Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. №4. С. 93–110.
- [4] Радаев Ю.Н. Тензорные меры поврежденности и гармонический анализ тонкой структуры поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. 1998. №2(8). С. 79–105.
- [5] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Вестник Самарского гос. университета. 1999. №4(14). С. 70–93.
- [6] Радаев Ю.Н. Канонические инварианты уравнений теории связанной пластичности и поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 2000. №5. С. 27–45.
- [7] Radayev Y.N. On directional average of the local anisotropic damage // Int. J. Fracture. 2004. V. 128. P. 293–307.
- [8] Maugin G.A. The Thermomechanics of Plasticity and Fracture. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 350 pp.
- [9] Онат Е., Прагер В. Образование шейки при пластическом течении растягиваемого плоского образца // Механика. Сб. переводов. М.: Изд-во АН СССР, 1955. №4(32). С. 93–97.

- [10] Love A.E.H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. New York: Dover Publications, 1944. 643 pp.
- [11] Папкович П.Ф. Теория упругости. М.; Л.: Оборонгиз, 1939. 640 с.
- [12] Блох В.И. Теория упругости. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1964. 484 с.
- [13] L.E. Malvern. Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J. 1969. 714 pp.

Поступила в редакцию 15/XII/2005;
в окончательном варианте — 15/XII/2005.

ON HYPERBOLIC PROPERTY OF THE COUPLED (PLASTIC STRAIN–DAMAGE) EQUATIONS

© 2005 Y.N. Radayev, N.A. Kurnysheva⁷

In the present study the problem of mathematical modelling of a stress-strain state of rigid-plastic solid with scattered anisotropic microdamages is considered. Damage is represented by a symmetric second-rank damage tensor. The principle axes of the damage tensor are assumed to coincide with principle axes of the Cauchy stress tensor. Closed system of static and kinematic equations of coupled (plastic strain–damage) theory in isostatic coordinate net in their incremental forms is obtained which appears subsequently most convenient for the coupled analysis. In the paper those cases when the resolving equations belong to hyperbolic type are discussed. Particularly this holds in the case of plane strain thus allowing to generalize slip lines theory known from perfect plasticity to coupled states.

Paper received 15/XII/2005.

Paper accepted 15/XII/2005.

⁷Radayev Yuri Nickolaevich (radayev@ssu.samara.ru), Kurnysheva Nataliya Aleksandrovna (knatalyasamgu@mail.ru), Dept. of Continuum Mechanics, Samara State University, Samara, 443011, Russia.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТРЕХМЕРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ КОШИ
В ИЗОСТАТИЧЕСКОЙ КООРДИНАТНОЙ
СЕТКЕ

Соотношения Коши, записанные для приращений перемещений, имеют форму

$$2d\boldsymbol{\varepsilon} = (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}) + (\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u})^T. \quad (\text{i})$$

Приращения перемещений можно представить в виде разложения по векторам ортонормированного базиса в пространстве $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$

$$d\mathbf{u} = \mathbf{l}du_{<1>} + \mathbf{m}du_{<2>} + \mathbf{n}du_{<3>}. \quad (\text{ii})$$

Здесь величины $du_{<j>}$ не являются действительными приращениями.

Трехмерный оператор Гамильтона, как нетрудно видеть, в триортогональной изостатической системе координат есть

$$\boldsymbol{\nabla} = \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial}{\partial \xi^3}. \quad (\text{iii})$$

Оператор $\boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u}$ вычисляется в виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \otimes d\mathbf{u} = & \mathbf{l} \otimes \boldsymbol{\nabla} du_{<1>} + \mathbf{m} \otimes \boldsymbol{\nabla} du_{<2>} + \mathbf{n} \otimes \boldsymbol{\nabla} du_{<3>} + \\ & + (du_{<1>}) \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{l} + (du_{<2>}) \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{m} + (du_{<3>}) \boldsymbol{\nabla} \otimes \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} du_{<1>} = & \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{<1>}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{<1>}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{<1>}}{\partial \xi^3}, \\ \boldsymbol{\nabla} du_{<2>} = & \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{<2>}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{<2>}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{<2>}}{\partial \xi^3}, \\ \boldsymbol{\nabla} du_{<3>} = & \mathbf{l} \frac{1}{h_1} \frac{\partial du_{<3>}}{\partial \xi^1} + \mathbf{m} \frac{1}{h_2} \frac{\partial du_{<3>}}{\partial \xi^2} + \mathbf{n} \frac{1}{h_3} \frac{\partial du_{<3>}}{\partial \xi^3} \end{aligned} \quad (\text{v})$$

или

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} du_{<1>} = & \mathbf{l}(d_1 du_{<1>}) + \mathbf{m}(d_2 du_{<1>}) + \mathbf{n}(d_3 du_{<1>}), \\ \boldsymbol{\nabla} du_{<2>} = & \mathbf{l}(d_1 du_{<2>}) + \mathbf{m}(d_2 du_{<2>}) + \mathbf{n}(d_3 du_{<2>}), \\ \boldsymbol{\nabla} du_{<3>} = & \mathbf{l}(d_1 du_{<3>}) + \mathbf{m}(d_2 du_{<3>}) + \mathbf{n}(d_3 du_{<3>}). \end{aligned} \quad (\text{vi})$$

Используя далее выражения для производных от базисных векторов

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^1} = & -\frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{m} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_2 h_1) \mathbf{m} - (d_3 h_1) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^2} = & \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{m} = (d_1 h_2) \mathbf{m}, \\ \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \xi^3} = & \frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{n} = (d_1 h_3) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{vii})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^1} = & \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^2} \mathbf{l} = (d_2 h_1) \mathbf{l}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^2} = & -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{n} = -(d_1 h_2) \mathbf{l} - (d_3 h_2) \mathbf{n}, \\ \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi^3} = & \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{n} = (d_2 h_3) \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (\text{viii})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^1} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_1}{\partial \xi^3} \mathbf{l} = (d_3 h_1) \mathbf{l}, \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^2} &= \frac{1}{h_3} \frac{\partial h_2}{\partial \xi^3} \mathbf{m} = (d_3 h_2) \mathbf{m}, \\
\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^3} &= -\frac{1}{h_1} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^1} \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} \frac{\partial h_3}{\partial \xi^2} \mathbf{m} = -(d_1 h_3) \mathbf{l} - (d_2 h_3) \mathbf{m},
\end{aligned} \tag{ix}$$

приходим к следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\nabla \otimes \mathbf{l} &= -\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} - \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} + \\
&\quad + \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} + \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\nabla \otimes \mathbf{m} &= \frac{1}{h_1} (d_2 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} - \\
&\quad - \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \\
\nabla \otimes \mathbf{n} &= \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} - \\
&\quad - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}.
\end{aligned} \tag{x}$$

Используя (vi) и (x), соотношение (iv) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
\nabla \otimes \mathbf{du} &= \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<2>} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<3>} + d_1 du_{<1>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<1>} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<3>} + d_2 du_{<2>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<1>} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<2>} + d_3 du_{<3>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<1>} + d_2 du_{<1>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<1>} + d_3 du_{<1>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<2>} + d_1 du_{<2>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<2>} + d_3 du_{<2>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<3>} + d_1 du_{<3>} \right] + \\
&\quad + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<3>} + d_2 du_{<3>} \right].
\end{aligned} \tag{xi}$$

Транспонировав уравнение (xi), получаем

$$\begin{aligned}
 (\nabla \otimes \mathbf{du})^T = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<2>} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<3>} + d_1 du_{<1>} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<1>} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<3>} + d_2 du_{<2>} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<1>} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<2>} + d_3 du_{<3>} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<1>} + d_2 du_{<1>} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<1>} + d_3 du_{<1>} \right] + \\
 & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<2>} + d_1 du_{<2>} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<2>} + d_3 du_{<2>} \right] + \\
 & + \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<3>} + d_1 du_{<3>} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<3>} + d_2 du_{<3>} \right]. \tag{xii}
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения (xi) и (xii) в соотношения Коши (i), получим

$$\begin{aligned}
 d\boldsymbol{\varepsilon} = & \mathbf{l} \otimes \mathbf{l} \left[\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<2>} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<3>} + d_1 du_{<1>} \right] + \\
 & + \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} \left[\frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<1>} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<3>} + d_2 du_{<2>} \right] + \\
 & + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \left[\frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<1>} + \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<2>} + d_3 du_{<3>} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<1>} + d_2 du_{<1>} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<2>} + d_1 du_{<2>} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{l} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<1>} + d_3 du_{<1>} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<3>} + d_1 du_{<3>} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<1>} + d_2 du_{<1>} - \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<2>} + d_1 du_{<2>} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<2>} + d_3 du_{<2>} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<3>} + d_2 du_{<3>} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{l} \left[-\frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<1>} + d_3 du_{<1>} - \frac{1}{h_3} (d_1 h_3) du_{<3>} + d_1 du_{<3>} \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \left[-\frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<2>} + d_3 du_{<2>} - \frac{1}{h_3} (d_2 h_3) du_{<3>} + d_2 du_{<3>} \right].
 \end{aligned}$$

Тензор $d\boldsymbol{\varepsilon}$ симметричен.

В силу того, что в приближении жесткопластического анализа $d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^P$, а также ассоциированного закона течения, из которого следует соосность тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций, полученная формула приводит к шести соотношениям

$$d\varepsilon_1^P = \frac{1}{h_1} (d_2 h_1) du_{<2>} + \frac{1}{h_1} (d_3 h_1) du_{<3>} + d_1 du_{<1>}, \tag{xiii}$$

$$d\varepsilon_2^P = \frac{1}{h_2} (d_1 h_2) du_{<1>} + \frac{1}{h_2} (d_3 h_2) du_{<3>} + d_2 du_{<2>}, \tag{xiv}$$

$$d\varepsilon_3^P = \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<1>} + \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<2>} + d_3du_{<3>}, \quad (\text{xv})$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_2h_1)du_{<1>} + d_2du_{<1>} - \frac{1}{h_2}(d_1h_2)du_{<2>} + d_1du_{<2>} = 0, \quad (\text{xvi})$$

$$-\frac{1}{h_1}(d_3h_1)du_{<1>} + d_3du_{<1>} - \frac{1}{h_3}(d_1h_3)du_{<3>} + d_1du_{<3>} = 0, \quad (\text{xvii})$$

$$-\frac{1}{h_2}(d_3h_2)du_{<2>} + d_3du_{<2>} - \frac{1}{h_3}(d_2h_3)du_{<3>} + d_2du_{<3>} = 0. \quad (\text{xviii})$$

Вводя кривизны в соотношения (xiii)–(xviii), согласно

$$\begin{aligned} d_1h_3 &= h_3\kappa_{32}, & d_2h_3 &= h_3\kappa_{31}, & d_3h_2 &= h_2\kappa_{21}, \\ d_1h_2 &= h_2\kappa_{23}, & d_2h_1 &= h_1\kappa_{13}, & d_3h_1 &= h_1\kappa_{12}, \end{aligned} \quad (\text{xix})$$

получим

$$d\varepsilon_1^P = \kappa_{13}du_{<2>} + \kappa_{12}du_{<3>} + d_1du_{<1>}, \quad (\text{xx})$$

$$d\varepsilon_2^P = \kappa_{23}du_{<1>} + \kappa_{21}du_{<3>} + d_2du_{<2>}, \quad (\text{xxi})$$

$$d\varepsilon_3^P = \kappa_{32}du_{<1>} + \kappa_{31}du_{<2>} + d_3du_{<3>}, \quad (\text{xxii})$$

$$-\kappa_{13}du_{<1>} - \kappa_{23}du_{<2>} + d_2du_{<1>} + d_1du_{<2>} = 0, \quad (\text{xxiii})$$

$$-\kappa_{12}du_{<1>} - \kappa_{32}du_{<3>} + d_3du_{<1>} + d_1du_{<3>} = 0, \quad (\text{xxiv})$$

$$-\kappa_{21}du_{<2>} - \kappa_{31}du_{<3>} + d_3du_{<2>} + d_2du_{<3>} = 0. \quad (\text{xxv})$$

Эти соотношения компактно представляются в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} d\varepsilon_1^P \\ d\varepsilon_2^P \\ d\varepsilon_3^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & \kappa_{13} & \kappa_{12} \\ \kappa_{23} & d_2 & \kappa_{21} \\ \kappa_{32} & \kappa_{31} & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -\kappa_{13} + d_2 & -\kappa_{23} + d_1 & 0 \\ -\kappa_{12} + d_3 & 0 & -\kappa_{32} + d_1 \\ 0 & -\kappa_{21} + d_3 & -\kappa_{31} + d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du_{<1>} \\ du_{<2>} \\ du_{<3>} \end{pmatrix} = 0.$$